UNA PROPUESTA PARA AFRONTAR OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Kranewitter, José Nicolás; Formica, F. Alberto
Universidad Nacional de General Sarmiento.
nicolas.kranewitter@gmail,com

Resumen

En este trabajo se resumirán algunos elementos teóricos que consideramos importantes en la Educación Matemática, como son: los obstáculos epistemológicos, la imagen conceptual y los sistemas y registros de representación semiótica. Luego se abordarán dos problemas de la Educación Matemática, analizando los conceptos antes propuestos y observando distintos resultados ofrecidos por algunas investigaciones realizadas. Ellos son: el problema "$0,\widehat{9}=1$" y el problema de "*las funciones continuas*". Ambos problemas ofrecen ejemplos relativamente claros de la diversidad de obstáculos que entran en juego en las instancias de aprendizaje. Además de esto se presentarán algunas actividades, a modo de propuesta para la enseñanza, que consideramos que contribuirían a completar ciertos conceptos que podrían quedar incompletos.

Palabras clave: Obstáculos, Obstáculos epistemológicos, Sistemas y registros de representación semiótica, Imagen conceptual, Conceptos y objetos matemáticos.

1. Introducción

Este trabajo forma parte de uno más amplio que fue desarrollado para optar a un título de posgrado en el área de Educación Matemática. Se observa que uno de los principales inconvenientes que encuentran los alumnos de matemática cuando comienzan sus estudios en cálculo, es la dificultad en el desarrollo de la noción del infinito. Es objetivo de este trabajo integrar elementos teóricos del análisis del conocimiento con algunos objetos matemáticos particulares, para luego proponer preguntas simples, pero que sean anticipadoras de posibles errores por conceptos con definiciones incompletas o erradas. Se espera que las respuestas a estas preguntas promuevan el aprendizaje de los alumnos. Las propuestas suponen inspiración en la solución de problemas comunes y en la construcción de conceptos.

Hay situaciones en las que los errores no surgen por falta de conocimiento de un concepto matemático, sino que tal vez el conocimiento sobre ese concepto esté incompleto. Rescataremos en esta instancia la idea que se denomina *imagen conceptual*. Otro análisis será referido al por qué podemos concebir nociones de un cierto concepto matemático en forma incompleta o pasible de generar errores esperables. Rescatamos la noción que se denominó *obstáculo epistemológico*. Resulta además interesante pensar cómo se podrá trabajar para conseguir una definición adecuada de los conceptos, que no encuentre contradicciones en diversos contextos de trabajo, y para ello vamos a destacar lo que se denomina: *sistemas de representación semiótica.*

2. Obstáculos en la Educación Matemática

Una de las aspiraciones que tenemos los docentes es que los alumnos puedan aprehender los objetos matemáticos y todos sus alcances en el trabajo matemático.

Muchas veces, esto no ocurre y descubrimos que en ocasiones la idea que tenemos de algún concepto puede generar errores y contradicciones. Los errores que surgen de una construcción incompleta de un conocimiento, no son imprevisibles, sino que se constituyen en lo que se denominan **obstáculos**. Brousseau (1983) comenta que el error no debe reducirse simplemente a la idea de ignorancia o de una incerteza, sino que es efecto de un conocimiento anterior que, ahora, se revela falso o inadecuado. Podría existir entonces una multiplicidad de obstáculos en la construcción de los conceptos. Bachelard (1972) propuso reflexiones filosóficas identificando varias clases de obstáculos en el pensamiento científico, sosteniendo que no se trata de considerar los obstáculos externos, como la complejidad y la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar la debilidad de los sentidos y del espíritu humano: es en el acto mismo de conocer que aparecen, por una suerte de necesidad funcional, las lentitudes y las dudas. Agrega además que es ahí donde aparecen las causas de estancamiento y aún de regresión y las denominó **obstáculos epistemológicos.** En nuestro proceso de aprendizaje, buscamos la generalización a partir de casos particulares para desarrollar un conocimiento, y este método puede acarrear que dicho conocimiento quede incompleto. Es probable que cuando desarrollamos nuestras prácticas para que los alumnos generen un cierto aprendizaje, podamos fomentar que construyan conocimientos truncos. Bachelard (1972) destacó que se podían observar obstáculos en la educación que denominó **obstáculos didácticos**. Define también **los obstáculos en conocimientos previos** como los generados por el primer acercamiento a los objetos, influenciado por las experiencias concretas y el entorno. Asevera también que en la formación del espíritu científico, éste es el primer obstáculo que aparece en la experiencia básica. Bachelard (1972) propone en la clasificación de obstáculos a **los obstáculos en las concepciones espontáneas**, que son aquellos que se forman por las percepciones sensoriales que determinan el conocimiento marcado por un contexto. Pueden existir también obstáculos generados por un conocimiento pragmático o utilitario, que reduce la explicación de un concepto a su utilidad. Brousseau (1983) comunica que identificó diversas manifestaciones de los obstáculos cognitivos a través de los errores. Suelen ser persistentes y resistentes a modificaciones y resurgen a pesar de que el sujeto perciba un modelo defectuoso. Profundizó el concepto de los obstáculos en la educación matemática y supone que se podrán encontrar sus orígenes en alguna de las siguientes categorías: de origen *ontogenético*, surgen por las limitaciones del sujeto en un momento de su desarrollo, de origen *didáctico,* que son aquellos que surgen del rol constitutivo en el conocimiento a que se apunta o de origen *epistemológico*.
Entendiendo la noción de obstáculos, podemos comenzar a tener una mirada diferente de los errores de nuestros alumnos, pudiendo imaginar una anticipación a ellos y ofrecer propuestas que, justamente, permitan mejorar los conocimientos.

