ESTUDIO DE ALGUNAS PRAXEOLOGÍAS MATEMÁTICAS PROPUESTAS PARA EL CICLO BÁSICO DE LAS CARRERAS DE INGENIERÍA EN ARGENTINA

Diana Cecilia Pozas; Marlene Alves Dias
Universidad Nacional del Comahue. Universidade Bandeirante do Brasil
dianapozas@hotmail.com , alvesdías@ig.com.br

Resumen

En esta comunicación se reportan aspectos metodológicos de un proyecto de investigación en curso. El referente teórico se sustenta en la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard; la noción de cuadro de Douady y los niveles de conocimiento que se esperan de los alumnos, de acuerdo con Robert. En la primera etapa de esta investigación se pretende describir y analizar las Organizaciones Matemáticas en torno a los sistemas de ecuaciones lineales, matrices y determinantes, presentes en los documentos oficiales para carreras de Ingeniería de las universidades públicas argentinas.

Palabras clave: Teoría Antropológica de lo Didáctico, Álgebra Lineal, Ingeniería

Abstract

In this communication methodological aspects of an ongoing research project are reported. The theoretical reference is based on the Anthropological Theory of Didactics of Chevallard; the notion of frame according to Douady and knowledge levels expected of students, according to Robert. In the first stage of this research are discussed Mathematics Organizations around systems of linear equations, matrices and determinants, present in official documents for engineering careers of Argentine public universities.

Keywords: Anthropological Theory of Didactics; Linear algebra; Engineering

1. Introducción

En los últimos años numerosas investigaciones analizan la problemática de la enseñanza y del aprendizaje de la matemática en carreras de ingeniería. (Molina, 2000; Schmal, 2012; Camarena, 2006; Bucari et al, 2007; Maguna & Okulik, 2013; Montero et al, 2002). En particular, durante las últimas décadas se han producido importantes cambios y avances en la problemática de la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal en el nivel universitario. Los trabajos de Sierpinska (2000) y de Dorier, Robert, Robinet y Rogalski (2000) dan cuenta de las dificultades para el aprendizaje de diversos conceptos del álgebra lineal debido a que ésta posee, dentro de sus orígenes epistemológicos, una componente geométrica, y una fuerte componente teórica que la enriquece, con un carácter globalizador.

Esta investigación se enmarca en una línea de trabajo relativa a la formación matemática en carreras de Ingeniería, particularmente en los dos primeros años de lo que en Argentina se denomina "ciclo básico común". Para abordar este enorme problema elegimos focalizar en la enseñanza de los siguientes conceptos: sistemas de

ecuaciones lineales en R^n, matriz y función determinante. Elegimos dichos conceptos por su reconocida importancia, ya que se articulan con otros de la matemática misma u otras materias de las carreras de Ingeniería.
Particularmente, el objeto matemático sistema de ecuaciones lineales ha sido abordado por investigadores argentinos con diversos enfoques teóricos (Panizza et al, 1999; Sessa, 2005; Engler et al, 2001; Segura, 2004; Lucuy et al, 2009) y refiriéndose, en general, a la enseñanza en la escuela secundaria. Asimismo, en varias investigaciones se reporta que en los primeros cursos universitarios los estudiantes poseen y adquieren conocimientos algebraicos pero prescinden del empleo de la geometría para analizar y correlacionar conceptos en la resolución de problemas. Con referencia a sistemas de ecuaciones lineales, los estudiantes universitarios alcanzan a dominar las técnicas de resolución pero presentan serias falencias en la comprensión y en la visualización del conjunto solución, aún en R^2.
Esta propuesta de investigación consiste en:

- describir y analizar las Organizaciones Matemáticas(OM) relativas a los sistemas de ecuaciones lineales, matrices y determinantes, presentes en los documentos oficiales para carreras de Ingeniería de las universidades públicas argentinas, y
- diseñar, implementar y evaluar una enseñanza por Actividad de Enseñanza e Investigación (AEI) que permita reconstruir OM relativas a la teoría de los sistemas de ecuaciones lineales en un curso habitual de álgebra con estudiantes de primer año de Ingeniería de la Universidad Nacional del Comahue.

