MC-19

IDENTIFICACIÓN DE NIVELES DE RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ELEMENTAL QUE EXIGEN TAREAS SOBRE FUNCIONES Y ESTRUCTURAS PRESENTES EN TEXTOS DIDÁCTICOS

Cecilia Gaita
cgaita@pucp.edu.pe
Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú

Núcleo temático: Formación del profesorado en Matemáticas
Modalidad: MC
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: razonamiento algebraico, modelo CDM

Resumen
Partimos de la necesidad de que los docentes de matemáticas tengan conocimientos sobre álgebra y sobre el desarrollo del razonamiento algebraico de modo que durante su práctica sean capaces de generar situaciones de enseñanza que les permitan identificar el nivel de razonamiento en el que se encuentran sus estudiantes; ello, con la intención de hacer que estos evolucionen de un nivel inferior a uno superior. Tomando como base el modelo de conocimiento didáctico matemático desarrollado en el marco del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos, se presentan ejemplos de tareas sobre funciones y estructuras que aparecen en los textos oficiales de la educación básica en el Perú; se identifican diversas soluciones que estas podrían admitir, para luego discutir los rasgos del razonamiento algebraico elemental presentes en ellas. En ese proceso se hace explícita la faceta epistémica, componente asociada al conocimiento didáctico matemático en relación al álgebra, que debe tener un profesor de matemáticas en la educación básica.

Introducción

En la formación inicial de profesores de matemáticas se desarrollan contenidos matemáticos específicos, los que se ponen en juego al realizar una tarea matemática; esto forma parte del denominado conocimiento común. Sin embargo, en esa etapa no se contemplan asignaturas en las que el futuro profesor desarrolle competencias que le permitan posteriormente reordenar una secuencia con la que podrían desarrollarse los diferentes aspectos de un contenido específico; ese tipo de conocimiento forma parte del denominado conocimiento especializado. Por ello, dentro de la comunidad de educadores matemáticos, existe una creciente preocupación por el diseño y análisis de tareas que promuevan la adquisición de

ISBN 978-84-945722-3-4

competencias didáctico-matemáticas que deben poseer profesores de matemáticas; se señala que dicho diseño deberá basarse en datos empíricos, deberá hacer referencia a los enfoque teóricos empleados y deberá proporcionar ejemplos concretos.

En este trabajo se han considerado como base empírica tareas presentes en textos didácticos, asociadas a contextos de geometría y aritmética, que podrían requerir de la aplicación de procesos de generalización y simbolización, por lo que serían pertinentes para el desarrollo del razonamiento algebraico elemental. Se ha adoptado como postura teórica el Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) y el modelo del conocimiento didáctico-matemático de profesores de matemáticas (Godino, 2013). Se han identificado tareas en distintos contextos que admiten diversas soluciones, las cuales se han asociado a diferentes niveles de razonamiento algebraico, según hayan sido los procesos matemáticos involucrados.

Elementos teóricos considerados

Diversos investigadores han tratado de estudiar los factores que influyen en el desarrollo del pensamiento algebraico, desde distintas perspectivas (Kieran, 2006). Desde el EOS se ha caracterizado la naturaleza y el desarrollo del Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) explicitando cuáles son los objetos y procesos que intervienen en las prácticas consideradas algebraicas. Godino et al. (2015) consideran tres categorías de contenido algebraico para el RAE; estas son: las estructuras (entendiendo por ello las relaciones de equivalencias, propiedades de las operaciones y ecuaciones), las funciones (que incluyen el estudio de patrones aritméticos, patrones geométricos, función lineal, afín y cuadrática) y la modelización (asociada a problemas de contexto resueltos mediante el planteamiento de ecuaciones o relaciones funcionales).

Además, en diversos trabajos (Godino et. al., 2012; Godino et al., 2014) se plantea la construcción de un modelo teórico sobre niveles de algebrización. Esto permitirá establecer una jerarquía entre soluciones distintas que podrían desarrollar estudiantes al resolver una determinada tarea, asignándoles un determinado nivel de algebrización según estén presentes los procesos de generalización, unitarización y simbolización.

Desde esta perspectiva, la definición de los niveles de algebrización tiene como base la dualidad extensivo-intensivo que permite explicitar los rasgos característicos del álgebra en situaciones que exigen generalización (uso de variables, fórmulas, parámetros),

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

indeterminación (uso de incógnitas, ecuaciones y nociones relacionadas) y relaciones (binarias o de otro tipo), en función del reconocimiento del sujeto que realiza la actividad de los objetos intensivos en estos tres tipos de situaciones y de la regla que conforma a dicho objeto intensivo.