3. Sistemas y registros de representación semiótica

Los sistemas de representación son aquellos que engloban al conjunto de imágenes y concepciones que tenemos de un objeto, situación y toda relación asociada a ellos. Se denominan representaciones a aquellas que están constituidas con un significado específico. Duval (1996) sostiene que las representaciones mentales cubren al conjunto de imágenes y a las concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre lo que les está asociado. Agrega que no se puede proceder con las representaciones semióticas como simplemente representaciones mentales. Sólo las representaciones semióticas son aquellas que llenan ciertas funciones cognitivas esenciales, como por ejemplo la del *tratamiento* que se le da a los objetos. Para que un sistema de representación semiótica tenga la categoría de **registro**, debe permitir: la formación de una representación identificable dada por la formación de un registro semiótico, el tratamiento de la representación dentro del mismo registro mediante reglas y por último, la conversión de un registro a otro. Duval (1996) destaca la necesidad del uso de varios registros de representación por las características naturales del funcionamiento del pensamiento humano. El hecho de que existan registros de representación se justifican por tres razones: cada uno de ellos aporta procedimientos posibles que implican economía de tratamiento, los registros se complementan, en el sentido que cada uno de ellos marca una representación parcial del objeto que representa, y encapsular un concepto implica la coordinación de registros de representación. En general no existen reglas de conversión entre registros. Se deberían diseñar tareas promovedoras de conversión que podrían encuadrar en alguno de los siguientes tipos: *Aprehensión de representaciones semióticas*, observando el impacto que tendrían variaciones de un registro en el otro, *conexión y desconexión entre tratamientos semióticos y no semióticos*: en general se tiende a utilizar registros simbólicos que facilitan el cálculo, y se atiende muy poco al tratamiento en registros figurales o pictóricos, y por último *producción doble para representaciones semióticas complejas*: destaca como ***negativa*** la idea de ***organización semiótica lineal***.

3. La imagen conceptual

A medida que construimos nuestro conocimiento y nos hacemos de distintos conceptos, los seres humanos creamos una imagen de los mismos en nuestras mentes. Esta imagen es subjetiva y responde a la intuición. El problema es que el conocimiento intuitivo y el formal de los objetos suele diferir. En principio puede ocurrir porque, generalmente, construimos el concepto en forma contextualizada. Los conceptos matemáticos requieren de una definición rigurosa, sin embargo, en el proceso cognitivo que se atraviesa para la construcción de ellos, existen chances de que se cometan errores y los conceptos pueden quedar mal aprehendidos. Muchos de los conceptos que utilizamos en nuestros comienzos como estudiantes no tienen una definición formal en su totalidad, pero en el transcurso de nuestros estudios se van puliendo y mejorando a medida que los manipulamos en diversos contextos. Tall & Vinner (1981) proponen usar el término de imagen conceptual para describir la total estructura cognitiva que se asocia con un concepto, que incluyen todas las imágenes mentales y asocia las propiedades y los procesos. Agregan además que la imagen conceptual se construye a medida que pasan los años, cambiando la individualidad de los elementos y madurando el concepto. Introducen el término de **imagen conceptual evocada:** es la parte de la imagen conceptual que se utiliza. Esto ocurre en diferentes tiempos y suelen causar conflictos cuando se evocan simultáneamente diferentes de estas partes de la imagen conceptual. Tall & Vinner (1981) sostienen que para cada definición de un concepto, nosotros tenemos una imagen de la definición del concepto que es, en definitiva, una parte de nuestra imagen conceptual del concepto.