2. Referencial teórico

Adoptamos como referencial teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico, en adelante, TAD (Chevallard, 1999). La TAD propone modelizar cualquier actividad humana en términos de *praxeologías*. El caso de la actividad matemática es un caso particular que llamaremos "praxeología matemática" u "organización matemática" (OM). Los elementos que forman la estructura de una OM se pueden representar como: $[T,\tau,\theta,\Theta]$. El bloque $[T,\tau]$, llamado bloque de la práctica, consta de tipos de tareas y técnicas. De forma vinculada e inseparable se encuentra el discurso razonado sobre la práctica, esto es el bloque $[\theta,\Theta]$, formado por las tecnologías y las teorías.
En el enfoque antropológico se concibe la noción de estudio en un sentido muy general e integrador. Se aplica a un ámbito más amplio que el del aula e, incluso, más general que el de las propias instituciones didácticas, abarcando desde la actividad de los investigadores hasta la que realizan los alumnos. La consideración de diversos procesos de estudio permite detectar aspectos invariantes presentes en todos ellos. La TAD propone aquí un modelo del proceso de estudio de las matemáticas en términos de momentos didácticos (Chevallard et al, 1997; Chevallard, 1999). Brevemente, diremos que se distinguen seis momentos didácticos: 1) el momento del primer encuentro con un determinado tipo de tareas; 2) el momento exploratorio del tipo de tareas; 3) el momento de construcción de un entorno tecnológico-teórico; 4) el momento del trabajo de la técnica; 5) el momento de la institucionalización, y 6) el momento de la evaluación.
Bosch y Chevallard (1999) enfatizan el hecho de que los conceptos matemáticos no son directamente accesibles a nuestros sentidos, son objetos "no ostensivos". Los no ostensivos son entonces todos aquellos objetos que existen institucionalmente, en el sentido en que se les atribuye una determinada existencia, pero que no se pueden percibir ni mostrar por sí mismos: las ideas, los conceptos, las creencias, etc. Los

objetos ostensivos se perciben porque están dotados de cierta materialidad, como las escrituras, los grafismos, los sonidos, los gestos. El enfoque antropológico atribuye a los objetos ostensivos un valor semiótico (los signos), y un valor instrumental ligado a la capacidad para integrarse en manipulaciones técnicas, tecnológicas y teóricas. Los objetos ostensivos se consideran constitutivos de las organizaciones matemáticas e ingredientes primarios de las tareas, técnicas, tecnologías y teorías.

Otro elemento teórico que tomamos para nuestro análisis es la noción de "cuadro". Douady (1992) define que un cuadro está constituido por objetos de una rama de las matemáticas, las relaciones entre dichos objetos, sus diversas formulaciones y las imágenes mentales posiblemente asociadas a esos objetos y a esas relaciones. Estos elementos juegan un rol esencial como herramientas dentro del funcionamiento del cuadro. Además es importante mencionar que esta definición permite transponer el trabajo del matemático al dominio de la didáctica por medio de la noción "cambio de cuadro", esto es, obtener diferentes formulaciones de un problema que permiten la puesta en marcha de herramientas y técnicas, que no es posible realizar dentro de la primera formulación. Para esta investigación diremos brevemente que consideramos cuatro cuadros: sistemas lineales, matrices, determinantes y geometría euclideana.

Para complementar el análisis utilizamos algunas nociones teóricas de Robert (1998) relativas a los niveles de conocimiento esperados de los estudiantes, los cuales se identifican como: Técnicos, Movilizables y Disponibles.

Nivel técnico: en la resolución de una tarea, un estudiante opera a nivel técnico cuando realiza un trabajo acotado y aislado. Este trabajo generalmente se caracteriza por la utilización de una sola técnica o por la aplicación de una definición, propiedad o teorema. El estudiante encuentra explícitamente en el enunciado de la tarea todos los elementos necesarios para su realización.

Nivel movilizante: el estudiante comienza a relacionar y a organizar saberes dentro de un mismo dominio, incluso puede aplicar varias técnicas en la resolución de la tarea, movilizando conocimientos que están explícitos en el enunciado, o que pueden ser sugeridos por el docente.

Nivel disponible: el estudiante es capaz de resolver una tarea sin indicaciones, pone en juego conocimientos que no están explícitos en el enunciado. Por ejemplo: cambiar de cuadro, utilizar ostensivos adecuados, articular diferentes nociones matemáticas, buscar contraejemplos. A este nivel de conocimiento generalmente se asocian problemas enunciados en el contexto de la vida cotidiana o aplicaciones a otras ciencias, por ejemplo, la física.

Es importante destacar que los conceptos teóricos mencionados son los que se están utilizando en la primera etapa de la investigación, concretamente en la elaboración de un instrumento de análisis, además de la elaboración de un Modelo Praxeológico de Referencia (MPR), de los cuales hablaremos en los apartados siguientes.

3. Instrumento de análisis

Conforme al plan de actividades presentado oportunamente, se comenzó con una investigación documental, desarrollada en tres etapas:

1. Relevamiento de los programas de cátedra de todas las universidades públicas argentinas que dictan carreras de ingeniería. Registro de la bibliografía utilizada en los cursos de álgebra y geometría. Selección de una muestra de libros.
2. Elaboración de un instrumento de análisis, tomando como modelo el diseñado por Días (1998).

3. Identificación de los tipos de tareas propuestas en el libro seleccionado y análisis de las mismas, aplicando el instrumento elaborado.