Así, en Godino et al. (2014) se presenta un modelo para el RAE considerando desde un nivel 0 hasta un nivel 3 de razonamiento algebraico elemental. En dicho trabajo se describen esos niveles, atribuyéndoles un rol especial a las estructuras y funciones, considerados entre los principales objetos algebraicos presentes en la etapa escolar.

De esa manera, se define el nivel 0 haciendo referencia a la ausencia de razonamiento algebraico; esto se pone en evidencia cuando en la actividad matemática intervienen objetos particulares expresados en lenguaje natural, icónico o gestual. Por ejemplo, la solución de una tarea que solo involucra operaciones aritméticas con los datos del problema se consideraría dentro del nivel 0; esto pese a que una solución experta podría considerar el planteamiento y solución de una ecuación.

Se define el nivel 1 como un nivel incipiente de algebrización cuando intervienen objetos intensivos expresados en lenguaje natural, numérico, icónico o gestual, cuando en tareas funcionales se reconoce la generalidad aunque en un lenguaje distinto al simbólico-literal y en tareas estructurales se emplean propiedades, relaciones de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados en símbolos aunque no se opere con ellos.

El nivel 2, denominado nivel intermedio de algebrización, se refiere a una práctica matemática en la que intervienen indeterminadas o variables a través de un lenguaje simbólico-literal para representar a los intensivos reconocidos. En tareas estructurales, se transforman ecuaciones de la forma $Ax \pm B = C$ y en tareas funcionales se reconoce la generalidad, aunque no se opera con los objetos intensivos para obtener expresiones equivalentes reducidas a su mínima expresión.

El nivel 3 se conoce como el nivel consolidado de algebrización y se refiere a la práctica matemática en la que se producen objetos intensivos, se emplea la representación simbólica-literal y se opera con ellos. En tareas estructurales, se transforman ecuaciones de la forma $Ax \pm B = Cx \pm D$ y en tareas funcionales se obtienen expresiones equivalentes reducidas a su mínima expresión.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Cabe señalar que en el EOS, se define tarea como una actividad de indagación realizada en el seno de un sistema didáctico (estudiante, profesor y medio) para dar respuesta a una cuestión (Godino, 2013, 3). Según esto, si bien el nivel que se asigne a una solución estará estrechamente relacionado con la demanda de la tarea, este dependerá en mayor medida de los rasgos algebraicos que presente la solución del estudiante. Así, serán valoradas positivamente aquellas tareas que admitan soluciones que pongan en evidencia rasgos asociados a distintos niveles de RAE.

A continuación, ejemplificaremos la asignación de estos niveles a la actividad matemática que puede realizarse al abordar una tarea específica; consideraremos para ello una tarea sobre estructuras que admite diversas soluciones.

Enunciado de la tarea: *Encuentre tres números cuya suma sea 164, tales que el segundo supere al primero en 14 y que el tercero sea la suma de los dos primeros*

Una solución de nivel 0 sería la siguiente:

Suponer que el número menor es 30, el siguiente sería 44 y el tercero sería 74. La suma sería 148, lo que difiere en 16 unidades del dato del problema. Probar con un número más grande, por ejemplo 38; en ese caso, la suma sería 180, y excedería el valor dado. Probar con un número menor, por ejemplo 34 y verificar que se cumplen las condiciones.

Asignamos el nivel 0 a esta solución porque solo involucra operaciones aritméticas con los datos del problema y la estrategia empleada es el ensayo y error.

Una solución de nivel 1 sería la siguiente: Si la suma, 5000, se divide entre 2, se obtendrá el tercer número: 82. Si al resto, 164-82=82, se le resta 14 y el resultado se divide entre 2, se obtendrá el menor de los números: 34. Luego, el número central será 34+14=48.

Asignamos dicho nivel a esta actividad matemática pues se reconocen algunas propiedades de manera implícita tales como *Si el tercer número es la suma de los dos primeros, la semisuma de los tres números es el número mayor* y *Si un número se obtiene sumando 14 unidades al primero, entonces la suma de los dos es el doble del menor de los números más 14*.

