MC-173

HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS Y FORMACIÓN DOCENTE: EL CASO DE LA COMPLETUD DE LOS NÚMEROS REALES

Luis Carlos Arboleda
luis.carlos.arboleda@gmail.com
Universidad del Valle, Colombia

Núcleo temático: Formación de profesorado en matemáticas
Modalidad: MC
Nivel educativo: Universidad
Palabras clave: Historia de las matemáticas, Formación de profesorado, enseñanza de los números reales

Resumen

En una primera parte se fijan algunos presupuestos de la filosofía de la práctica matemática que orientan nuestra propuesta de apropiación de la historia en la educación matemática. Se trata de problemáticas relacionadas con la búsqueda de objetividad matemática y los procesos de constitución de los objetos matemáticos en tanto actividades especializadas de individuos que, enfrentados a la explicación de determinados problemas, movilizan actos de razonamiento de determinada naturaleza. En una segunda parte se presenta un estudio semiótico del teorema de la completitud de los números reales como ilustración de las condiciones bajo las cuales una historia especifica de las matemáticas universitarias puede ser utilizada como recurso pedagógico en la enseñanza. Para ello nos centraremos en una discusión detallada de la prueba del teorema que se encuentra en (Hairer & Wanner, 1996).

Introducción

El estudio de la naturaleza de la práctica matemática, le permiten al docente “domesticar” la presentación formal de la teoría de acuerdo con las necesidades de la enseñanza, en la medida en que toma conciencia, por ejemplo, del papel desempeñado por la intuición en los actos de pensamiento formal. Así mismo, cuando es capaz de entender la relación existente entre la constitución de los nuevos objetos con la búsqueda de solución a determinados problemas, y puede aclararse la naturaleza de los procesos a través de los cuales estos nuevos objetos que emergen con la solución, se convierten en objetos de estudio y se legitiman en su respectivo campo teórico.

Examinemos desde esta perspectiva la extensión del cuerpo Q de los racionales que, como se sabe, estuvo asociada históricamente a la necesidad de resolver el problema de llenar las lagunas operatorias (no metafísicas) de Q, una de naturaleza algebraica (Q no es cerrado por la operación “raíz cuadrada”) y otra de naturaleza topológica (Q no es cerrado por la

ISBN 978-84-945722-3-4

operación de “paso al límite”). En la solución se utilizan procedimientos operatorios bien definidos, de tal manera que se obtiene a R como extensión de Q a partir de las propiedades de la estructura de Q. El nuevo objeto R adquiere entonces una realidad independiente de las circunstancias en que fue introducido.

Objetivación de procedimientos operatorios en la contrucción del cuerpo R de los reales

La extensión del nivel de existencia del cuerpo ordenado Q al nivel superior de existencia del cuerpo R, ordenado arquimediano y completo, puede entenderse como construcción de la nueva entidad por medio de las propiedades de la estructura del dominio anterior. Desanti (1968) ha llamado la atención sobre la necesidad de clarificar la naturaleza de esta construcción. En primer lugar, se verifica la invarianza del principio de identidad en la extensión para garantizar la equivalencia de las operaciones entre sucesiones y entre reales, de acuerdo con la presentación de (Hairer &Wanner, 1995). Sean $\{s_n\}$ y $\{v_n\}$ dos sucesiones de Cauchy. Ellas son *equivalentes* si $\lim\limits_{x\to\infty}(s_n - v_n) = 0,$ es decir, si

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists N \geq 1 \ \ \forall n > N \ \ |s_n - v_n| < \varepsilon.$$

Esta propiedad se designa por $\{s_n\}-\{v_n\},$ y se puede demostrar que define una relación de equivalencia sobre el conjunto de las sucesiones de Cauchy de racionales. Es decir,

$$\{s_n\} \sim \{s_n\} \ \text{(reflexiva)}$$

$$\{s_n\} \sim \{v_n\} \ \Rightarrow \ \{v_n\} \sim \{s_n\} \ \text{(simétrica)}$$

$$\{s_n\} \sim \{v_n\}, \ \{v_n\} \sim \{w_n\} \Rightarrow \ \{s_n\} \sim \{w_n\} \ \text{(transitiva)}.$$

