DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD DE GRANADA

INVENCIÓN DE PROBLEMAS POR ESTUDIANTES DE SECUNDARIA: EVALUACIÓN DE SU CONOCIMIENTO SOBRE SIMBOLISMO ALGEBRAICO

Trabajo de fin de master que presenta

ELENA FERNÁNDEZ MILLÁN

Dirigido por la doctora

Dª MARTA MOLINA

Granada, 2013

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD DE GRANADA

INVENCIÓN DE PROBLEMAS POR ESTUDIANTES DE SECUNDARIA: EVALUACIÓN DE SU CONOCIMIENTO SOBRE SIMBOLISMO ALGEBRAICO

Trabajo Fin de Master presentado por

Dª. Elena Fernández Millán

para la obtención del título

Máster en Didáctica de la Matemática

Tutora:

Dª. Marta Molina

GRANADA, 2013

Esta investigación ha sido realizada en el seno del Grupo de Investigación FQM-193 del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía “Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico” de la Universidad de Granada.

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a la doctora Dª Marta Molina por su orientación, dedicación y paciencia a lo largo de la realización de este trabajo.

Agradecer también enormemente a Erika Burgos su colaboración, por haberme permitido trabajar con sus alumnos y por el interés mostrado a lo largo de la realización del trabajo. Gracias también al instituto Algazul por hacer posible su colaboración.

A mis familiares y amigos y todos los que han sabido entender la ilusión y el esfuerzo dedicados en esta nueva etapa de mi vida. Gracias también por aguantar mis largas charlas sobre educación.

Muy especialmente gracias a la persona que me ha hecho tener una permanente sonrisa durante todos los días de la recta final de este trabajo.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

CAPÍTULO 1: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La investigación que se recoge en esta memoria persigue, en términos generales, indagar en el significado que los estudiantes dan al simbolismo algebraico, al finalizar la Educación Secundaria Obligatoria (ESO), a través de la actividad de invención de problemas. En este primer capítulo, antes de concretar el problema de investigación presentando el objetivo general y los objetivos específicos que de él se derivan, justificamos el interés de esta investigación desde una triple perspectiva: personal, curricular y desde la investigación en el área.

1. JUSTIFICACIÓN PERSONAL

En mi corta experiencia como profesora he observado persistentes dificultades en el aprendizaje del álgebra, en concreto, en el uso del simbolismo algebraico, por alumnos de diferentes niveles de educación secundaria; opinión que coinciden en expresar otros docentes (ej., Rodríguez-Domingo, 2011; Vega-Castro, 2010). Consideramos que algunas de estas dificultades están relacionadas con el significado que los estudiantes atribuyen al simbolismo algebraico y su concepción de para qué se utiliza este. Estas dificultades interfieren, en particular, al abordar tareas que requieren la transición entre el simbolismo algebraico y otros sistemas de representación, entre ellos el sistema de representación verbal.

Por otra parte nos interesamos por la invención de problemas como herramienta para obtener información sobre el significado que los estudiantes dan a este simbolismo, por ser una tarea que no están habituados a realizar y que les requiere dar significado a expresiones simbólicas.

2. JUSTIFICACIÓN CURRICULAR

Para justificar desde un punto de vista curricular el interés de realizar esta investigación, concretamos el papel que se le confiere al simbolismo algebraico dentro de los documentos curriculares. Nos apoyamos en los estándares del NCTM (2000), los Common Core State Standards Americanos (2010) y en tres documentos curriculares vigentes en el contexto nacional y autonómico en el que se enmarca el estudio, estos son:

- REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.

- DECRETO 231/2007, de 31 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía.
- ORDEN de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía.

En estos documentos nacionales y autonómicos se pone de manifiesto que con la enseñanza del álgebra se contribuye tanto a la consecución de los objetivos de la materia, como a la adquisición de las competencias básicas. Destacamos el objetivo "Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar el lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en procesos matemáticos o científicos como en los distintos ámbitos de la vida". (BOE, 2006, p. 752)

A lo largo de la etapa de la ESO se pretende que los estudiantes adquieran destrezas algebraicas de forma progresiva, a través del uso y manejo de símbolos y expresiones. Para ello es necesario el trabajo con la simbolización y la traducción entre lenguajes desde los primeros cursos:

> (…) las destrezas algebraicas se desarrollan a través de un aumento progresivo en el uso y manejo de símbolos y expresiones (…). La construcción del conocimiento algebraico ha de partir de la representación y transformación de cantidades. El trabajo con patrones y relaciones, la simbolización, la traducción entre lenguajes son fundamentales en los primeros cursos. (…) No menos importante resulta la interacción entre los distintos tipos de lenguaje: natural, numérico y gráfico, geométrico y algebraico como forma de ligar el tratamiento de la información con la experiencia de los alumnos. (BOE, 2006, p. 751)

