

ESPEJOS ENFRENTADOS: AD INFINITUM

Juan Antonio Prieto Sánchez

juanantonio.prieto@uca.es

Universidad de Cádiz (UCA), España

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Modalidad: Feria Matemática (F)

Nivel educativo: Nivel Medio o Secundario (12 a 15 años)

Palabras clave: Infinito potencial, Infinito actual, Espejos, Material didáctico

Resumen

Presentamos un material didáctico que pretende acercar la idea del infinito matemático mediante una experiencia óptica con la ayuda de espejos enfrentados. Adjuntamos, junto al artilugio, un manual de juegos de menos a mayor dificultad intuitiva: Finito vs Infinito, Infinito Potencial-Infinito Actual, Infinito actual modelo inclusión de Bolzano y, finalmente, Infinito actual modelo de exclusión de Cantor. Los dos últimos fueron elegidos como material para un estudio evolutivo con entrevistas semiestructuradas con alumnos de secundaria (Prieto, 2015). El análisis de resultados y las conclusiones de dicho estudio barajamos la posibilidad de utilizar este material en la enseñanza-aprendizaje del infinito.

Fenómeno físico de la reflexión en espejos paralelos

Consideremos un espejo y situemos un objeto O a una distancia a del pie del mismo. La imagen que se produce estará situada a una distancia a del pie del espejo.

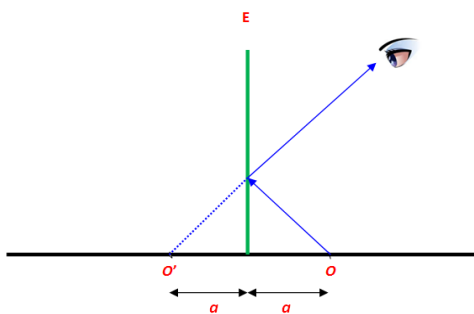


Figura 1. Reflexión de un objeto en un espejo

Supongamos ahora, dos espejos planos y paralelos, E_1 y E_2 , cuyas caras reflectoras están orientadas hacia el objeto que se encuentra entre ambos. Situemos un observador entre ellos hacia A . Éste verá un número de imágenes tanto mayor cuanto más largos sean los espejos o cuanto menos inclinada sea el ángulo de observación con respecto a la horizontal.

Un objeto luminoso insertado entre estos dos espejos da origen en cada uno de ellos a una primera imagen convirtiéndose en objeto luminoso para los demás espejos respectivamente, crean dos imágenes nuevas más lejanas que las primeras, que a su vez crearan otras nuevas, y así indefinidamente. Para el ojo situado convenientemente, verá una infinidad de imágenes que serán cada vez más débiles debido a las pérdidas que hacen sufrir a la luz en cada reflexión sucesiva.

Ópticamente, lo aclara Santiago (2001), el rayo luminoso como R_1 es reflejado por el espejo E_1 como si procediera de la imagen O'_1 simétrica de O con respecto al plano E_1 . Posteriormente, se encuentra el segundo espejo E_2 donde se refleja de nuevo como si procediera de la imagen O'_1 producida por E_2 es decir $O'_{1,2}$ en el espejo E_1 y por consiguiente, de $O'_{1,2,1}$; una reflexión puede producirse sobre E_2 , etc. Pero por otro lado, hay una segunda serie, un rayo R_2 que incida primeramente sobre el espejo E_2 se alejaría como si procediera de la imagen $O''_{2,1,2}$, etc.

Las imágenes formadas están alineadas sobre una misma recta perpendicular a los lados de los espejos que pasan por O .

Las imágenes están dispuestas alternativamente de cara y de espalda y las distancias entre ellas son alternativamente $2a$ y $2b$ siendo a y b las distancias del objeto O con respecto a los pies de los espejos E_1 y E_2 , respectivamente.

