

USAR EL GEOGEBRA PARA EL ESTUDIO DE FUNCIONES COMPLEJAS

Ana Maria d'Azevedo Breda, José Manuel Dos Santos Dos Santos
Universidade de Aveiro, Instituto GeoGebra Portugal
ambreda@ua.pt , dossantosdossantos@gmail.com

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.

Modalidad: Mini Curso MC

Nivel educativo: Universitario y Bachillerato

Palabras clave: Funciones complejas, GeoGebra, TIC

Resumen

El objetivo de este mini curso es presentar algunas de las estrategias estudiadas para utilizar GeoGebra en el análisis de funciones complejas. Las tareas propuestas se centran en algunos temas de análisis compleja, uno de los objetivos para los estudiantes de primer año de educación superior, que se pueden adaptar fácilmente a los estudiantes pre-universitarios. En la primera parte de este mini curso vamos a ilustrar cómo usar las dos vistas gráficas de GeoGebra para representar funciones complejas de variables complejas. La segunda parte presentará el uso del color dinámico Geogebra para obtener dominios coloreados que correspondan a la representación gráfica de funciones complejas. Finalmente, usaremos la vista gráfica tridimensional en GeoGebra para estudiar las funciones componentes de una función compleja. Durante el mini curso se proporcionarán guiones de orientación de las diferentes tareas propuestas para ser realizadas en computadoras con Geogebra.

INTRODUCCIÓN

En este mini curso nos proponemos llevar a los participantes a reconocer cómo y por qué el uso de las tareas presentadas son una más valía para la comprensión y el aprendizaje del contenido matemático asociado, o sea, el estudio de las funciones complejas. Las tareas propuestas a los participantes son las mismas que aquellas diseñadas para estudiantes de primer año de cursos de ingeniería y ciencias que pueden y deben ser utilizadas como una herramienta educativa en entornos de aprendizaje colaborativo. La principal ventaja en su uso en términos individuales es la promoción del razonamiento deductivo (conjetura / prueba). Las aplicaciones aquí presentadas pueden suscitar exploraciones en los diferentes

grados de enseñanza superior, pues permiten usos más o menos profundizados. A modo de ejemplo, se puede utilizar para ilustrar el Teorema Fundamental de Álgebra para estudiantes pre-universitarios. Estas aplicaciones pueden ser vistas como un paso intermedio para visualizar y comprender la Transformación de Möbius y su relación con movimientos rígidos de la Esfera Riemanniana. Además del tiempo requerido para las tareas también se prevé tener un tiempo extra para intercambiar ideas sobre el impacto de este tipo de trabajo con estudiantes de diferentes grados educativos e comentar algunos vídeos resultado de aplicación en el aula (fig.1).

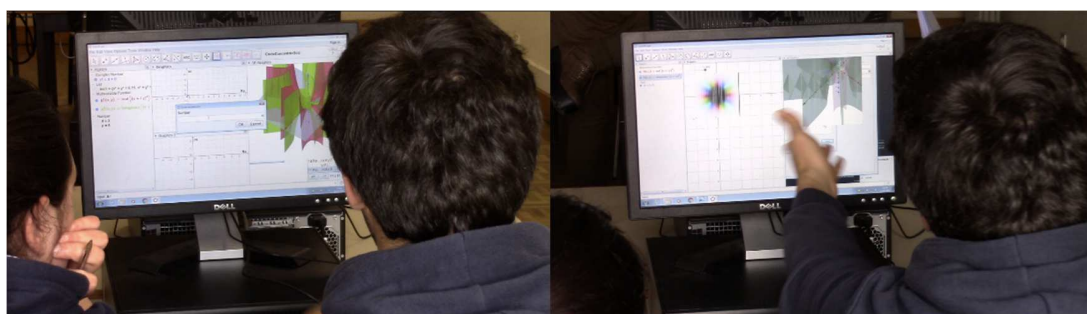


Figura 1. Estudiantes que usan las aplicaciones de GeoGebra en aula.

VISTAS GRÁFICAS Y REPRESENTACIÓN DE DOS MENSIONES DE LAS FUNCIONES COMPLEJAS

Las múltiples vistas de GeoGebra pueden ser utilizadas simultáneamente para proporcionar un entorno computacional que interactúa con dos representaciones cartesianas, estas dos vistas GeoGebra son un modelo excelente para el dominio y co-dominio de una función compleja (Breda, A., Trocadero, A., & Dos Santos, J., 2013). En esta sesión se propondrán varias tareas que implicarán la representación de: a) puntos en el plano complejo, en una vista gráfica, y la imagen de estos puntos por una función compleja, en la segunda vista gráfica; B) puntos en ciertos subconjuntos del plano complejo analizando las imágenes de estos subconjuntos por una función compleja, en la segunda vista gráfica, usando el comando “locus” y la función “trazo” de un punto; C) la utilización de nuevas herramientas y comandos para crear rejillas en la representación de puntos del dominio a una función compleja analizando sus imágenes por una función compleja.