En la competencia matemática se señala la importancia de adquirir la habilidad de relacionar diferentes formas de expresión, en particular la algebraica y verbal:

> (…) consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números y sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad (…). (BOE, 2006, p. 687)

Los alumnos deben ser capaces en esta etapa de utilizar adecuadamente el lenguaje algebraico. La traducción entre lenguajes contribuye también a la adquisición del conocimiento algebraico:

> La adecuada utilización progresiva de símbolos y expresiones contribuirá al desarrollo natural de las destrezas algebraicas, que se facilitará con la lectura e interpretación simbólica de las situaciones problemáticas que se planteen y, en sentido inverso, con la traducción al lenguaje verbal de expresiones y resultados algebraicos. De esta manera, las Matemáticas deberán concebirse, entre otras muchas cosas, como un vehículo de comunicación y expresión de ideas, que contribuirá a la comprensión de otras materias. (BOJA, 2007b, p. 53 y 54)

En el bloque de contenidos de álgebra, en los diferentes cursos encontramos variados contenidos relacionados con el simbolismo algebraico:

- Primer curso: "Empleo de letras para simbolizar números inicialmente desconocidos y números sin concretar. Utilidad de la simbolización para expresar cantidades; Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano al algebraico y viceversa; (…) Valoración de la precisión y simplicidad del lenguaje algebraico". (BOE, 2006, p. 753)
- Segundo curso: "Lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones; Significado de las ecuaciones y soluciones; Resolución de ecuaciones de primer grado. Transformación de ecuaciones en otras equivalentes. Interpretación de la solución; (…) Utilización de las ecuaciones para resolver problemas". (BOE, 2006, p. 754)
- Tercer curso: "Traducción de situaciones del lenguaje verbal al algebraico; Resolución de ecuaciones de primer y segundo grado. Sistemas de ecuaciones lineales; Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas. Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad del lenguaje algebraico." (BOE, 2006, p. 756)
- Cuarto curso: "Manejo de ecuaciones en diferentes contextos; Resolución gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones. Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas." (BOE, 2006, p. 757 y 759)

En los Common Core State Standards Americanos (2010) se hace una propuesta de qué deben entender y ser capaces de hacer los estudiantes a lo largo de las diferentes etapas educativas. En lo que respecta al simbolismo algebraico, los estudiantes comienzan a trabajarlo desde el grado 6, ellos deben "escribir, leer y evaluar expresiones en las que las letras significan números" (p.43), comienzan a trabajar con ecuaciones de primer grado con una variable, "usar variables para representar números y escribir expresiones para resolver un problema del mundo real o matemático y resolver problemas del mundo real y matemáticos mediante la escritura y resolución de una ecuación de primer grado, donde los coeficientes y los términos independientes son número positivos" (p. 44). En el grado 7 los estudiantes continúan con la resolución de problemas matemáticos y de la vida real utilizando expresiones numéricas y algebraicas y ecuaciones. En el grado 8 comienzan a trabajar con ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales. En niveles posteriores los estudiantes deben interpretar las partes de una expresión tales como términos, factores y coeficientes, escribir expresiones equivalentes para resolver problemas o crear ecuaciones para resolver problemas y que describan números y relaciones.

Por otro lado se subraya la importancia de traducir expresiones algebraicas en expresiones verbales y viceversa (NCTM, 2000). También en los Common Core State Standards Americanos (2010), en relación con el simbolismo algebraico, se menciona que los estudiantes matemáticamente competentes deben ser capaces de transformar expresiones algebraicas en otros sistemas de representación, estableciendo correspondencias entre ecuaciones y descripciones verbales, entre otros. Por otro lado, han de comprender el significado del simbolismo utilizado.

En todos los documentos curriculares consultados se pone de manifiesto la importancia que se le concede al simbolismo algebraico desde el primer curso de la ESO. A lo largo de esta etapa se pretende que los alumnos manejen los símbolos y expresiones algebraicas, sean capaces de traducir entre lenguajes, simbólico y verbal principalmente, y plantear ecuaciones para resolver problemas entre otros. Consideramos que para todo ello es necesario que los estudiantes den el significado apropiado, y sepan utilizar e interpretar el simbolismo algebraico, lo cual motiva nuestro trabajo de investigación.