En relación al primer punto diremos brevemente que se seleccionaron 7 libros. En relación al segundo punto, y en consonancia con el referencial teórico mencionado, se elaboró el siguiente instrumento de análisis:

Momento didáctico en que puede ser ubicada la tarea	1) primer encuentro 2) momento exploratorio 3) construcción de un entorno tecnológico-teórico 4) trabajo de la técnica 5) institucionalización 6) evaluación.
Cuadro en que la tarea es enunciada	1) cuadro de los sistemas lineales 2) de las matrices 3) de los determinantes 4) de la geometría euclideana.
Cuadro en que la tarea es resuelta	1) cuadro de los sistemas lineales 2) de las matrices 3) de los determinantes 4) de la geometría euclideana.
No ostensivos utilizados en la tarea	
Ostensivos utilizados en la tarea	
Nivel de conocimiento esperado	1) técnico 2) movilizante 3) disponible

Figura 1: Instrumento de análisis aplicado a diversas tareas propuestas en el libro de David Poole

En relación al punto 3, podemos mencionar que se aplicó el instrumento al libro de Poole D. (2011) *Álgebra lineal. Una introducción moderna.* Tercera edición. Cengage Learning Editores: México DF. Este instrumento nos permitió identificar, ordenar y caracterizar las praxeologías en torno a las nociones de sistemas de ecuaciones lineales, matrices y determinantes, vía la noción "género de tareas". Identificamos los tipos de tareas que engloba el género "calcular" como el género privilegiado. En función de los objetivos del autor, este libro parece ser más indicado para cursos en que el álgebra es trabajada como herramienta explícita para el desarrollo de conceptos y nociones de otras ciencias.

4. Modelo Praxeológico de Referencia

Con el objetivo de interpretar adecuadamente las OM en cuestión consideramos la elaboración de un MPR que debería expresarse en términos de praxeologías y de cuestiones problemáticas a las cuales estas praxeologías aportan respuestas parciales y progresivas (Parra; Otero y Fanaro, 2009; Otero et al, 2013).

Desde la TAD se plantea la necesidad del investigador de elaborar sus propios modelos praxeológicos de referencia cuando aborda el análisis de procesos transpositivos, en particular, puede ser de gran utilidad para el análisis de textos escolares.

En esta comunicación presentamos un MPR (ver Anexo) el cual debe considerarse como una hipótesis de trabajo, siempre provisional, que deberá contrastarse con los datos empíricos.

La cuestión generatriz Q_0 que orienta este primer MPR es la siguiente:

Q_0: ¿cómo estudiar las nociones de matriz, determinante y sistema de ecuaciones lineales en un curso de álgebra lineal para ingeniería?

De esta cuestión generatriz derivamos un conjunto de cuestiones derivadas que claramente generan tres organizaciones (o praxeologías) matemáticas que llamaremos: OM_1: Matrices, OM_2: Determinantes y OM_3: Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Cada OM tiene una pregunta asociada que formulamos de la siguiente manera:

Q_1: ¿qué tipos de tareas y cuáles técnicas favorecen el manejo fluido de la operatoria con matrices?
Q_2: ¿qué tipos de tareas y cuáles técnicas favorecen la articulación de los determinantes con la geometría, la física y el análisis matemático?
Q_3: ¿qué tipos de tareas y cuáles técnicas favorecen el trabajo con sistemas de ecuaciones lineales relacionándolo con la noción de rango?
En el MPR mencionamos una cantidad mínima de tipos de tareas que responden a las cuestiones derivadas, y ciertamente, es necesaria una explicación detallada de los vínculos existentes entre las praxeologías que lo componen. Pero nuestro objetivo, por el momento es que este modelo ayude y complemente el estudio de las OM que proponen enseñar diferentes autores de los libros de texto para cursos de álgebra universitarios.

5. Perspectivas

Este estudio se está realizando sobre una muestra de libros, e intenta proporcionar una visión general del trabajo que se puede estar desarrollando en la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos de sistemas de ecuaciones lineales, matrices y determinantes en la educación superior. Asimismo, sirve como base para la segunda etapa de esta investigación que consiste en diseñar, implementar y evaluar una Actividad de Estudio e Investigación (AEI) para el estudio de los conceptos mencionados en carreras de Ingeniería.

