MC-59

A IMPORTÂNCIA DAS SOLUÇÕES VISUAIS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Isabel Vale & Ana Barbosa
isabel.vale@ese.ipvc.pt
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo e CIEC, Portugal

Núcleo temático: Tópico II – La Resolución de Problemas en Matemáticas
Modalidad: MC
Nivel educativo: Primário/médio
Palabras clave: Visualização; Resolução de Problemas; Comunicação; Criatividade.

Resumen

Na aula de matemática, a natureza das tarefas e da comunicação têm implicações claras na aprendizagem. Comunicar uma ideia, de forma clara, exige organização e conhecimento de factos/conceitos precisos, no entanto isso nem sempre é feito e/ou compreendido da forma como planeamos. Ver é uma componente importante na compreensão matemática, sendo algo que se pode desenvolver, aprender e ensinar. É importante ensinar os alunos a ver pelo que é necessário propor-lhes um conjunto de tarefas desafiantes em que o ponto de partida da sua exploração seja a visualização. O recurso a resoluções visuais pode ser uma alternativa para o uso de conceitos que o aluno não tem, e uma maneira mais fácil de resolver uma dada situação/problema. Logo, a aula de matemática deve incluir práticas que levem os alunos a pensar visualmente a partir de experiências que impliquem este tipo de pensamento. Neste minicurso, pretende-se, numa perspetiva teórica e prática, discutir e envolver os participantes na resolução de tarefas que ilustram algumas destas ideias. Terá como ponto de partida tarefas que evidenciam o poder da visualização na comunicação de conceitos, passando posteriormente para a resolução de tarefas com múltiplas resoluções, onde a visual é a mais simples e criativa.

Introdução

Na base de toda a atividade matemática que ocorre numa sala de aula está a comunicação (e.g. Wood, 2012). Comunicar as ideias a outra pessoa tem de ser realizada de forma clara, precisa e organizada, o que requer um conhecimento de fatos e conceitos, porém isso nem sempre é entendido como pretendemos. Assim o professor necessita de propor tarefas diversificadas que vão de encontro aos diferentes estilos de pensamento dos alunos para que estes possam mais facilmente compreender o que lhes é dito ou pedido e resolver as tarefas que lhes são propostas. Por outro lado, também adquirem e desenvolvem outras capacidades

ISBN 978-84-945722-3-4

para as quais o ensino ou as suas caraterísticas pessoais não lhes tem permitido desenvolver. As práticas de ensino dominantes não têm valorizados as estratégias visuais para resolver determinada tarefa, assim destacamos os contextos visuais como um forte apoio para a compreensão e explicação de conceitos e ideias matemáticas.

A importância de *ver* nas práticas de sala de aula

A aprendizagem matemática durante uma aula de matemática depende grandemente do professor e das tarefas que se propõem aos estudantes (e.g. Ball, Thames & Phelps, 2008; NCTM, 2014; Vale & Pimentel, 2016). Tarefas matematicamente ricas, em particular as de natureza exploratória que possuam múltiplas estratégias de resolução e/ou várias soluções e permitam envolver os alunos e gerar interações de aprendizagem diversificadas. De facto, as tarefas utilizadas na sala de aula são o ponto de partida para a atividade matemática dos alunos e irão exercer uma grande influência no que os alunos aprendem. O nível cognitivo que as tarefas suscitam tem muito a ver com a sua natureza, mas também com a exploração feita pelo professor e o modo como são realizadas pelos alunos. O design das propostas define a atividade que podem despoletar nos alunos, permitindo aos professores introduzir novas ideias e procedimentos e aos alunos a oportunidade de fazer a diferença, pensando de forma divergente (Vale, prelo).