Una solución de nivel 2 sería la siguiente: Si el menor de los números es n, el siguiente será n+14 y el tercero será n+(n+14). La suma de los tres números será $n+(n+14)+(n+(n+14))=164$; $4n+28=164$ $4n=136$; de donde $n=3478$. Asignamos dicho nivel a esta actividad matemática pues se obtiene una expresión de la forma $Ax \pm B = C$ y se resuelve la ecuación.

ISBN 978-84-945722-3-4

Una solución de nivel 3 sería aquella que requiera realizar transformaciones de ecuaciones que presenten los valores indeterminados en ambos miembros. Si bien en este caso ello podría ejemplificarse planteando un sistema de tres incógnitas y tres ecuaciones, esto resultaría innecesario y costoso. Por ello, consideramos que esta no sería una tarea apropiada para explorar si la solución de un estudiante muestra rasgos del nivel 3.

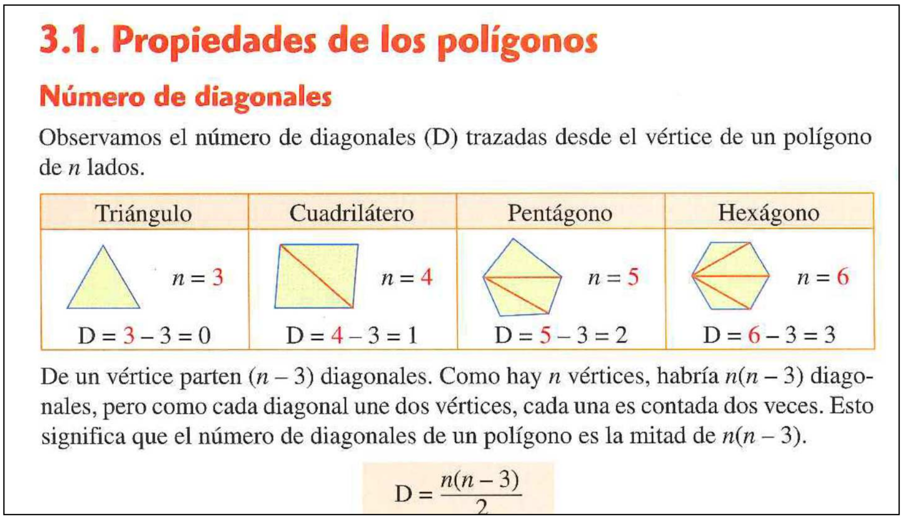
Desarrollo y resultados de la investigación

Este trabajo forma parte de una investigación más amplia que pretende construir el significado de referencia para las funciones y ecuaciones en la secundaria peruana. Para ello, se realizó el análisis de contenido de diversas fuentes (textos destinados a la enseñanza en instituciones educativas públicas y privadas del Perú, documentos oficiales, investigación en Educación Matemática) empleados por los profesores de dichas instituciones. A partir de ello, se delimitaron los conocimientos de contenido matemático respecto a las funciones y ecuaciones que debían tener los profesores de secundaria. En una segunda etapa, se reconocieron los objetos y procesos algebraicos puestos en juego en la resolución de las tareas que involucraban dichos contenidos identificados en el significado institucional de referencia, seleccionando aquellos que favorecerían el desarrollo del RAE en los estudiantes. Uno de los criterios en base al cual fueron organizadas las tareas fue el contexto en el que estas se ubicaban; en particular, se encontraron actividades que podían movilizar los contenidos algebraicos de función y ecuación, tanto en el contexto aritmético como en el geométrico pues los patrones existen y aparecen de manera natural en diversas ramas de la matemática.

Sin embargo, uno de los principales hallazgos de la investigación fue que la mayoría de actividades propuestas en los textos didácticos, en relación a las funciones y ecuaciones, no proponían al estudiante la búsqueda de una regla general ni la identificación de patrones. Por el contrario, se partía de la presentación de una regla o propiedad que luego debía ser aplicada a casos particulares.

A manera de ejemplo, en la figura 1 se muestra cómo se presenta la función que relaciona el número de diagonales de un polígono y el número de lados. Como puede observarse, luego de hacer el trazado de diagonales desde solo uno de los vértices de los cuatro primeros polígonos regulares, se enuncia la relación general.

ISBN 978-84-945722-3-4



3.1. Propiedades de los polígonos

Número de diagonales

Observamos el número de diagonales (D) trazadas desde el vértice de un polígono de n lados.