6. Referencias

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathematique aux ostensifs. Objet d'étude et de problematique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19(1), 77-124.
Bucari N., Abate, S., Melgarejo A., Guardarucci M.T., Vacchino C. (2007). Innovación en la enseñanza de las matemáticas en carreras de Ingeniería, evaluación y perspectivas. Actas del XXI Congreso Chileno de Educación en Ingeniería, Santiago de Chile.
Camarena, P. (2006). La matemática en el contexto de las ciencias en los retos educativos del siglo XXI*, Científica*, 10(4), 167-173.
Chevallard, Y. (1999). L'analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 19 (2), 221-266. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions. Traducción de Ricardo Barroso Campos. Universidad de Sevilla.
Douady, R. (1984) Jeux de cadre et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques. Tesis doctoral. Université Dennis Diderot. Francia.
Dias, M. (1998) Les problèmes d'articulation entre points de vue cartésien et paramétrique dans l'enseignement de l'algèbre linéaire. Tesis doctoral. Paris: IREM Paris 7
Dorier, J., Robert, A., Robinet , R. & Rogalski, M. (2000). The Obstacle of Formalism in Linear Algebra. En J.-L. Dorier (Ed), On the Teaching of Linear Algebra. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
Engler, A.; Müller, D.; Hecklein, L. & Cadoche, L. (2001) Propuesta didáctica para estudiar sistemas de ecuaciones lineales. Sondeo de opiniones. Revista Educación Matemática, 13(2), 127-139

Lucuy, F.; Dodera, M.G. & Ponce, L. (2009). Un enfoque para la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en el primer ciclo universitario. *Revista Premisa, SOAREM,* 11(41), 42-50.

Maguna, F. & Okulik, N. (2013) Acceso a la Universidad: el caso de Ingeniería. *Revista Argentina de Enseñanza de la Ingeniería,* 2(5), 51-59.

Molina, A. (2000). Problemática actual de la enseñanza de la ingeniería: una alternativa para su solución. *Ingenierías*, 2(3), 10-15.

Montero J., Martínez E. & Morán J. (2002) ALGTEC: Un complemento a la enseñanza del álgebra lineal en carreras de ingeniería de telecomunicaciones. *Virtual Educa, OEA.*

Otero, M.R.; Fanaro, M.; Corica, A.; Llanos, V.; Sureda, P. & Parra, V. (2013) La Teoría Antropológica de lo Didáctico en el Aula de Matemática. Buenos Aires: Dunken.

Panizza, M., Sadovsky, P. & Sessa, C. (1999) Ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las ciencias*, 17 (3), 453–461.

Parra, V.; Otero, M.R. & Fanaro, M. (2009) Reconstrucción de una Organización Matemática de referencia para el estudio del límite y la continuidad de funciones en la Universidad. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias* 4 (2), 39-47.

Robert, A. (1998) Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 18(2), 139-190.

Schmal, R. (2012) Reflexiones en torno a un programa para la formación de competencias transversales en ingeniería. *Ciencia, Docencia y Tecnología*, 23(44), 239-262.

Segura, S. (2004) Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 7(1), 49-78.

Sessa, C. (2005) Iniciación al estudio didáctico del álgebra: orígenes y perspectivas. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Sierpinska, A. (2000) On some aspects of students thinking in linear algebra. En J–L. Dorier (Ed.) *On the Teaching of Linear Algebra* Dortrecht: Kluwer Academic Publishers.

Anexo: Modelo (inicial) Praxeológico de Referencia

Q_0: ¿cómo estudiar las nociones de matriz, determinante y sistema de ecuaciones lineales en un curso de álgebra lineal para ingeniería?

Q_1: ¿qué tipos de tareas y cuáles técnicas favorecen el manejo fluido de la operatoria con matrices?

OM_1

- T_1 Operar con matrices (suma, producto, producto por un escalar, potenciación)
- T_2 Hallar contraejemplos para proposiciones falsas relativas a las operaciones con matrices
- T_3 Resolver ecuaciones matriciales lineales y no lineales
- T_4 Operar con distintos tipos de matrices (simétrica, traspuesta, escalar, diagonal, particionada)
- T_5 Determinar el rango de una matriz
- T_6 Calcular la inversa de una matriz, por el método de Gauss-Jordan y por el método de la adjunta

Q_2: ¿qué tipos de tareas y cuáles técnicas favorecen la articulación de los determinantes con la geometría, la física y el análisis matemático?

OM_2

- T_7 Calcular determinantes usando: expansión por cofactores, operaciones elementales, por inspección (usando propiedades), la regla de Cramer, la regla de Sarrus
- T_8 Hallar contraejemplos para proposiciones falsas relativas a las operaciones con determinantes
- T_9 Calcular el producto cruz (producto vectorial) de dos vectores

Q_3: ¿qué tipos de tareas y cuáles técnicas favorecen el trabajo con sistemas de ecuaciones lineales y su relación con la noción de rango?

OM_3

- T_{10} Resolver un sistema lineal mediante el método de Gauss-Jordan
- T_{11} Resolver sistemas lineales con presencia de parámetros
- T_{12} Graficar rectas y planos con sus posibles intersecciones
- T_{13} Resolver sistemas de ecuaciones lineales aplicando métodos numéricos