

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES CON MATHEMATICA

Rubén Darío Santiago Acosta – Ma de Lourdes Quezada Batalla
ruben.dario@itesm.mx – lquezada@itesm.mx
Tecnológico de Monterrey, Campus Estado de México, México

Núcleo temático: V, Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Modalidad: P

Nivel educativo: 5, Formación y actualización docente (formación universitaria)

Palabras clave: Ecuaciones Diferenciales, OpenEdX, Aprendizaje adaptativo

Resumen

En este póster se presenta una propuesta educativa para la enseñanza de sistemas de ecuaciones diferenciales utilizando el paquete Mathematica. Se consideran ejemplos de sistemas mecánicos como péndulo simple y doble, movimiento de planetas, sistemas de masas y resortes, movimiento en la presencia de potenciales diversos, entre otros. Las ecuaciones de movimiento se obtienen a partir del hamiltoniano de cada sistema mecánico, y de las ecuaciones de Hamilton. Posteriormente se utiliza el método de Runge-Kutta RK4 para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales obtenido. Finalmente, se construyen interfaces gráficas interactivas para cada sistema propuesto, con ellas se analizan los fenómenos físicos estudiados. Como resultado, alumnos de ingeniería que usan y construyen interfaces gráficas han obtenido mejora en su comprensión de sistemas de ecuaciones diferenciales y su uso en mecánica clásica. Además, cambian sus ideas previas sobre el alcance de la física clásica y de las ecuaciones diferenciales, obtienen mayor confianza en sus conocimientos y pueden resolver problemas dinámicos mediante el uso de técnicas numéricas simples.

Introducción

El uso la modelación matemática en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales permite que los estudiantes desarrollen competencias de análisis, solución de problemas y uso de tecnología (Abudiab, 2001; Rodríguez, 2010; Rodríguez & Rivera, 2016). Santiago (2002) y Santiago & Quezada (2014) han propuesto utilizar tecnología móvil para construir laboratorios interactivos matemáticos que permitan el análisis de diferentes fenómenos físicos. Su propuesta radica en construir simuladores y que los estudiantes respondan preguntas sobre lo que observan y, a su vez, construyan sistemas o widgets similares.

En un curso de ecuaciones diferenciales, es común que se estudien sistemas mecánicos o físicos, como sistemas de dos masas interactuando mediante resortes, modelos de evolución dinámica de epidemias, o análisis de circuitos. Casi todos estos ejemplos se modelan mediante sistemas de

ecuaciones diferenciales lineales, lo que permite, en la mayoría de los casos, determinar soluciones analíticas. Sin embargo, el estudio de sistemas más complejos requiere el establecer una técnica que permita analizar diferentes posibilidades. Por ejemplo, un péndulo doble para oscilaciones no pequeñas se estudia con un sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden no lineal, o su equivalente, un sistema de cuatro ecuaciones de primer orden no lineales. En este trabajo se muestra un esquema simple para incorporar el estudio y análisis de sistemas mecánicos mediante el uso de un código RK4 simple para sistemas de ecuaciones diferenciales. El código fue escrito en el lenguaje Mathematica, lo que permite construir widgets genéricos de exploración computacional.

Sistemas de Ecuaciones en Mathematica

Para ilustrar la propuesta considere el sistema de dos masas m_1 y m_2 interactuando que se muestra en la figura 1. Las masas están ubicadas en x_1 , x_2 , sus velocidades están dadas por v_1 y v_2 . Lo que implica que sus cantidades de movimiento son $p_1 = m_1 v_1$ y $p_2 = m_2 v_2$.

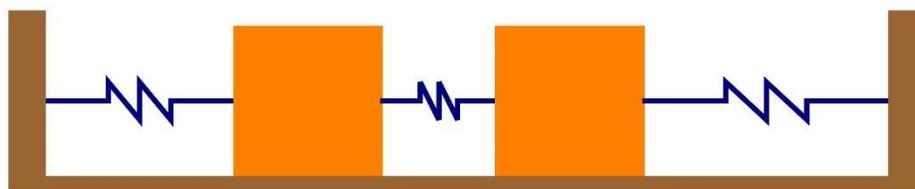


Figura 1. Sistema de dos masas interactuantes

Si los resortes tienen constantes k_1 , k_2 y k_3 entonces el hamiltoniano del sistema (energía) es

$$H = \frac{P_1^2}{2m_1} + \frac{P_2^2}{2m_2} + \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_3x_2^2$$

Las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento se determina mediante las ecuaciones de Hamilton (Goldstein, 1987), estas son:

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial P_1}; \quad \dot{x}_2 = \frac{\partial H}{\partial P_2}; \quad \dot{P}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1}; \quad \dot{P}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2}$$

La solución de estas ecuaciones se hace mediante el método de Runge Kutta RK4. La implementación en Mathematica requiere los programas rk4 y Hamilton (Espinosa et al, 2010). El primero resuelve numéricamente un sistema de ecuaciones diferenciales, ver tabla 1.