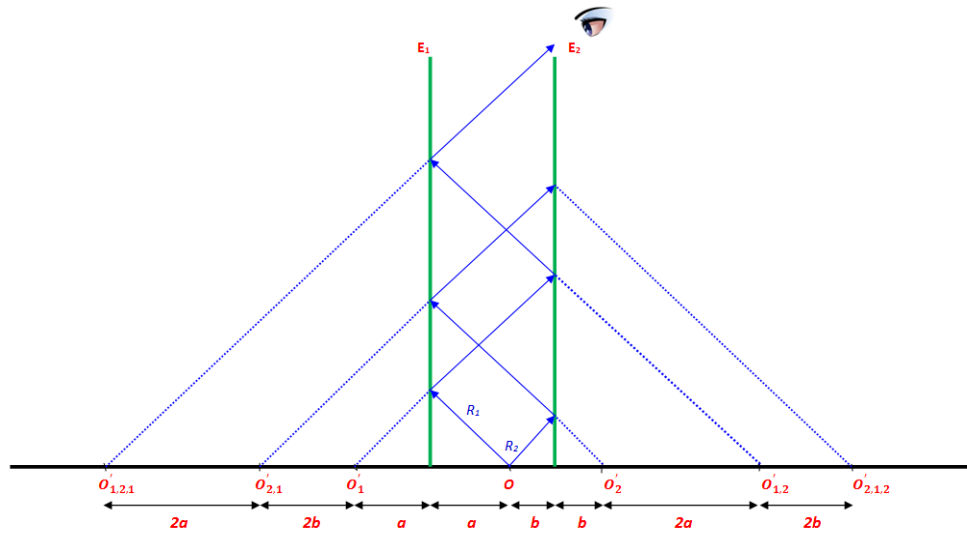


Figura 2. Reflexión de un objeto en dos espejos paralelos

Material

Pretendemos utilizar los dos fenómenos de reflexión, detallados en el apartado anterior, en experiencias con los alumnos para indagar en ellos el cardinal infinito mediante la misma posición de Bolzano; donde el foco de estudio era la comparación dentro del mismo conjunto y mediante una relación de inclusión.

