MC-24

COMBINACIÓN DE HERRAMIENTAS DIGITALES PARA LA EVALUACIÓN EN MATEMÁTICAS, EJEMPLO A TRAVÉS DE UNA SITUACIÓN DE MODELIZACIÓN

Jorge Gaona Paredes – Leonard Sánchez Vera

jorge.gaona.p@gmail.com – leonardsanchez@gmail.com

Universidad Paris Diderot – Laboratorio de Didáctica André REVUZ

Núcleo temático: Formación del profesorado en matemáticas

Modalidad: MC

Nivel educativo: (5) Formación y actualización docente

Palabras clave: herramientas digitales, modelización, evaluación.

Resumen

Las tecnologías digitales para la evaluación en línea de la matemática son artefactos que permiten dotar a estudiantes y profesores de un ambiente con potencialidades de tipo pragmáticas y epistemológicas (Artigue, 2011). Estas potencialidades se pueden explotar mediante un adecuado proceso de instrumentación e instrumentalización de los artefactos (Rabardel, 1995), combinado con un diseño didáctico coherente tomando en cuenta las limitaciones que imponen.

En este taller se mostrarán las características generales de este tipo de sistemas, analizando sus potencialidades y limitaciones. Luego se trabajará con la integración de tres herramientas para crear evaluaciones en línea en matemáticas, a saber, los plugin Wiris Quizzes y GeoGebra Question Type, con énfasis en la interacción algebraica y en la interacción en un ambiente de geometría dinámica respectivamente, los cuáles se integran una plataforma LMS llamada Moodle. Con estas herramientas mostraremos como construir, a partir de una situación de modelización, una pregunta con parámetros aleatorios, retroalimentación de proceso y personal. Se pondrá énfasis en la utilización de distintos registros semióticos movilizados por el enunciado propuesto (Duval, 1993), para finalmente establecer una

ISBN 978-84-945722-3-4

discusión colectiva de los posibles contratos didácticos (Brousseau, 1998) sobre la utilización de este tipo de recursos por parte de los docentes.

Trabajaremos particularmente sobre dos situaciones de optimización: canaleta con ángulo recto y altura de pestaña variable y sobre un una canaleta de altura de pestaña fija y ángulo variable.

I. Introducción

Durante el desarrollo de este minicurso pretendemos orientar una discusión con los profesores en formación sobre los aportes, limitaciones y el especial interés de combinaciones de diferentes herramientas tecnológicas digitales a saber, un software de geometría dinámica (GeoGebra), un sistema de evaluación en línea (Wiris) y una plataforma Moodle en el abordaje de situaciones de modelización matemática con tecnologías.

El minicurso se presenta alrededor de dos situaciones clásicas de modelización matemática y utilizando la tecnología como medio; la discusión se centrará sobre el valor pragmático y epistémico y las limitaciones del uso de diferentes herramientas tecnológicas en la puesta en escena de las situaciones (Michèle Artigue, 2002)

La estrategia de formación adoptada en este minicurso es una formación por homología (Houdement & Kuzniak, 1996), en la cual, en un primer momento los profesores en formación, asumiendo una postura de estudiante, resolverán dos situaciones de modelización matemática, tanto en papel crayón como en ambientes tecnológicas; y en un segundo momento, se animará una discusión colectiva sobre los aportes y limitaciones de la tecnología para el abordaje de las situaciones, para el cual los profesores asumirán una postura de "*profesor de matemáticas*".

Distinguimos así tres grandes momentos o fases durante el desarrollo de esta primera situación:

- Fase 1: Experimentación de la situación 1 utilizando material concreto y medición directa y discusión sobre los conceptos que emergen de la experimentación: como variabilidad, dependencia entre variables, error en las medición, distintas representaciones de los datos, limitaciones del método experimental

ISBN 978-84-945722-3-4

- Fase 2: Resolución de la situación 1 en medio de una plataforma Moodle en la cual se combina GeoGebra y Wiris.
- Fase 3. Discusión colectiva aportes / limitaciones de la combinación de herramientas tecnológicas para el abordaje de la situación 1.