4. El problema $0,\widehat{9}=1$

Vamos a considerar “el problema $0,\widehat{9}=1$” no como un problema matemático en sí, sino como un conflicto que hay que superar: en la imagen conceptual de muchos estudiantes está instalado que $0,\widehat{9}$ representa a un **número menor que 1**. Es probable que quede en nuestra imagen conceptual que “dos números son iguales si poseen los mismos dígitos en todas sus posiciones, y son distintos si en alguna (o varias) de ellas difieren”. Es más, si hay varios dígitos que difieren, “el que nos indica qué número es mayor es el que posee el dígito mayor en la primera posición diferente". Cuando queremos comparar los números $0,\widehat{9}$ y el 1, si evocamos a la imagen conceptual, la respuesta debería ser que 1 es mayor que $0,\widehat{9}$, pues "el 1 es mayor que el 0 y lo demás no importa". Estamos aquí ante el problema que hay que superar y que está en relación con el conocimiento del sistema posicional, puesto que los números $0,\widehat{9}$ y 1 son iguales aunque "difieren todos los dígitos en todas sus posiciones". Suele quedar instalada en el estudiante la imagen de que un número de la forma 1,... (los puntos suspensivos indican una sucesión de decimales) es un número *mayor que 1* y *menor que 2.* Es sencillo convencer que si esa sucesión está constituida únicamente por ceros, el número 1,000… no será mayor a uno, sino que representa **exactamente** al número 1. Lo que sí resulta complicado (¡¡¡y mucho!!!) es convencer a los estudiantes (y a los otros también…) de que si luego de la coma, la sucesión está formada únicamente por nueves, ese número **no es menor que 2**. Esto podría ocurrir porque en la imagen conceptual de la mayoría de los estudiantes parecería estar instalado el hecho que "los números *con coma* **no son enteros**". A partir de esta idea, suele sostenerse que, por ejemplo, $0,\widehat{9}$ **no puede ser entero** y, como además es de la forma "0 coma *algo*", el número debe ser más chico que 1. Tall & Vinner (1981) destacaron que como resultado de una actividad, catorce alumnos de un total de treinta y seis, contestaron correctamente que: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+...+\frac{9}{10^n}\right)=2$ aunque señalaron, a la vez, que $0,\widehat{9}$ es menor que uno.

Si escribimos el número $0,\widehat{9}$ como fracción, éste resulta exactamente 1. Sin embargo, esta prueba puede no convencer al alumno.

Presentamos a continuación algunas actividades que muestran un tipo de trabajo con el que podría abordarse el tema y que tienen la intención de hacer reflexionar a los estudiantes sobre la necesidad de contar con la herramienta de la "doble escritura" ante la imposibilidad de operar con números con decimales como los mencionados, y la importancia de recuperar el trabajo sobre la "densidad del conjunto de los números racionales", entendida desde el hecho de que entre dos números racionales distintos existe otro número racional.

Actividad 1: "Determinar, si es posible, un número racional mayor que 0,999… y, a la vez, menor que 1". Se espera que los estudiantes, ante la imposibilidad de encontrar un número, se planteen la inquietud de investigar cuál será la causa. Se espera que la conclusión les permita observar que no pueden hallar tal número porque los números dados **no son distintos**.