A escola do século 21 tem de preparar os alunos para uma sociedade global que se rege por comunicações com grande impacto visual e por mudanças complexas, diversificadas e rápidas a todos os níveis. Assim, a escola deve desenvolver nos alunos a capacidade de ler e interpretar a informação visualmente, tendo grandes potencialidades na aprendizagem matemática. Alguns autores (e.g. Presmeg, 2014; Zimmermann & Cunningham, 1991) sugerem que para que os alunos sejam matematicamente competentes e criativos, estes devem ser capazes de usar imagens visuais e intuitivas em todas as fases do processo de resolução de um problema. Fujita e Jones (2002) acrescentam que é essencial os alunos terem *olho geométrico* – o poder de ver propriedades geométricas a separar-se de uma imagem – ferramenta essencial para a construção da intuição geométrica. Na resolução de um problema a intuição é muito importante pois constitui o momento que dá um sentido e uma certeza de que o caminho para uma solução está encontrado e, a partir daqui a situação é vista de um modo mais simples, ou como refere Liljedahl, (2004, p.21) "a intuição proporciona a direção

ISBN 978-84-945722-3-4

a seguir". E como refere Haylock (1987) a visualização pode suscitar o desenvolvimento da intuição e a capacidade de ver novas relações, produzindo o corte com fixações mentais que possibilita o pensamento criativo.

Todos os professores ao longo da sua prática tem encontrado alunos que manifestam preferência pelos diferentes temas que vão estudando, desde os números à geometria, e pela forma como compreendem esses temas e resolvem os seus problemas, privilegiando as palavras, as fórmulas ou as figuras. Pelo que os professores têm de atender que os alunos podem ter estilos de aprendizagem diferentes e podem ter preferências diferentes em relação à comunicação matemática, o que pode constituir uma dificuldade na compreensão de ideias matemáticas, sobretudo quando se recorre a uma única forma de comunicação (Vale & Barbosa, 2017). Assim psicólogos e educadores matemáticos (e.g. Krutetskii, 1976; Presmeg, 2014) perante as estratégias de resolução de um problema de matemática utilizadas pelos alunos classificam-nos como pertencentes a uma de três categorias: (1) *visuais* ou *geométricos* – aqueles que preferem usar esquemas visual-pictóricos mesmo quando os problemas são mais facilmente resolvidos com meios analíticos; (2) *não-visuais*, *analíticos* ou *verbais* – aqueles que preferem utilizar abordagens mais verbais, mesmo nos problemas em que é relativamente mais simples resolvê-los através de uma abordagem visual; e (3) *mistos, integradores* ou *harmónicos* – aqueles que não têm preferência específica nem pelo pensamento lógico-verbal nem pelo visual-pictórico, e tendem a combinar métodos analíticos e visuais. Estes estilos vão ter grande importância no modo em como cada aluno processa toda a informação que lhe é fornecida, pelo que damos importância ao *procurar ver*, como uma estratégia de resolução de problemas. Há um conjunto de problemas que têm grande potencial para resoluções visuais, e para os quais propomos para a sua resolução o uso de uma estratégia complementar e específica que chamamos *procurar ver*. Esta estratégia, de pensamento, envolve a percepção visual de objetos matemáticos combinada com o conhecimento e experiências passadas. Além disso, *ver* inclui imaginar, que está relacionado com ter *insights* criativos ou momentos *aha!*, podendo ser expressa em termos de desenho, o que significa traduzir as ideias de alguém nalguma forma visual, e envolve uma atividade que pode ser associada com a gama mais tradicional de estratégias (e.g. fazer uma lista organizada, procurar um padrão) e que pode permitir uma resolução visual de um problema de modo mais compreensível, simples e criativo. Na resolução de problemas, essa estratégia,

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

que recorre a representações visuais, normalmente deve ser complementada com explicações numéricas e verbais (Vale, Pimentel & Barbosa, prelo). Assim consideramos que as resoluções visuais incluem o recurso a diferentes representações visuais (e.g. figuras, desenhos, diagramas, gráficos) como parte essencial do processo de chegar à solução. As resoluções não visuais pelo contrário não dependem das representações visuais como parte essencial para chegar à solução, recorrendo a outras, como sejam as representações numéricas, algébricas e verbais (e.g. Presmeg, 2014; Vale, Barbosa & Pimentel, 2016). Outro aspecto a considerar é a importância da comunicação não-verbal (e.g. expressão facial, gestos, movimentos) que desempenha um papel único no ensino, principalmente porque algumas informações que não podem ser transmitidas verbalmente podem ser transmitidas por meios não verbais (Neill, 1991) ou como forma complementar da comunicação ou como principal fonte de comunicação. Os gestos são uma dessas formas, pois permitem criar imagens visuais enquanto se fala, mas o gesto não se limita a apenas este propósito, ele pode ajudar a pensar e resolver problemas (Vale & Barbosa, 2017). Muitos conceitos matemáticos são mais bem compreendidos se os alunos tiverem acesso a algum tipo de apoio visual. Assim, os gestos são um excelente meio para prover imagens visuais, sendo reconhecidos como um tipo de comunicação não verbal que complementa os diálogos entre professores e alunos, ajudando o ouvinte a reter mais informações em relação a uma situação na qual nenhum gesto é realizado (Goldin-Meadow et al., 1999).