Es posible establecer una partición del conjunto de sucesiones de Cauchy de racionales en *clases de equivalencia,*

$$\overline{\{s_n\}} = \left\{\{v_n\} \mid \{v_n\} \text{ es una sucesión de Cauchy de racionales y } \{v_n\} \sim \{s_n\}\right\}.$$

Los elementos de las clases de equivalencia se llaman *representantes.*

Definimos entonces a los *números reales* como representantes de clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy de racionales. Es decir,

$$\mathrm{R} = \left\{\overline{\{s_n\}} \,\middle|\, \{s_n\} \text{ es una sucesión de Cauchy de racionales y } \{v_n\} \sim \{s_n\}\right\}.$$

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

El conjunto Q de los números racionales puede interpretarse como subconjunto de R en el siguiente sentido: si r es un elemento de Q (r $\in$ Q), la sucesión constante $\{r, r, r, \ldots\}$ es una sucesión de Cauchy de racionales. El número racional r se identifica entonces con el número real $\overline{\{r, r, r, \ldots\}}$.

En segundo lugar, se precisa verificar que las operaciones de la estructura de cuerpo de R se definen a partir de las correspondientes operaciones del sistema de sucesiones convergentes de racionales. Aquí es pertinente tener en cuenta la importante observación de Desanti sobre el hecho de que en la extensión se piensa a Q como un "objeto ideal". (Arboleda, 2007). Esto significa que en cierto momento de la construcción, la representación familiar de la estructura "precedente" de Q (por ejemplo, como sistema de parejas ordenadas (a,b) de enteros), se reemplaza por la presencia de Q como una entidad dentro del sistema de sucesiones convergentes. Como idealidad matemática, Q participa de la realidad de R: cumple algunas de las leyes de la estructura de R. De hecho Q es un subcuerpo ordenado de R.

Entonces, para poder trabajar en el dominio operatorio de R se requiere definir las operaciones usuales a partir del sistema de sucesiones convergentes. Sean $s = \overline{\{s_n\}}$ y $v = \overline{\{v_n\}}$ dos números reales. Definimos su suma (diferencia), producto (cociente) por

$$s + v := \overline{\{s_n + v_n\}},\ \ \mathrm{s} \cdot v = \overline{\{s_n \cdot v_n\}}.$$

En tercer lugar, se requiere interpretar la relación de orden en R en función del orden de Q. Sean $s = \overline{\{s_n\}}$ y $v = \overline{\{v_n\}}$ dos números reales. Definimos:

$$\begin{aligned} s < v \ &:\Leftrightarrow\ \exists \varepsilon' > 0\ \exists M \geq 1\ \forall m \geq M \quad s_m \leq v_m - \varepsilon', \\ s \leq v \ &:\Leftrightarrow\ s < v \ \text{ o } \ s = v. \end{aligned}$$

Se puede demostrar que el orden $\leq$ es *total*; es decir, que para todo par de reales s y v tales que $s \neq v$ tenemos s $< v$ o $v < s$. Con base en lo anterior y mediante la definición usual del valor absoluto de un número s, obtenemos la siguiente definición del valor absoluto de un real:

$$|s| = \overline{\{|s_n|\}} \quad \text{para} \quad s = \overline{\{s_n\}}.$$

Para acabar de clarificar la naturaleza de la construcción que permite dar cuenta de la realidad del nuevo dominio R por sucesivas y graduales "tematizaciones" a partir de las condiciones que posibilita la estructura del dominio anterior Q, falta aún evidenciar una modalidad

ISBN 978-84-945722-3-4

plausible de la operación que permite "completar" a Q en R. Desanti (1968) recuerda el procedimiento de la construcción histórica de los reales de Cantor.

Sea R^* el sistema que completa a Q. R^* está conformado por todas las sucesiones de Cauchy extraídas de Q. Cantor construye el sistema R^* con el fin de identificar las condiciones para que las sucesiones de Cauchy converjan a un límite único en R^*. Un aspecto significativo en este proceso es que "los objetos que pertenecen al sistema R^*, tales que toda sucesión de Cauchy converge a un límite único en R^*, se pueden componer entre sí y con los objetos que pertenecen a Q de acuerdo con las mismas leyes".