Actividad 2 Resolver las siguientes operaciones:

i) $\begin{array}{r}1,245\\ -0,737\\ \hline\end{array}$ ii) $\begin{array}{r}1,000\\ -0,777\\ \hline\end{array}$ iii) $\begin{array}{r}1,00000...\\ -0,77777...\\ \hline\end{array}$ iv) $\begin{array}{r}1,00000...\\ -0,99999...\\ \hline\end{array}$

Se proponen los primeros tres ejercicios para rescatar la resta de números decimales, con la necesidad de "reescribir el minuendo" para poder realizarla (lo que comúnmente se expresa a través de la frase "pedir al compañero"), haciendo uso de las propiedades del sistema posicional. En el caso de los números periódicos se debería observar que al "reescribir el minuendo", el valor del mismo no se modifica. Se espera que los alumnos terminen determinando que esa resta no puede ser distinta de 0, ya que el minuendo queda exactamente 0,9999… Así, se concluye que $0,\widehat{9}$ es igual a 1.

Actividad 3: Propongan un número que verifique:

$$\begin{array}{r} 0,99999999... \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hline 1,00000000... \end{array}$$

Se espera que los alumnos determinen que si se propone un número distinto de cero en el desarrollo decimal del sumando buscado, el resultado será seguro mayor que uno.

5. El problema de las funciones continuas

Cuando se comienza con el estudio de funciones, más precisamente al estudiar el concepto de continuidad, suele quedar en nuestra imagen conceptual la siguiente situación: en la figura I) hay un gráfico de una función que no es continua. En la figura II) hay otro de una función que sí lo es:

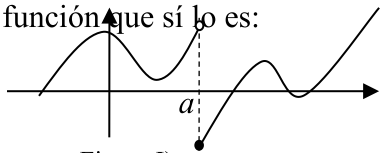


Figura I)

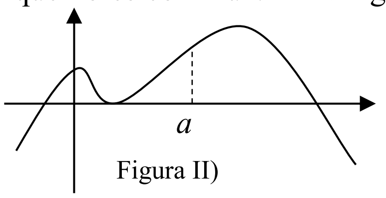
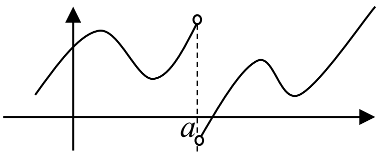


Figura II)

Si nos preguntamos por qué esto es así, la respuesta es "en la figura I) la curva que describe la función está "cortada" en $x = a$ y en la figura II) no. En este contexto, la respuesta es correcta, porque a es un elemento del dominio de estas funciones. Un problema radica en que en la imagen conceptual quede instalado que "toda función cuya gráfica está cortada es discontinua". Este es un obstáculo que se puede observar con relativa facilidad. Supongamos que a nuestros alumnos les presentamos el gráfico de la derecha y luego les preguntamos sobre continuidad de la función. Seguramente la respuesta será que no es continua, y el argumento posiblemente sea que la curva se corta en a. En este contexto la respuesta es incorrecta, y el argumento es falso,



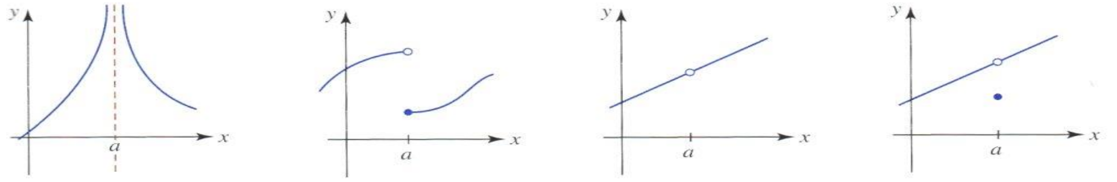
dado que para entender la continuidad, nosotros proponemos como definición que: una función es **continua en un punto *a* de su dominio** si y sólo si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Luego f **es continua** si y sólo si es continua en todo punto de su dominio. En este ejemplo, los alumnos podrían no tener en cuenta que a **no pertenece** al dominio de la función. Aquí podría considerarse como otro obstáculo el hecho de que, por lo general, los estudiantes no consideran a los conjuntos "dominio y codominio" como elementos relevantes en la definición de función.

El disparador para este estudio tiene que ver con la definición del concepto de continuidad observado en un libro de Cálculo de una Variable (y no es el único). Éste introducía el tema con el siguiente párrafo:

> En el análisis de la sección 1.1 sobre funciones y gráficas se usó la frase *estos puntos se unen con una curva suave*. Esta frase invoca la imagen que es curva continua agradable; en otras palabras una curva sin rupturas ni huecos (Zill *et al*, 2011, p. 81).