Triángulo	Cuadrilátero	Pentágono	Hexágono
$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
$D = 3 - 3 = 0$	$D = 4 - 3 = 1$	$D = 5 - 3 = 2$	$D = 6 - 3 = 3$

De un vértice parten $(n - 3)$ diagonales. Como hay n vértices, habría $n(n - 3)$ diagonales, pero como cada diagonal une dos vértices, cada una es contada dos veces. Esto significa que el número de diagonales de un polígono es la mitad de $n(n - 3)$.

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Figura 1. Tarea en contexto geométrico que podría propiciar el desarrollo del RAE

Texto didáctico Santillana, 2do de secundaria, p.350

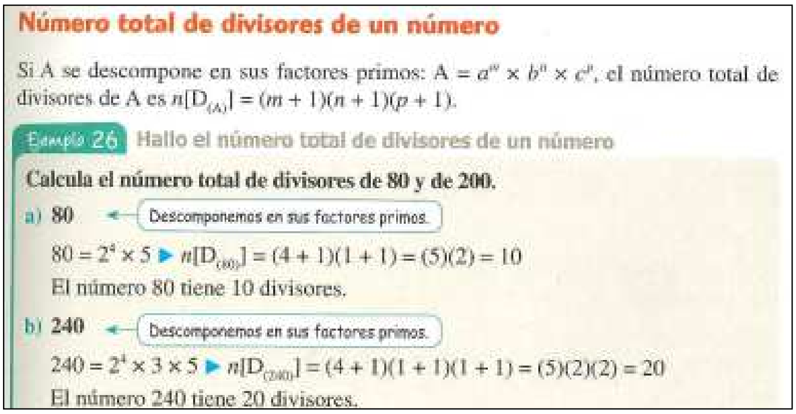
Si bien esta actividad, tal como ha sido propuesta, no propicia el desarrollo del razonamiento algebraico, consideramos que posee un gran potencial. Se propone incluir preguntas que generen en el estudiante la necesidad de identificar regularidades encaminadas a generalizar, obteniendo una regla recursiva y luego una ley de formación, que en este caso corresponderá a la fórmula para el total de diagonales de un polígono. Esto vendrá acompañado de la evolución del lenguaje, desde el empleo del lenguaje verbal al reconocer la regularidad hasta la simbolización de la regla, empleando lenguaje simbólico. Más aun, en caso se obtengan expresiones aparentemente distintas, se puede justificar la necesidad de transformar expresiones algebraicas para determinar si se trata de expresiones equivalentes.

A continuación se proponen algunas preguntas que se pueden considerar para identificar distintos rasgos de RAE. Por ejemplo, en una primera etapa se puede plantear determinar el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice de un triángulo, de un cuadrado y de un hexágono. Esta tarea no involucra conocimientos algebraicos por lo que a la solución, caracterizada por la construcción efectiva de las diagonales, se le asignaría el nivel 0 de algebrización. Posteriormente se puede solicitar determinar el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice de un polígono de 15 lados y luego determinar el total de diagonales. Esta tarea debería generar la necesidad de identificar una regularidad, por ejemplo, que de cada vértice se pueden trazar tantas diagonales como el número de lados del polígono menos 3 (esto es, sin contar aquellas que unirían el vértice desde el cual se hacen

ISBN 978-84-945722-3-4

los trazos consigo mismo y con los dos vértices vecinos). Los procesos de generalización y unitarización estarán presentes cuando el estudiante encuentra la regla que se aplica a los casos particulares y esa nueva entidad emergerá del sistema. A partir de ello, podrá abordar la segunda parte de la tarea: determinar el total de diagonales. Una tarea de este tipo admitiría soluciones con rasgos del nivel 1. En la medida en que el estudiante obtenga expresiones algebraicas y las manipule, se reconocerán rasgos de niveles más avanzados de algebrización en su solución.

De otro lado, en contextos aritméticos también se ha encontrado situaciones que podrían adaptarse y convertirse en tareas que permitan el desarrollo del RAE. Por ejemplo, al abordar el tema de divisibilidad, en el texto se plantea el problema de hallar el número total de divisores de un número natural, tal como se muestra en la figura 2. Esto se hace presentando la expresión general, sin la exploración previa de casos particulares que permitan luego generalizar. Así como en el caso de las diagonales, consideramos que esta tarea podría reformularse de modo que propicie la evolución del RAE.