Conviene pues, examinar la teoría formalizada del análisis real para descubrir en la prueba de un teorema clásico de *completez* o completitud, la manera en que tales procedimientos históricos han quedado objetivados. Los aspectos esenciales de la construcción histórica de la completez estarían objetivados en los procedimientos y técnicas empleados en la demostración de un teorema fundamental para la constitución del concepto teórico (Hairer & Wanner, 1996) (Stillwell, 2013):

Una sucesión $\{s_n\}$ *de números reales es convergente (con un número real como límite) si y solo si es una sucesión de Cauchy.*

Es interesante tener en cuenta que una de las primeras demostraciones de la completez de R por sucesiones de Cauchy, aparece en un texto de enseñanza de la teoría de funciones (Hobson, 1907)). También se demuestra allí por primera vez la equivalencia de las representaciones de R de Dedekind y Cantor.

Relaciones entre demostración y diagrama en la prueba del teorema de la completez

La demostración de que toda sucesión convergente es de Cauchy, es inmediata. Lo verdaderamente interesante para nuestros propósitos es demostrar el converso. Sea $\{s_i\}$ una sucesión de Cauchy de números reales, tal que cada uno de los s_i es una clase de equivalencia de sucesiones de Cauchy de racionales; es decir, $s_i = \overline{\{s_{in}\}}_{n\geq 1}$.

La idea es escoger para cada *i* un número cada vez más pequeño (por ejemplo $1/2i$) y aplicar la definición de la sucesión de Cauchy de racionales para obtener que

$$\exists N_i \geq 1 \; \forall n \geq N_i \; \forall k \geq 1 \; \left|s_{in} - s_{i,n+k}\right| < \frac{1}{2i}.$$

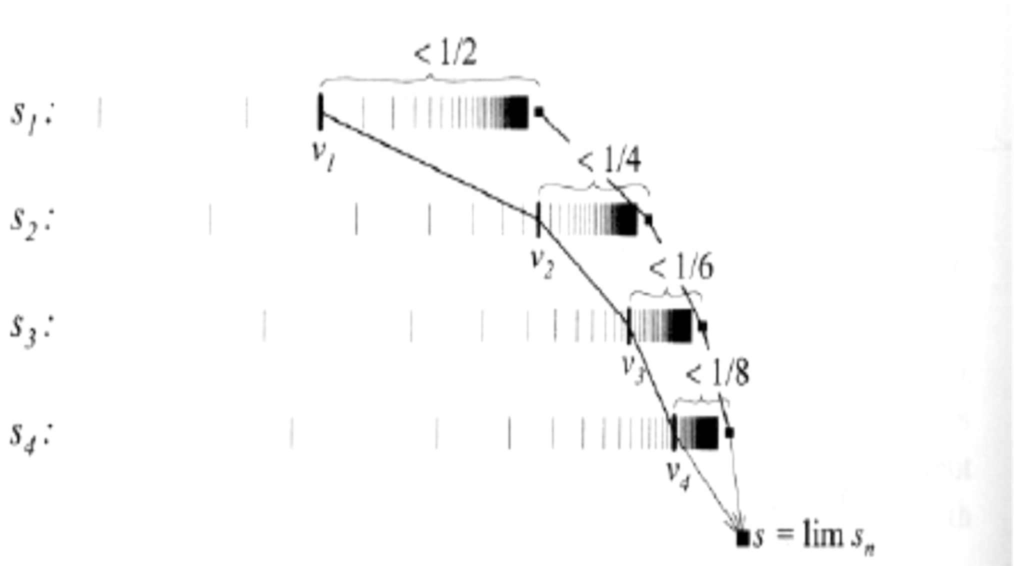
Luego hacemos $v_i := s_{i,N_i}$ y consideramos la sucesión de racionales $\{v_i\}$.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Esta idea expresa en términos formales una intuición que va a jugar el papel central en la cadena deductiva de la prueba. Consiste en introducir una nueva sucesión $\{v_i\}$ a partir de los términos de la sucesión $\{s_i\}$ de números reales. El artificio que objetiva a $\{v_i\}$ tiene en cuenta varias consideraciones. En primer lugar, que cada uno de los términos de $\{s_i\}$ es representante de una sucesión de Cauchy de racionales. En segundo lugar, una técnica de indexación como medio para generar cada v_i en la expansión del correspondiente s_i, para lo cual se aprovecha la propiedad de $\{s_i\}$ de ser sucesión de Cauchy. Y, por último, mostrar que la sucesión $\{v_i\}$ que emerge de esta manera en el entramado de los s_i, es una sucesión de Cauchy de racionales y, según toda evidencia, su representante es el límite de la sucesión $\{s_i\}$.