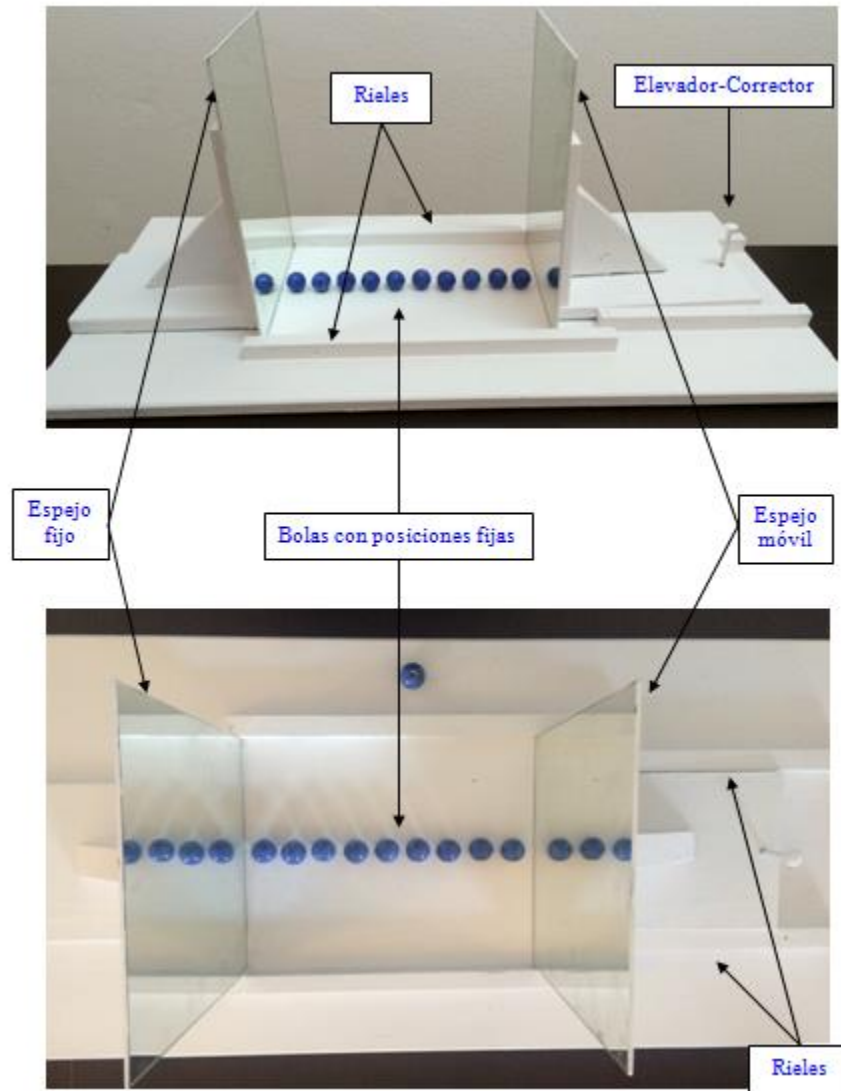


Figura 3. Aparataje

Tareas

De las posibles tareas que podemos realizar ponemos un ejemplo, el realizado por Prieto (2015) en el estudio del infinito actual en estudiantes de secundaria.

Finito vs Infinito: Cardinal finito-Cardinal Infinito

Basado en la definición que diera Russell (1995) para diferenciar lo finito de lo infinito. Con un solo espejo, se le coloca un número determinado de bolas que se le pedirá que cuenten, éstas y las reflejadas en el único espejo.

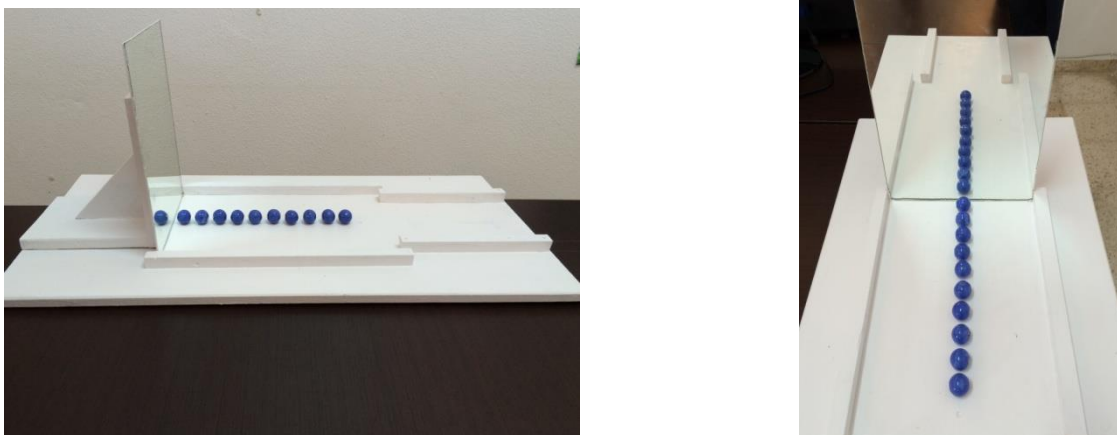


Figura 4. Cardinal finito

Se le pedirá que quite una bola y que las vuelva a contar. Finalmente se le hace la pregunta si tienen la misma cantidad de bolas antes y después de quitar esa bola.

A continuación, con los dos espejos ya enfrentados y paralelos, se le coloca un número determinado de bolas que se le pedirá que las cuenten, éstas y las reflejadas en los dos espejos.