Algumas tarefas promotoras de resoluções visuais.

Apresentam-se três exemplos de tarefas que ilustram as ideias expressas anteriormente e que têm sido utilizadas em vários estudos (e.g. Vale, 2010, Vale & Barbosa, 2017, Vale & Pimentel, 2011, Vale, Pimentel & Barbosa, prelo,) desenvolvidos no âmbito da formação de professores da educação básica (3-15 anos). Os três exemplos são muito diferentes, mas todos têm o mesmo objetivo, salientar o poder do visual na resolução de tarefas matemáticas.

Tarefa 1.

Esta é uma tarefa prévia das outras, pois pretende desenvolver nos alunos a comunicação *sem ver* de modo a evidenciar a importância do rigor da linguagem matemática e do modo como é interpretada essa informação. Esta tarefa consiste em construir uma dobragem (dobradura)

ISBN 978-84-945722-3-4

ouvindo apenas as instruções do par (Vale & Barbosa, 2017). O professor faz a dobragem a um dos elementos dos pares, fora da sala onde estão os outros elementos, sem nenhuma informação oral, mas faz a dobragem tantas vezes quantas as necessárias para os alunos perceberem e memorizarem. Cada aluno no par, decidem quem será o recetor e o transmissor. Os alunos voltam à sala e costas com costas, o transmissor dá as instruções ao colega de modo a que este, possa construir a dobragem pretendida. É importante referir que nem o aluno que transmite a informação, nem o recetor tem acesso visual ao que o outro elemento está a fazer. Esta tarefa pretende que se utilizem propriedades das figuras geométricas. Notamos que os alunos recorrem a vocabulário muito pouco rigoroso recorrendo a imagens do dia a dia como por exemplo em vez de referir pentágono, referem *casinha*. A falta de linguagem matemática adequada e/ou informação correta vai condicionar o resultado final. Em alguns casos, o recetor não interpreta a mensagem que o transmissor comunica, dobrando o papel de forma errada, pelo menos em uma das etapas, o que vai condicionar o resultado final. Observou-se que, em geral, e embora os pares não pudessem ver, os alunos descrevem a maneira de dobrar, juntando gestos ao que iam indicando ao par (Figura 1). Os gestos tornaram-se ferramentas de pensamento, na medida em que suportam o raciocínio quando os transmissores não têm as palavras corretas para expressar as ideias que estavam imaginando e que querem comunicar, apesar do recetor não ver o que o transmissor fazia, pois só podia ouvir.

Figura 1. Os gestos

Tarefa 2.

Esta tarefa permite mostrar a importância do *procurar ver* para resolver a tarefa e/ou descobrir o caminho para a solução, raciocinando sobre as propriedades das figuras que apoiam a tarefa. A visualização pode suscitar o desenvolvimento da intuição e a capacidade de ver novas relações produzindo assim o corte com fixações mentais que possibilita o pensamento criativo. Esta capacidade estimula muitas vezes *o surgimento de* um momento de *insight*, ou de experiência *Aha* que nos conduz à solução ou ao caminho que nos leva à solução (e.g. Liljedahl, 2004; Vale, Pimentel & Barbosa, prelo) conduzindo a resoluções mais originais. Vejamos o exemplo seguinte (Vale, prelo)

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Um quadrado com 8 cm de lado sobrepõe-se a um quadrado mais pequeno com 6 cm de lado, de tal modo, que um dos seus vértices, A, coincide com o centro do quadrado pequeno. Nesta sobreposição, dois lados consecutivos do quadrado maior intersectam dois lados consecutivos do quadrado menor nos pontos B e D, obtendo-se um quadrilátero [ABCD] como mostra a figura junto. O comprimento do segmento CD é 4 cm. Qual é a área da região sombreada [ABCD]?

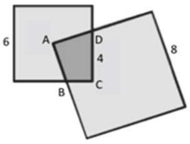

Figura 2. Enunciado da tarefa 2.