Luego, se presenta una variación de la situación 1, en la que la altura de la canaleta es fija pero se varía el ángulo de la canaleta. Distinguimos tres grandes momentos o fases durante el desarrollo de esta segunda situación:

- Fase 1: Se mostrará la solución matemática del problema de tal forma que los participantes reconozcan los diferentes elementos y conceptos matemáticos que emergen en esta situación.

- Fase 2: Se discutirá acerca de los conocimientos previos mínimos que se necesitan para trabajar esta situación. Se presentará una propuesta a partir del uso de material concreto y medición directa.

- Fase 3: Se mostrará una propuesta con tecnología para evaluar a los estudiantes en torno a esta situación.

En la apartado siguiente se presenta un análisis a priori de las dos situaciones a trabajar durante la formación. En el apartado III se presenta la metodología y escenario de formación y en la cual se expone más detalladamente el desarrollo de las fases anteriormente descritas. En los apartados IV y V respectivamente se describen de manera sucinta los materiales a utilizar y las expectativas del minucurso.

II. Análisis a priori de las dos situaciones a proponer en formación

A continuación se presenta el análisis a priori de las dos situaciones a proponer en formación. Siguiendo la metodología de Ingeniería Didáctica (M. Artigue, 1990; Perrin-Glorian, 2009), en el análisis a priori tomaremos en cuenta los siguientes criterios: *la potencialidades matemáticas de la situaciones: conocimientos matemáticos puestos en juego (funciones involucradas); las posibles estrategias movilizadas por los participantes al enfrentarse a las situaciones; las potencialidades de la tecnología para su abordaje; y las potenciales de la puesta en escena de tales situaciones en una escenario real de enseñanza, tomando en cuenta*

ISBN 978-84-945722-3-4

las eventuales limitaciones que impone el currículo según cada contexto donde se ejerza la actividad docente de los participantes en la formación.

Se propone así en este minicurso dos situaciones de modelización matemática; la primera contextualizadas en el diseño de una canaleta de ángulo recto y altura variable (situación), y la segunda contextualizada en el diseño de la misma canaleta pero de ángulo variable (situación 2). En ambas situaciones emergen funciones matemáticas que permiten modelizar y optimizar el volumen máximo que pudiese transportar la canaleta.

Cabe destacar que no existe un enunciado explícito en las situaciones propuestas. Un enunciado posible de cada situación podría ser propuesto y adaptado prevaleciendo las potencialidades anticipadas en el análisis a priori. Se ha hecho esta elección atendiendo al principio de que cada participante debe responder a un contexto particular de enseñanza.

- Situación 1. Canaleta con ángulo recto

Se plantea en esta situación, el diseño a partir de una lámina rectangular (de ancho L y largo M), de una canaleta cuyas pestañas del mismo tamaño forman un ángulo recto con la base, como se muestra en la figura siguiente:

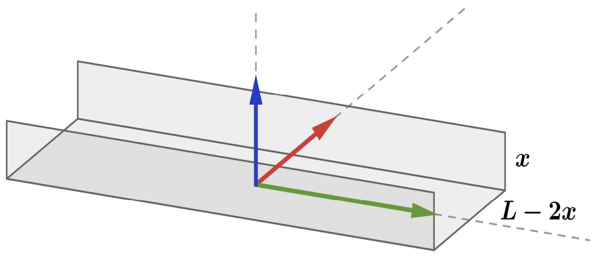


Figura 1. Canaleta con ángulo recto

El potencial matemático de una situación planteada de esta manera parte del hecho de que, en un primer momento, es necesario que los participantes identifiquen las variables que intervienen en la situación. De manera intuitiva es natural que participantes (asumiendo un rol de alumno) supongan la invariabilidad del volumen al variar la altura de la pestaña. Para ello los participantes deben identificar la variable independiente: *largo (M)*; y las variables dependientes: altura: x; ancho: (□ − 2□) y el volumen de la canaleta en función del largo y del ancho: □(□) = □ · (□ − 2□) · □.