Es usual comenzar con frases de este tenor para introducir el tema de continuidad de funciones, pero debemos estar atentos de no crear un concepto equivocado. Cuando pensamos en funciones continuas, generalmente la primera idea que se nos viene a la mente son aquellas funciones que tienen como gráfico curvas que "no producen un salto", que "no se cortan", que "son suaves", etc. Es así que, a partir de la presentación del tema ya sea en los libros de texto o en el tratamiento en una clase, se puede crear en el estudiante una imagen conceptual que puede generar obstáculos para un posterior entendimiento.

En el tratamiento que posteriormente se le da en el libro de texto antes mencionado al desarrollo del concepto, se presentaron ejemplos de *funciones discontinuas* a partir de los siguientes gráficos:



a) $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe y $f(a)$ no está definida

b) $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe pero $f(a)$ está definida

c) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe pero $f(a)$ no está definida

d) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, $f(a)$ está definida, pero $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

FIGURA 2.3.1 Cuatro ejemplos de f *no* continua en a

(Zill *et al*, 2011, p. 81)

Este ejemplo genera una imagen conceptual equivocada del concepto. En los casos *b)* y *d)* estamos ante gráficas de funciones que, efectivamente, son discontinuas, sin embargo en los casos *a)* y *c)* las funciones propuestas serían continuas en todo su dominio, sin embargo la bibliografía propone que no lo son en $x = a$, siendo que en $x = a$ no se espera que se analice la continuidad por ser un punto que no pertenece al dominio de la función. En este texto se trabaja el tema de continuidad de funciones de una variable a partir de dos (por lo menos dos) atributos particulares que podrían desencadenar en un obstáculo didáctico: "las gráficas de las funciones continuas son siempre curvas suaves" y, también que una función "no es continua en un punto cuando en él no está definida".
Algunas preguntas que les podemos hacer a los alumnos para estudiar la continuidad de una función aunque la curva de su gráfica no sea arco-conexa podría ser:
I) ¿Es $f:(1,2) \to IR, f(x) = 1/x$ continua en su dominio? ¿y $f:(0,1) \to IR, f(x) = 1/x$?
Es muy posible que en ambas preguntas los alumnos respondan que sí porque el 0 no es parte del dominio de la función.
II 1) Es la función $f:(-1,5) \cup (7,12) \to IR, f(x) = 2x+1$ continua en todo su dominio?
Se espera que la respuesta sea que sí. El hecho de proponer una función polinómica se fundamenta en que los alumnos que dan sus primeros pasos en cálculo conocen que éstas no generan problemas de discontinuidad. Esto lleva a que el foco del análisis se ponga estrictamente sobre el dominio no conexo y no ya sobre la expresión que define a la función.

2) ¿ $f:(0,1) \cup (2,5) \to IR, f(x) = 1/x$ es continua en su dominio? Justificar.

III) Decidir si $f: IR - \{0\} \to IR, f(x) = 1/x$ es continua en todo su dominio. Justificar.
Se espera que los alumnos incorporen en su imagen conceptual la continuidad en un punto como una propiedad local de elementos del dominio, y concluyan que la función efectivamente es continua y que, en definitiva, el estudio de la continuidad en $x = 0$ no tiene sentido puesto que éste **no** es un valor del dominio.

Lo que se propone es una reflexión para enfocar la atención en estos conceptos al momento de planificar nuestras clases. Por más sencilla que nos parezca una actividad, puede ocurrir que movilice en el alumno una multiplicidad de acciones cognitivas que podrían entrar en contradicción: tal vez resolver un problema que involucre triángulos rectángulos no se reduzca simplemente a la resolución de la ecuación cuadrática del teorema de Pitágoras.

7. Referencias bibliográficas

Bachelard, G. (1972). *La formación del espíritu científico. Contribución al psicoanálisis del conocimiento objetivo*. Buenos Aires: Siglo XXI.

Brousseau, G (1983). Les obstacles epistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des mathématiques*. RDM 4(2), pp. 165-198.

Duval, R. (1996). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F (Ed.) Investigaciones en Matemática Educativa. México. Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 173-201.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12* 151-169.

Zill, D., Wright, W (2011). *Cálculo de una Variable. Trascendentes tempranas.* Mexico: Mc Graw Hill.