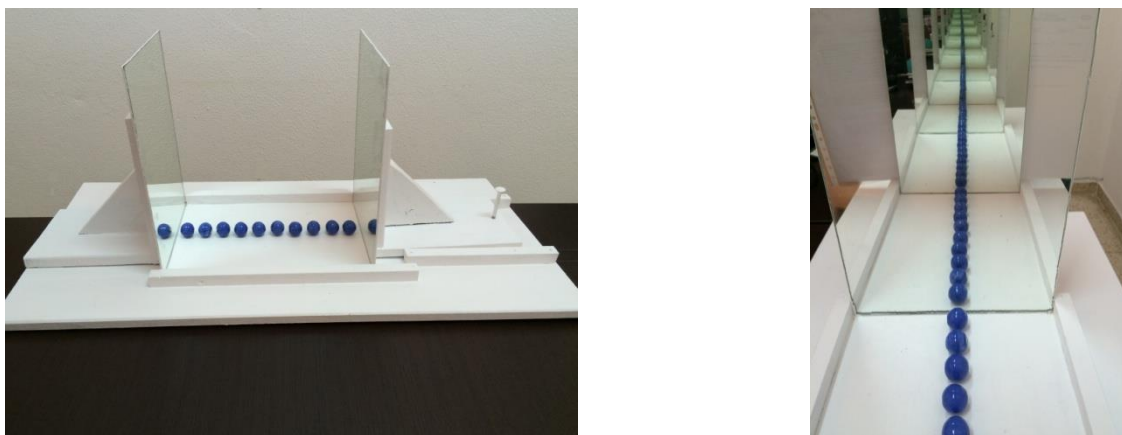


Figura 5. Cardinal Infinito

De la misma forma, se le pedirá que quite una bola y que las vuelva a contar. Finalmente se le hace la pregunta si tienen la misma cantidad de bolas antes y después de quitar esa bola.

Infinito Potencial- Infinito Actual: intuitivo- contraintuitivo

Se trata de reflexionar sobre estos dos tipos de infinito con el aparataje y en la disposición de la figura 5.

Infinito actual siguiendo el modelo de inclusión de Bolzano (1991)

En la disposición de la figura 5, dispondremos un número de bolas de forma lineal facilitando la tarea las muecas de la plataforma. Les pediremos que nos diga y reflexiones cuántas bolas hay entre los espejos. A continuación, les indicaremos que quite una bola (les recomendaremos la primera más cercana a ellos, y que acerquen posteriormente los espejos para que no se reflejen huecos). Se trata de reflexionar a la pregunta que tienen la misma cantidad antes que después una vez abstraído esa bola y por qué.

Infinito actual siguiendo esta vez el modelo de exclusión de Cantor (1983)

En una disposición no lineal pondremos dos conjuntos de cantidades diferentes de bolas. De nuevo se trata de reflexionar si tienen las mismas cantidades teniendo en cuenta las reflejadas.

Referencias bibliográficas

Bolzano, B. (1851). *Paradoxien Des Unendlichen*, Leipzig (publicación póstuma). Las paradojas del infinito (trad. L.F. Segura), 1991, México: Mathema.

Cantor, G. (1983). *Fundamentos de una teoría general de las multiplicidades: una investigación matemático filosófica en la teoría del infinito* (J. Bares y J. Climent, trad.). (1895). Recuperado de internet <http://www.uv.es/jkliment/Documentos/Cantor83.pc.pdf>.

Prieto, J.A. (2015). *Estudio del infinito actual como identidad cardinal en estudiantes de educación secundaria de 13 a 16 años*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales. Universidad de Málaga. España.

Russell, B. (1995). *Los principios de la matemática*. (J. Barrio, trad.). Barcelona: Círculo de Lectores S. A. (Obra original publicada en 1903).

Santiago, R. (2001). *Física-Óptica. Espejos y Lentes. Reflexión de la luz. Imágenes producidas en dos espejos planos paralelos*. Extraído el 31 de Enero, 2015 de http://www.fisicanet.com.ar/fisica/ondas/ap07_espejos_lentes.php.