A solução para este problema pode ser bastante complexa para muitos alunos e sobretudo trabalhosa. Contudo torna-se simples, se for desenhado o prolongamento dos dois lados consecutivos do quadrado maior que intersetam o quadrado menor, o que pode ocorrer por um momento de *aha* (Figura 3). Ao fazer os prolongamentos, os segmentos que passam pelo centro do quadrado e são perpendiculares, permitem dividir o quadrado menor em quatros partes congruentes. Ou seja, a área pretendida é 1/4 da área do quadrado menor, ou seja, 1/4 x 36 e consequentemente a área sombreada será de 9 cm^2. Esta resolução permite dispensar o conhecimento do comprimento de [DC] que é dado. Por outro lado, este problema permite fazer uma extensão e ver que a área sobreposta é constante qualquer que seja a posição do quadrado maior, quando efetuamos uma rotação em torno de A.

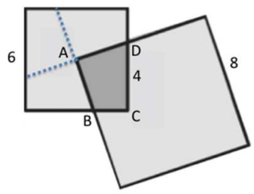

Figura 3. Resolução visual

Tarefa 3.

O exemplo seguinte ilustra uma parte do trabalho realizado no âmbito de um projeto Padrões (Vale & Pimentel, 2011) onde o visual/figurativo tem uma componente essencial para o desenvolvimento do conhecimento matemático em particular da importância da descoberta de padrões na construção do pensamento algébrico nos níveis iniciais com base na generalização (próxima e distante) de padrões visuais. Vejamos o exemplo (Vale, 2010) da Figura 4.

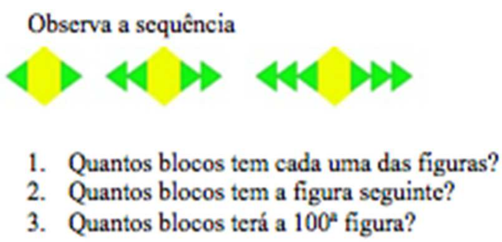

Figura 4. Enunicado da tarefa 3

Número da figura	Número de blocos
1	3
2	5
3	7
4	9

Figura 5. Total de blocos

ISBN 978-84-945722-3-4

A abordagem tradicional, que apenas conduz à generalização próxima, consiste em traduzir o número de blocos de cada figura numa tabela como mostra a Figura 5 e manipular os números conforme o pedido. Esta tabela não identifica o modo de ver do aluno, apenas indica o total de blocos. Permite descobrir recursivamente o número de blocos de qualquer figura, mas não permite um entendimento da estrutura do padrão que eventualmente observou. É então necessário que o professor incentive os alunos a explicitar a forma como vêm e traduzir esses modos verbalmente ou por escrito. Este é um passo importante em direção à generalização distante. Uma resposta possível foi “Na última figura vejo um hexágono amarelo ao meio e três triângulos verdes” para que traduz em linguagem matemática escrever 1 + 3 + 3 ou
1 + 2 x 3.

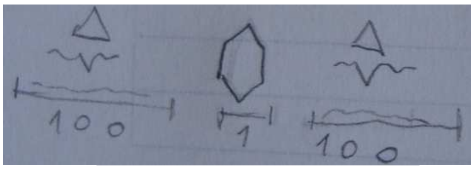

Figura 6. Solução visual

Este processo permite facilmente descobrir quantos blocos terá a 100ª figura. A figura 6 traduz a resposta imediata de um aluno que responde fazendo o desenho, solução visual, que ilustra um pensamento superior, uma generalização visual distante e construtiva. A partir da analise das figuras surge a tabela da figura 7 onde está visível o modo de ver o padrão em cada uma das expressões numéricas apresentadas e aos alunos ascender a um pensamento algébrico e os alunos.