El segundo establece las ecuaciones de Hamilton y las resuelve numéricamente. Posteriormente, se construye un widget mediante el comando Manipulate del paquete Mathematica, en la figura 2 se muestra una imagen del widget. Allí se observa que el sistema se mueve de acuerdo a la solución de las ecuaciones diferenciales y es posible cambiar masas y constantes de resortes.

Tabla 1. El código para el método Runge Kutta y las ecuaciones de Hamilton

```

rk4s[func_,vars_,ci_,{n_,h_}]:=
Module[{m,vals,funciones,datos,regla,k,i,k1,k2,k3,k4},
  m=Length[vars];
  vals=ci;
  funciones=Prepend[func,1];
  datos=Table[
    regla=Table[vars[[k]]->vals[[k]},{k,1,m}];
    k1=h*funciones /.regla;
    regla=Table[vars[[k]]->vals[[k]]+k1[[k]]/2,{k,1,m}];
    k2=h*funciones/.regla;
    regla=Table[vars[[k]]->vals[[k]]+k2[[k]]/2,{k,1,m}];
    k3=h*funciones/.regla;
    regla=Table[vars[[k]]->vals[[k]]+k3[[k]},{k,1,m}];
    k4=h*funciones/.regla;
    vals=vals+(k1+2k2+2k3+k4)/6,{i,1,n}];
  datos=Prepend[datos,ci]]

hamiltonsol[ham_,{q_,p_},{q0_,p0_},{n_,h_}]:=Module[{qp,qa,pa,m,ec1,ec2},
  m=Length[q];
  ec1=Table[D[ham,p[[i]]],{i,1,m}];
  ec2=Table[-D[ham,q[[i]]],{i,1,m}];
  rk4s[Flatten[{ec1,ec2}],Flatten[{t,q,p}], Flatten[{0,q0,p0}],{n,h}]]

```

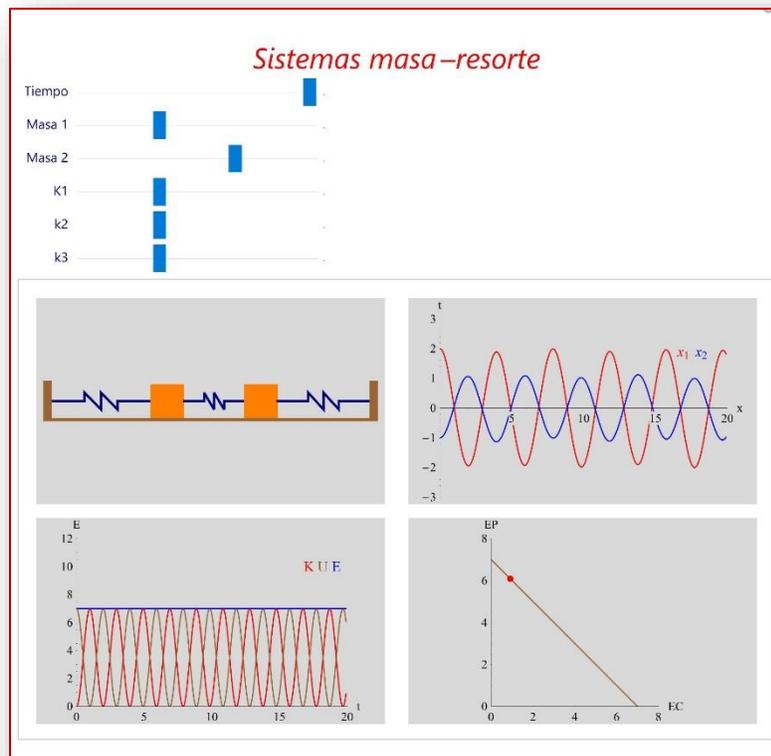


Figura 2. Widget para sistema de dos masas interactuantes

Propuesta en el aula

La actividad de construcción de widgets que modelan sistemas mecánicos se implementó en un curso de ecuaciones diferenciales donde los estudiantes recibieron como reto implementar algunos sistemas físicos como, por ejemplo: movimiento en la superficie de un cono, péndulo doble y triple o movimiento en un sistema solar binario. Participaron 28 estudiantes en el ciclo agosto-diciembre de 2016. Los resultados de los widgets se muestran en anexo A. La secuencia didáctica seguida fue:

- 1) Práctica de laboratorio sobre los métodos de Euler, Euler Modificado y Runge Kutta utilizando Mathematica.
- 2) Construcción de Widgets en Mathematica
- 3) Las ecuaciones de Hamilton de la mecánica y su solución
- 4) Sistema de dos masas interactuantes
- 5) Proyecto a desarrollar.
- 6) Presentación de proyectos

El trabajo se desarrolló en cuatro sesiones de hora y media. Al final los estudiantes evaluaron la actividad mediante una encuesta sobre tecnología. Los resultados de la encuesta indican mayor aprecio por el uso de Mathematica y de interfaces gráficas.