El artificio se legitima en esta instancia intuitiva de la prueba en el diagrama siguiente, en el cual se observa el comportamiento de estos tres procedimientos en un arreglo figural. En la representación dinámica de las sucesiones en sus respectivos registros se distingue la diagonal de los v_i apuntando al límite que le confiere a la idea de la prueba su sustentación. Más adelante veremos que lo anterior se entiende como que existe un isomorfismo entre el diagrama y la estructura formal de la prueba. Primero veamos en qué consiste esta última.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



Fuente (Hairer and Wanner, 1995)

El argumento formal de la prueba se desarrolla en tres pasos:

a) $|v_i - s_i| < \frac{1}{i}$. b) $\{v_i\}$ es una sucesión de Cauchy de racionales. c) $s_i \to s$.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Veamos.

a) Probemos que $|v_i - s_i| < \frac{1}{i}$.

El número real $|v_i - s_i|$ está representado por la sucesión de Cauchy de racionales $\{|v_i - s_{im}|\}_{m\geq 1}$.

Como para $m \geq N_i$,

$$|v_i - s_{im}| = |s_{i,N_i} - s_{im}| < \frac{1}{2i} = \frac{1}{i} - \frac{1}{2i},$$

y según el orden de los reales, para un $\varepsilon' = 1/2i$, se deduce que $|v_i - s_i| < 1/i$.

b) Probemos ahora que $\{v_i\}$ es una sucesión de Cauchy de racionales.

Como el valor de $|v_i - v_{i+k}|$ no cambia independientemente de que esta cantidad sea un número racional o real, tenemos que

$$\begin{aligned} |v_i - v_{i+k}| &= |v_i - s_i + s_i - s_{i+k} + s_{i+k} - v_{i+k}| \\ &\leq |v_i - s_i| + |s_i - s_{i+k}| + |s_{i+k} - v_{i+k}| < \frac{1}{i} + \varepsilon + \frac{i}{i+k} < 2\varepsilon \end{aligned}$$

para un *i* suficientemente grande y un $k \geq 1$.

La clase de equivalencia de $\{v_n\}$ representada como $s := \overline{\{v_n\}}$, es el candidato para el límite de $\{s_i\}$.

De la desigualdad anterior se deduce que $|v_i - s| < 3\varepsilon$ (para un *i* suficientemente grande), y de allí se concluye que $v_i \to s$.

c) Probemos por último que $s_i \to s$.

Como consecuencia de las partes a) y b) de la prueba y de la desigualdad del triángulo, se deduce que

$$|s_i - s| \leq |s_i - v_i| + |v_i - s| < \frac{1}{i} + 3\varepsilon < 4\varepsilon$$

para un *i* suficientemente grande. Con lo cual $s_i \to s$.

ISBN 978-84-945722-3-4

Así se obtiene la demostración del teorema de la completez.

Ahora podemos retornar al diagrama y verificar la consistencia de sus procedimientos con el formalismo de la prueba. Vemos que existe una estrecha relación entre el principio de identidad de las representaciones en el diagrama y el principio de identidad de los objetos matemáticos representados. El principio lógico $A = A$ se verifica en el diagrama y en la demostración. En uno y otro caso una cosa no puede ser y no ser al mismo tiempo. A no puede tener dos significados diferentes en el sistema formal ni en el sistema figural de representación. Existe una manera categorial de entender el principio de identidad que garantiza que ambos sistemas de representación son isomorfos. O si se quiere, hay una invarianza entre los razonamientos sobre la figura y los argumentos formales. Con lo cual se abandona todo dualismo ontológico, ya que se trata de dos maneras diferentes de ver una misma realidad matemática. Anotemos que estas ideas son analizadas en (Panza, 2012) para el caso de la relación entre los objetos de la geometría euclidiana del plano y los diagramas que los representan.