Número da figura	Número de blocos
1	1 + 1 + 1 = 1 + 2x1
2	1 + 2 + 2 = 1 + 2x2
3	1 + 3 + 3 = 1 + 2x3
4	1 + 4 + 4 = 1 + 2x4
...	...
100	1 + 100 + 100 = 1 + 2x100

Figura 7. Expressões *visuais*

Algumas considerações finais

Com este artigo pretende-se realçar a força da estratégia *procurar ver* nas resoluções visuais. Quando os estudantes entram na escola possuem potenciais enormes, em particular, ao nível das capacidades de visualização e imaginação. Estas potencialidades devem ser aproveitadas pelo professor para explorar tarefas que suscitam da parte dos alunos a sua mobilização. Diferentes indivíduos podem ter diferentes estilos de pensamento (e.g. Krutetskii, 1976, Presmeg, 2014) e podem ter preferências diferentes em relação à comunicação matemática,

ISBN 978-84-945722-3-4

o que justifica a necessidade de utilizar diversos recursos representacionais e comunicacionais. A primeira tarefa permite salientar a importância do conhecimento matemático que apoie as ideias durante a comunicação matemática, ao contrário, a falta dele, pode ser um obstáculo no processo de comunicação. As outras duas tentam chamar atenção para que há outros problemas que convidam a outras resoluções, as visuais, e não apenas resoluções não analíticas, (e.g. numéricas, algébricas) que embora poderosas e gerais podem ser opacas para muitos alunos. Tarefas do tipo das apresentadas, que privilegiam o visual são desafiantes para quem as resolve, sobretudo quando se lhes pede que as resolvam de diferentes modos e incentivando-os à discussão de diferentes maneiras de ver/resolver uma tarefa, ajudando-os a desenvolver compreensão de conceitos através do suporte visual.

Referências bibliográficas

Ball, D., Thames, M. & PhelpS, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407.

Fujita, T. & Jones, K. (2002), The Bridge between Practical and Deductive Geometry: developing the "geometrical eye". In A. D. Cockburn and E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 2, pp.384-391). UEA, UK.

Goldin-Meadow, S., Kim, S. & Singer, M. (1999). What the teacher's hands tell the student's mind about Math. *Journal of Educational Psychology, 91*(4), 720-730.

Haylock, D. (1997). Recognizing mathematical creativity in schoolchildren. *International Reviews on Mathematical Education, Essence of Mathematics, 29*(3), 68–74.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.* Chicago: University of Chicago Press.

Liljedahl, P. (2004). *The AHA! Experience: Mathematical contexts, pedagogical implications.* Unpublished doctoral dissertation, Simon Fraser University, Burnaby, British Columbia, Canada.

National Council of Teachers of Mathematics (2014). *Principles To Actions: Ensuring Mathematical Success for All.* Reston, VA: NCTM

Neill, S. (1991). *Classroom nonverbal communication.* London: Routledge.

Presmeg, N. (2014). Creative advantages of visual solutions to some non-routine mathematical problems. In S. Carreira, N. Amado, K. Jones & H. Jacinto, (Eds.), *Proceedings of the Problem@Web International Conference: Technology, Creativity and Affect in mathematical problem solving* (pp. 156-167). Faro, Portugal: Universidade do Algarve.

Vale, I. (prelo). A visualização uma ferramenta poderosa de comunicação em matemática**.** In *Atas da CIEMeLP 2015: Conferência Internacional do Espaço Matemático em Língua Portuguesa* 28 a 31 de outubro de 2015, Coimbra, Portugal.

Vale, I. (2009). Das tarefas com padrões visuais à generalização. XX SIEM. In J. Fernandes,

ISBN 978-84-945722-3-4

H. Martinho & F. Viseu (Orgs.), *Actas do Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 35-63). Viana do Castelo: APM.

Vale, I. & Barbosa, A. (2017). Comunicação matemática: a articulação entre ver, ouvir e falar. *Livro de atas do 1.º Encontro Internacional de Formação na Docência (INCTE)*. Bragança, Portugal: Instituto Politécnico de Bragança.

Vale, I., Pimentel, T. & Barbosa, A. (prelo). Chapter # The power of seeing in problem solving and creativity: an issue under discussion. In S. Carreira, N. Amado & K. Jones (Eds), *Broadening the scope of research on mathematical problem solving: A focus on technology, creativity and affect.* Springer.

Vale, I. & Pimentel, T. (2011) (eds). *Padrões em Matemática – Uma proposta didática no âmbito do novo programa para o Ensino Básico*. Lisboa: Texto Editores

Wood, L. (2012). Practice and Conceptions: Communicating Mathematics in the Workplace. *Educational Studies in Mathematics, 79*(1), pp. 109-125.

Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). *Visualization in teaching and learning Mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

ISBN 978-84-945722-3-4