ISBN 978-84-945722-3-4

Desde un punto de vista de optimización, el volumen máximo ocupado por la canaleta se encuentra en $\square = \frac{\square}{4}$ y toma el valor de $\square\left(\frac{\square}{4}\right) = \square \cdot \frac{L^2}{4}$. Los participantes podrían obtener el valor aproximado de la altura y el volumen de la canaleta a través de la elaboración de una tabla de valores a partir de un valor del ancho ($\square - 2\square$) que es determinado por material concreto elegido como lámina rectangular durante la experimentación de la situación en papel crayón.

El potencial de la tecnología para el abordaje de esta situación toma dos vertientes. Por una parte un applets GeoGebra elaborado y mostrado durante la experimentación permitiría favorecer la visualización de la situación al representar de manera dinámica las diferentes canaletas obtenidas a partir de diferentes valores de altura x escogidos. Por otra parte, un software de evaluación en línea llamado Wiris integrado en una plataforma Moodle permitirían hacer preguntas específicas sobre el applets antes diseñado proporcionando un carácter aleatorio a ciertos parámetros del problema, retroalimentando de manera inmediata si la respuesta de los alumnos está correcta o incorrecta y proporcionando una retroalimentación del proceso detallado de resolución; del mismo modo que la plataforma Moodle nos permite llevar un registro de las trazas del trabajo de los alumnos durante la resolución de la situación. Dicho registro (número de intentos, el tiempo dedicado a la pregunta, entre otras) serviría de provecho a los participantes, en tanto que profesores en servicio, para tomar decisiones de orden didáctico.

En cuanto a las potencialidades de la puesta en escena de tal situación en un escenario real de enseñanza sería de especial interés animar una discusión entre los participantes sobre una posible adaptación de tal situación respecto al currículo según cada contexto. Por ejemplo

- **Situación 2**: Canaleta de altura fija y de ángulo variable

En la figura siguiente se ilustra el diseño de una canaleta de altura fija y de ángulo variable.

ISBN 978-84-945722-3-4

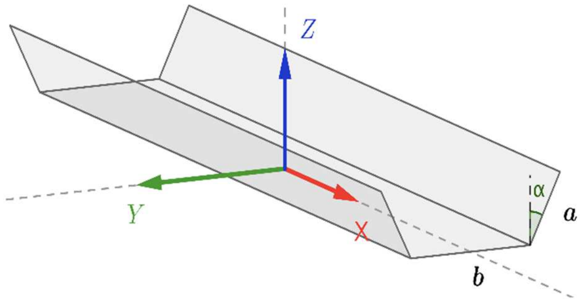


Figura 2. Canaleta de altura fija y ángulo variable

Desde el punto de vista matemático la potencialidad de esta situación radica en el hecho de que interviene aquí una nueva variable que complejiza, con respecto a la situación precedente, la función que nos permite modelizar el área de la sección transversal y el volumen que ocupa la canaleta. En esta situación, el volumen es una función que depende de la variable independiente α $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, mientras que los valores del ancho b y la altura a de la canaleta pasan a ser parámetros del problema determinadas como condiciones iniciales del mismo. El valor del ángulo que optimizaría el volumen V podría ser calculado, y dependido del nivel de enseñanza, obteniendo los puntos críticos de la derivada de V en función de α; el cual e independientemente de los valores de los parámetros, se alcanzaría aproximadamente en 21,47º. En anexos se muestra la solución detallada para esta situación.

Por otra parte, en cuanto a los aportes de las tecnologías digitales para el abordaje de esta situación, los aspectos de discusión son análogos a los expuestos en la situación 1.

No obstante, la dialéctica *variable – parámetro* así como su distinción (Basurto & Gallardo, 2012) eventualmente evocadas durante las puestas en común de las distintas resoluciones de estas dos situaciones se perfila ser fundamental y le otorga un potencial tanto de orden matemático como didáctico a ambas situaciones.