Tool image:

Tool name:

EccentricityConcentricGird

Command name:

ECgird

n=Slider[1, 10, 1, 1,100, false, true, false, false]

P=1+i

d=Slider[0, 4, 0.1, 1,100, false, true, false, false]

EC={Circle[P,d],Sequence[(x - real(P))² / (i d / n)² + (y - imaginary(P))² / (1 - 1 / (i d / n)²) = 1, i, 0, n, 1]}

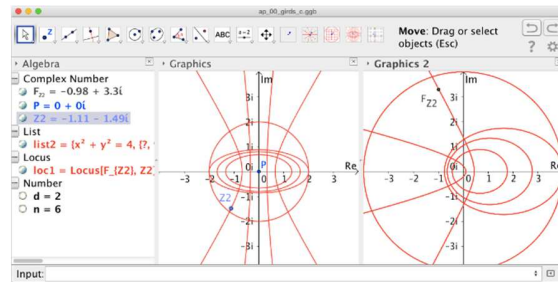


Figura 2. Subconjunto de números complejos y su imagen por función $f:C \rightarrow C, f(z)=z^2$.

La figura 2 muestra el código de GeoGebra que nos permite obtener puntos en el plano complejo de una familia de cónicas, representada en la vista gráfica, así como la representación de la imagen de estos puntos por una función compleja, esta segunda representación, en la vista gráfica 2 de GeoGebra.

Colores dinámicos, dominios coloreados en la representación del gráfico de una función compleja en Geogebra

El uso de colores dinámicos asociados a un punto permitió a Rafael Losada (2009) y Antonio Ribeiro obtener las primeras representaciones de imágenes fractales con números complejos (Breda, et al, 2013, p.63). Posteriormente, el potencial del color dinámico GeoGebra llevó a Breda y Dos Santos (2013) a aplicarlos para obtener dominios de color en la representación gráfica de funciones compleja de variable compleja. (Breda et al, 2013, p.78).

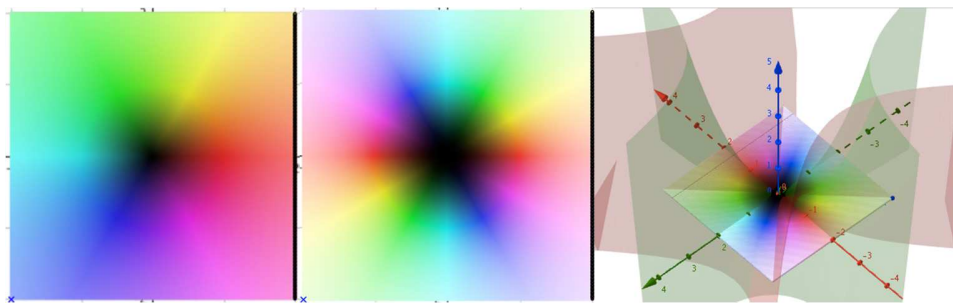


Figura 3. Dominio coloreado: función de identidad, $f(z)=z^2, z \in C$, y gráficas de las funciones componentes de f .

En este mini curso se presentarán dos tareas esenciales para los dominios coloreados del plano complejo. La primera tarea indica la estrategia para construir un escáner del plano con GeoGebra, el segundo ajustar el escáner de plano, desarrollado en la primera tarea, para obtener el dominio coloreado asociado a la representación gráfica de una función compleja, como se puede observar dos ejemplos de las dos imágenes, a la izquierda, de la Figura 3.

Vista gráfica 3D para la representación gráfica de los componentes de una función compleja de variable compleja

En GeoGebra, las diversas propiedades de los objetos pueden comunicar entre diferentes vistas y después de la versión 5.0 hay una vista tridimensional, por lo que podemos obtener la representación gráfica de cada componente de una función compleja. Así, las últimas tareas de este mini curso estarán dirigidas a la representación gráfica de las representaciones gráficas de las componentes de una función compleja, así como al análisis de algunas de sus propiedades. Podemos mostrar simultáneamente varias representaciones gráficas (véase la tercera imagen, la derecha de la figura 3) que contribuyen a mejorar la visualización de diferentes propiedades asociadas a una función compleja. Además, se presentará una muestra de dominios coloreados aplicada en la esfera de Riemann para estudiar las transformaciones de Möbius (Breda, A., & Dos Santos, J., 2015).

REFERENCIAS

- Breda, A., Trocado, A., & Santos, J. (2013). O GeoGebra para além da segunda dimensão. *Indagatio Didactica*, 5(1). Obtenido de: <http://revistas.ua.pt/index.php/ID/article/view/2421>, accedido en 15/02/2015. ISSN: 1647-3582
- Breda, A., & Santos, J. (2015). The Riemann Sphere in GeoGebra. *Sensos-e*, 2(1). Obtenido de: <http://sensos-e.esi.ipp.pt/?p=7997>, accedido en 14/06/2015. ISSN 2183-1432.
- Farris, F. *Visualizing Complex-valued Functions in the Plane* (1997). Obtenido de: http://www.maa.org/pubs/amm_complements/complex.html, accedido en 15/02/2015.