Número total de divisores de un número

Si A se descompone en sus factores primos: $A = a^m \times b^n \times c^p$, el número total de divisores de A es $n[D_{(A)}] = (m + 1)(n + 1)(p + 1)$.

Ejemplo 26 Hallo el número total de divisores de un número

Calcula el número total de divisores de 80 y de 200.

a) **80** ← Descomponemos en sus factores primos.

$80 = 2^4 \times 5$ ▶ $n[D_{(80)}] = (4 + 1)(1 + 1) = (5)(2) = 10$

El número 80 tiene 10 divisores.

b) **240** ← Descomponemos en sus factores primos.

$240 = 2^4 \times 3 \times 5$ ▶ $n[D_{(240)}] = (4 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = (5)(2)(2) = 20$

El número 240 tiene 20 divisores.

Figura 2. Tarea en contexto aritmético que podría desarrollar el RAE

Texto didáctico Santillana, 1ro de secundaria, p.29

De otro lado, en relación a las tareas sobre estructuras que presentan los textos y específicamente en lo que se refiere a ecuaciones lineales, se ha encontrado un gran número de problemas propuestos con la intención de que el estudiante emplee ecuaciones, que podrían resolverse sin tener que plantear ni resolver una ecuación. A manera de ejemplo, se presentan tres problemas en la figura 3.

ISBN 978-84-945722-3-4

14 Al abuelo de Julio le faltan 17 años para tener 100. ¿Cuántos años tiene actualmente?

15 Carlos repartió S/. 81 entre sus 4 hijos. Si al mayor le dio S/. 27 y a los otros, el resto en partes iguales, ¿cuánto les dio a los hijos menores?

16 Abel cortó una tabla de 2 metros en dos piezas. La longitud de una de las piezas es el cuádruple de la otra. ¿Cuál es la longitud de cada pieza?

Figura 3. Tarea en contexto aritmético que no requiere de ecuaciones

Texto didáctico Santillana, 1ro de secundaria, p.231

Estas tareas admiten soluciones correctas solo realizando operaciones aritméticas con los datos del problema; en cuyo caso, se asignarían los niveles 0 o 1 de algebrización. Sin embargo, por la ubicación de los problemas, se deduce que la intención de los autores era generar en el estudiante la necesidad de simbolizar y transformar la expresión algebraica literal. En relación a ello, se propone organizar las tareas sobre ecuaciones de modo que inicialmente se presenten aquellos enunciados que admitan soluciones en las que no haya rasgos algebraicos y, posteriormente, se planteen enunciados para cuya solución se requiera necesariamente de plantear una ecuación y realizar transformaciones con las expresiones algebraicas presentes; de esa manera se estaría propiciando una evolución en el razonamiento algebraico de los estudiantes.

Consideraciones finales

La definición ampliada de álgebra, adoptada por el EOS, en términos de objetos y procesos que caracterizan esta actividad, teniendo como eje la generalización, unitarización y simbolización, ha permitido reconocer distintos contextos matemáticos favorables para el desarrollo del razonamiento algebraico elemental.

Así, se ha reconocido la potencialidad que poseen diversas actividades aritméticas y geométricas para el desarrollo del razonamiento algebraico elemental dado que pueden transformarse en tareas de generalización de patrones. Este tipo de actividades es considerada como una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la educación básica ya que posibilita a los estudiantes acercarse a situaciones de variación que son el centro del desarrollo del RAE, tal como señala Vergel (2015).

ISBN 978-84-945722-3-4

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco del proyecto "Elaboración de una propuesta de desarrollo del razonamiento algebraico elemental para docentes" (Referencia CAP470 / PUCP).

Referencias bibliográficas

Godino, J., Castro, W., Ake, L. y Wilhelmi, M.R. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Bolema, Rio Claro (SP),* 26(42B), 483-511.

Godino, J. D. (2013). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 1-15). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32.1, 199–219.

Godino, J. D., Aké, L. P., Contreras, A., Díaz, C., Estepa, A., F. Blanco, T., Lacasta, E., Lasa, A., Neto, T., Oliveras, M. L. y Wilhelmi, M. R. (2015). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. *Enseñanza de las Ciencias*, 33.1, 127-150.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching algebra. En A. Gutiérrez, P. Boero (eds.). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future,* 11-49.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA,9*(3), 193-215.

ISBN 978-84-945722-3-4