III. Metodología de trabajo y descripción del escenario de formación

Fase 1: Experimentación de la situación

En esta primera fase se distribuirá una hoja de papel oficio del mismo tamaño y se pedirá a cada uno de los participantes hacer un doblez, en la parte más corta de la hoja, del mismo tamaño a cada lado y formar una canaleta como se muestra en la figura 1. Se hará un énfasis

ISBN 978-84-945722-3-4

en pedir que la altura elegida sean distintas, pidiendo, por ejemplo, elegir alturas pequeñas y grandes. Una vez realizado esto se preguntará a los participantes ¿La capacidad de la canaleta es la misma para los distintos dobleces?, esto abrirá la discusión sobre los distintas argumentaciones que los estudiantes pueden dar para afirmar o refutar las distintas posiciones que aparezca.

Esto llevará a buscar métodos de comprobación o refutación sobre las distintas posiciones y argumentaciones que aparezcan y emergerá de forma natural otros cuestionamientos: ¿cómo se mide esa capacidad? ¿De cuáles dimensiones depende?.

Una vez que se acuerde la forma de responder a estas preguntas, utilizando una regla de medir, se solicitará a los participantes escribir cada uno de las capacidades, según los dobleces elegidos en una tabla de valores en la pizarra.

Esto hará que emerja de forma natural el problema de optimización. Se propondrá a los participantes representar además de forma gráfica los valores encontrados y se discutirá sobre la exactitud de las mediciones.

Por último se discutirá sobre la limitación de cada uno de las representaciones de la función, en relación a la información que entregan y la posibilidad para poder responder a la pregunta de optimización del problema.

Fase 2: Uso de la tecnología para reforzar y evaluar de forma personalizada la comprensión de la situación.

Se presentará en una plataforma Moodle integrada con Wiris y GeoGebra, distintas tareas con parámetros aleatorios y retroalimentación inmediata. Dichas tareas están basadas en la situación antes discutida y permitirán reforzar la situación trabajada en clases y al mismo tiempo evaluar el trabajo de los estudiantes en las tareas propuestas.

IV. Materiales y recursos a utilizar:

Para la parte experimental en lápiz-papel se necesitan los siguientes materiales: hojas de papel o cartulina, juego geométrico (esencialmente reglas, escuadras y transportador). Para el desarrollo de la parte tecnológica se necesitan los siguientes recursos: sala con

ISBN 978-84-945722-3-4

ordenadores con conexión a internet (deseable), software GeoGebra instalado en los ordenadores.

V. Expectativas de la formación.

A lo largo del minicurso se animará una discusión en torno al uso de la tecnología para introducir y trabajar la situación en diversos niveles educativos atendiendo a los diversos contextos de enseñanza. Se tratará de que los participantes, asumiendo una postura de alumno (por tratarse de una formación por homología) evolucionen asumiendo unas postura "crítica" de docente de matemática, estando en capacidad de: i) cuestionar el conocimiento matemático puesto en juego en las dos situaciones, ii) el papel de las diferentes herramientas tecnológicas involucradas (GeoGebra, Wiris y Moodle) así como su combinación para la enseñanza de contenidos matemáticos y, iii) la posibles adaptaciones - de orden didáctico - de las situaciones planteadas y de sus métodos de resolución atendiendo a cada contexto en cuanto a los criterios siguientes: el orden de los contenidos matemáticos según cada nivel de enseñanza, la transversalidad del mismo y las condiciones materiales disponibles.

Referencias

Artigue, M. (1990). Ingénierie Didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *9*(3), 283–307.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*. 245–274.

Artigue, (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas : desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental II . De la programación a los recursos en línea : trayectoria de una investigadora. *Cuadernos de Investigación En Educación Matemática*, *8*, 1–15.