Conclusiones

La incorporación de herramientas tecnológicas en cursos de matemáticas permite a los estudiantes explorar conceptos y deducir conclusiones. Sin embargo, es necesario que los estudiantes profundicen sobre los conceptos mediante la creación de sus propias herramientas tecnológicas. En la propuesta de creación de interfaces o widgets interactivos sobre sistemas de ecuaciones diferenciales, los estudiantes logran comprender el potencial de las ecuaciones diferenciales y el papel que tienen en la mecánica actual. Los estudiantes cambian sus ideas previas sobre el alcance de la física clásica y de las ecuaciones diferenciales, obtienen mayor confianza en sus conocimientos y les permite resolver problemas dinámicos mediante el uso de técnicas numéricas simples.

Anexo A. Póster



SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES CON MATHEMATICA



Ma. de Lourdes Quezada Batalla, Rubén Darío Santiago Acosta.
 Tecnológico de Monterrey, Campus Estado de México, México.
 lquezaada@itesm.mx; ruben.dario@itesm.mx

Resumen

En este póster se presenta una propuesta educativa para la enseñanza de sistemas de ecuaciones diferenciales utilizando el paquete Mathematica. Se consideran ejemplos de sistemas mecánicos. Se utiliza el paquete para construir el hamiltoniano de cada sistema y sus correspondientes ecuaciones diferenciales de Hamilton. Posteriormente, se usa el método de Runge Kutta RK4 para resolver numéricamente éstas últimas. Finalmente, se construyen interfaces gráficas interactivas para cada sistema propuesto, con ellas se analizan los fenómenos físicos estudiados. Como resultado, alumnos de ingeniería que usan y construyen interfaces gráficas han obtenido mejora en su comprensión de sistemas de ecuaciones diferenciales y su uso en mecánica.

```

rk4[func_vars_<math>n_h</math>][n_h_]:=
Module[{m,vals,funciones,datos,regla,k1,k2,k3,k4},
m=Length[vars];
vals=ci;
funciones=Prepend[func,1];
datos=Table[
regla=Table[vars[[k]]^vals[[k]],{k,1,m}];
k1=h*funciones/.regla;
regla=Table[vars[[k]]^vals[[k]]+k1[[k]]/2,{k,1,m}];
k2=h*funciones/.regla;
regla=Table[vars[[k]]^vals[[k]]+k2[[k]]/2,{k,1,m}];
k3=h*funciones/.regla;
regla=Table[vars[[k]]^vals[[k]]+k3[[k]],{k,1,m}];
k4=h*funciones/.regla;
vals=vals+{k1+2k2+2k3+k4}/6,{1,1,m}];
datos=Prepend[datos,ci] ]

hamiltonian[ham_<math>(q_p_)</math>][q0_p0_][n_h_]:=
Module[{qp,qa,pa,pec1,ec2},
m=Length[q];
ec1=Table[D[ham,q][[[i]],{1,1,m}];
ec2=Table[D[ham,p][[[i]],{1,1,m}];
rk4[Flatten[{ec1,ec2}],Flatten[{t,q,p}],
Flatten[{0,q0,p0}],n,h] ]
    
```

Conclusiones

- ✓ El uso de interfaces gráficas interactivas permite analizar y comprender mejor los conceptos básicos relacionados con sistemas de ecuaciones diferenciales.
- ✓ Los estudiantes cambian sus ideas previas sobre el alcance de la física clásica y de las ecuaciones diferenciales, obtienen mayor confianza en sus conocimientos y les permite resolver problemas dinámicos mediante el uso de técnicas numéricas simples.

Referencias

- Abudab, M. (2001). The impact of technology on teaching an ordinary differential equations course. *Journal of Computing Sciences in Colleges*, 16(3), 7-18.
- Santiago, R. & Quezada, L. (2014). Laboratorio de Matemáticas. Recuperado de <http://laboratoriomatematicas.itesm.mx>.
- Goldstein, H. (1987). *Mecánica clásica*. Reverté.

Referencias

- Abudiab, M. (2001). The impact of technology on teaching an ordinary differential equations course. *Journal of Computing Sciences in Colleges*, 16(3), 7-18.
- Espinosa, E., Canals, I., Muñoz, I., Pérez, R., Prado, C., Santiago, R., & Ulín, C. (2010). *Ecuaciones diferenciales ordinarias introducción*
- Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y Enseñanza de la Modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 13 (4-1), 191-210.
- Rodríguez, R. & Rivera, S. (2016). El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 19(1), 99-124.
- Santiago, R. (2002). Ecuaciones diferenciales bajo resolución de problemas con apoyo de Learning-Space y Mathematica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 15(2), 893-898.
- Santiago, R. & Quezada, L. (2014). *Laboratorio de Matemáticas*. <http://laboratoriomatematicas.weebly.com> Consultado 10/Mayo/2017
- Goldstein, H. (1987). *Mecánica clásica*. Reverté.