Es posible distinguir tres aspectos de la función de prueba por visualización. (Alunni, 2004). El diagrama asegura de una parte la síntesis figurativa de los conceptos empleados en el razonamiento de la prueba. Si volvemos al diagrama matricial de la prueba de la completitud, observamos que el arreglo matricial se presenta como una red compactificada de conceptos relativos a sucesiones de Cauchy de números racionales y reales, en un sentido similar a como opera la coordinación de representaciones de un mismo objeto matemático en diferentes registros semióticos. (Duval, 1999).

Según su disposición, el diagrama funciona como memoria de anticipación estableciendo un acuerdo entre medios y fines de la prueba. Esto puede interpretarse en la teoría de las representaciones semióticas como el momento de convergencia de registros en la red. El último aspecto de la visualización tiene que ver con la imaginación creadora; el diagrama es un dispositivo que moviliza las operaciones en la práctica y las direcciona hacia la demostración del teorema. Esto puede entenderse como que la convergencia de registros en la red posibilita la integración de actividades cognitivas y las orienta a la aprehensión del objeto. En términos de Duval (1999), no hay noesis (aprehensión cognitiva de objeto) sin semiósis (aprehensión de red de registros).

A manera de conclusión

ISBN 978-84-945722-3-4

En las páginas anteriores se ha ilustrado una propuesta de apropiación de la historia en la enseñanza, a través de un procedimiento heurístico de prueba inspirado en la práctica matemática de demostración formal del teorema de la completez. Para el docente interesado sobre todo en el diseño de estrategias para la enseñanza de este teorema en el aula de clase, esta explicación histórica apenas sería un caso de transposición didáctica *externa*. (Chevallard, 1985).

El docente ha tomado conciencia de ciertos criterios a establecer entre la demostración del teorema y su correspondiente interpretación diagramática, que le permiten "domesticar" la presentación formal del teorema y tal vez orientarla en una dirección pertinente para su enseñanza en el aula. Partiendo de un saber *sabio*, se lo ha organizado en un texto de saber *a enseñar*. En la fase del saber enseñado, se aspira que el docente que se apoye en este estudio, esté en mejores condiciones para desarrollar una práctica didáctica creativa de enseñanza y aprendizaje de la demostración. Para ello tendrá que reelaborar el texto en una transposición *interna* que tenga en cuenta además, las variables relativas a esta práctica. (Bergé, 2008).

Bibliografía

Alunni, Ch. (2004). Diagrammes et Catégories comme prolégomènes à la question: Qu'est-ce que s'orienter diagrammatiquement dans la pensée ?. En Nöelle Batt (ed.). *Penser par le diagramme de Gilles Deleuze à Gilles Châtelet*. Saint-Denis: Presses Universitaires de Vincennes, 83-93. (Théorie-Littérature-Enseignement).

Arboleda, L. C. (1984). Historia y Enseñanza de las Matemáticas. *Quipu. Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología.* 1(2); *194-167.*

Arboleda, L. C. (2007). Modalidades constructivas y objetivación del cuerpo de los reales. Revista Brasileira de História da Matemática. Especial nº 1-Festschrift Ubiratan D'Ambrosio, 215-230.

Bergé, A. (2008). The completeness property of the set of real numbers in the transition from calculus to analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 217-235.

Chevallard, Y. (1985). *La Transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage. (Recherches en didactique des mathématiques).

Desanti J.-T. (1968). *Les idéalités mathématiques*. Paris: Seuil.

Duval, R. (1999). *Semiósis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle, Grupo de Educación Matemática

ISBN 978-84-945722-3-4

Hainer, E. and Wanner, G. (1995). *Analysis by Its History*. New York: Springer.

Hobson, E. W. (1907). *The Theory of Functions on a Real Variable and the Theory of Fourier's series*. Cambridge: Cambridge University Press.

Panza, M. (2012). The twofold role of diagrams in Euclid's plane geometry. *Synthese*, 186(1), 55-102.

Stillwell, J. (2013). *The Real Numbers. An Introduction to Set Theory and Analysis*. New York: Springer.

ISBN 978-84-945722-3-4