Basurto, E., & Gallardo, A. (2012). Los parámetros en las funciones polinomiales: una experiencia con GeoGebra en el bachillerato. In M. T. Rojano (Ed.), *Las teconologías digitales en la enseñanza de las matemáticas* (Trillas, pp. 83–103). Ciudad de México.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La pensée sauvage. Grenoble.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la

ISBN 978-84-945722-3-4

pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (1996). Autour des strátegies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *16*(3), 289–322.

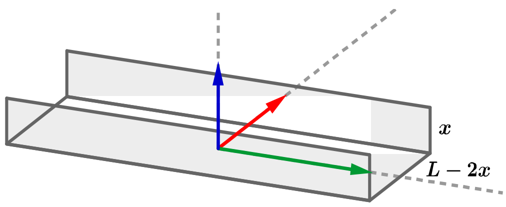
Perrin-Glorian, M. (2009). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Developpement des ressources et formation des enseignants. In C. Margolinas (Ed.), *En Amont et en aval des ingénieries didactiques. Actes de la XV école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 57–78). Clermont-Ferrand.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: une approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin. Paris.

Anexos

Situación 1

Supongamos que la lámina original con la que se construye la canaleta tiene un ancho L y un largo M, como se muestra en la siguiente figura :



Entonces la capacidad de la canaleta viene dada por la función de volumen :

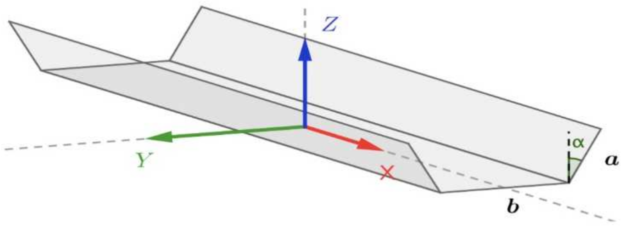
$$V(x) = M \cdot x \cdot (L - 2x)$$

Donde x es la altura de la canaleta. La función es cuadrática, por lo tanto, el máximo se encuentra en $x = \frac{L}{4}$ y el volumen máximo que puede alcanzar es $V\left(\frac{L}{4}\right) = M \cdot \frac{L^2}{8}$.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Situación 2

Supongamos que la lámina está doblada, la base mide b, las pestañas miden a cada una y hay un ángulo $0 \leq \alpha \leq 90°$ que forma entre la perpendicular a la base y la pestaña, como lo muestra la imagen :



Entonces, la función para calcular el volumen de la canaleta es :

$$V(\alpha) = M \cdot \left(a^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + a \cdot b \cdot \cos(\alpha)\right)$$

Luego, para obtener el máximo, podemos derivar la función :

$$V'(\alpha) = M \cdot \left(-a^2 \cdot \sin^2(\alpha) + a^2 \cdot \cos^2(\alpha) - a \cdot b \cdot \sin(\alpha)\right)$$

Igualamos a cero :

$$M \cdot \left(-a^2 \cdot \sin^2(\alpha) + a^2 \cdot \cos^2(\alpha) - a \cdot b \cdot \sin(\alpha)\right) = 0$$

Eliminamos M y utilizamos una identidad trigonométrica para dejar todo en términos de $\sin(\alpha)$:

$$-2a^2 \cdot \sin^2(\alpha) - a \cdot b \cdot \sin(\alpha) + a^2 = 0$$

Si utilizamos resolvemos la ecuación cuadrática obtenemos :

$$\sin(\alpha) = \frac{-b \pm \sqrt{8a^2 + b^2}}{4a}$$

Si elegimos $a = \frac{L}{4}$ y $b = \frac{L}{2}$ nos queda :

$$\sin(\alpha) = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Finalmente, tomando en cuenta que que α está entre 0 y 90 grados, obtenemos que :

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}\right) \approx 21.47°$$

Por lo tanto, la máxima capacidad de la canaleta se obtiene si $\alpha \approx 21.47°$ y el volumen m'áximo que se puede obtener es $V(21.47°) \approx 0.137L^2$.

ISBN 978-84-945722-3-4