3. JUSTIFICACIÓN DESDE LA INVESTIGACIÓN

Diversas investigaciones tanto a nivel nacional como internacional han indagado en la compresión del simbolismo algebraico de estudiantes de secundaria. Ejemplos de ellas son Küchemann (1981), Booth (1984), Kieran (1979, 1981), MacGregor y Stacey (1997) o Filloy y Rojano (1989), que atienden a dicha comprensión desde diferentes perspectivas. Otras investigaciones, más que indagar en la comprensión de dicho simbolismo, se centran en clasificar los errores o las dificultades que manifiestan los alumnos cuando trabajan con expresiones simbólicas; ejemplos de ellas son Kirshner (1989), Ruano, Socas y Paralea (2008), Cerdán (2010) o Castro (2012). Estos estudios muestran que a pesar del tiempo que se dedica al aprendizaje del álgebra, y en concreto al uso del simbolismo algebraico, en la etapa de secundaria, los estudiantes cometen reiterados errores en el manejo del mismo que sugieren deficiencias en su capacidad para dotarle de significado. Estos resultados motivan nuestro interés por indagar en dicha capacidad.

En cuanto al uso de la invención de problemas, investigaciones como Castro (2011) han argumentado su utilidad como tarea evaluadora: esta tarea aporta información sobre las habilidades de los alumnos para usar su conocimiento matemático; diversos trabajos como Ayllón y Castro (2002), Ayllón, Castro y Molina (2010) o Silver, Kilpatrick y Schlesinger (1990) así lo muestran.

Dentro del área de investigación en educación matemática, la invención de problemas ha recibido atención desde múltiples perspectivas. Por ejemplo en el PME 33 se creó un grupo llamado “Problem posing in mathematics Learning: Establishing a Theoretical Base for Research” centrado en tratar las siguientes temáticas: invención de problemas como un componente integral en las matemáticas escolares; contrastes entre los componentes cognitivos de la invención de problemas y la resolución de problemas en el pensamiento matemático; invención de problemas y diálogo en las clases de matemáticas; procesos de invención de problemas y cómo llevan a la creatividad (Singer, Ellerton y Cai, 2013). La continuación de este debate en el PME 35, en 2011, llevó a nuevas preguntas e investigaciones sobre las formas en las que la invención de problemas puede llegar a ser más natural y formar parte de las aulas de matemáticas en todos los niveles. Entre las preguntas que se discutieron, estaba la posibilidad de utilizar la invención de problemas como una herramienta evaluadora.

No obstante, hemos encontrado en la literatura pocas investigaciones que utilicen la invención de problemas como tarea para evaluar la comprensión del simbolismo algebraico. Solamente Isik y Kar (2012) analizan las dificultades que se presentan cuando profesores en formación inventan problemas sobre ecuaciones.

Las investigaciones mencionadas anteriormente, así como el hecho de que la actividad de invención de problemas sea objeto de interés en la comunidad científica, motivan nuestro interés para utilizar la invención de problemas como herramienta evaluadora.

Cabe señalar que este trabajo se enmarca dentro de una línea de investigación en la viene profundizándose dentro del grupo de investigación FQM-193 del Plan Andaluz de

Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía "Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico" de la Universidad de Granada. En este grupo se han realizado ya varios trabajos relativos a la didáctica del álgebra, tanto desde la perspectiva de la propuesta Early-Algebra como relativos al álgebra propia de educación secundaria y bachillerato. Algunos de estos trabajos han centrado su atención en los procesos de traducción entre representaciones y en la comprensión del simbolismo algebraico por parte de los estudiantes (ej., Cañadas, 2007; Martínez-Videla, 2011; Molina, 2006; Rodríguez-Domingo, 2011), siendo ambas dos componentes destacadas de este trabajo de investigación. En el marco de estos trabajos este estudio persigue seguir avanzando en la comprensión de la problemática de la enseñanza/aprendizaje del álgebra.

4. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

El objetivo general de esta investigación es analizar la capacidad para dotar de significado a expresiones simbólicas que ponen de manifiesto un grupo de estudiantes al final de la Educación Secundaria Obligatoria, a través de la tarea de invención de problemas.

Este objetivo general se concreta en los siguientes objetivos específicos relativos a la tarea de inventar problemas resolubles mediante ciertas ecuaciones o sistemas de ecuaciones dados:

1. Analizar la estructura sintáctica de los problemas que inventan los estudiantes y compararla con el tipo de ecuación o sistema de ecuaciones al que corresponden.
2. Distinguir el significado que dan los estudiantes a los diferentes componentes de las ecuaciones dadas, atendiendo en particular a las estructuras semánticas de los problemas inventados.
3. Identificar características de las ecuaciones que dificultan a los estudiantes la tarea de inventar un problema.

Adicionalmente nos proponemos un cuarto objetivo complementario que por limitaciones de tiempo no ha podido ser tratado en el trabajo recogido en esta memoria: identificar qué entienden los alumnos por problemas en los que es necesario el uso del simbolismo algebraico para su resolución.

Tomando estos objetivos como referencia, hemos elaborado la fundamentación teórica de este trabajo, el diseño de la recogida de datos y el análisis de los datos obtenidos.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

En este capítulo presentamos el marco teórico de esta investigación el cual se centra en dos términos clave en relación a los cuales se ha definido previamente el problema de investigación: el simbolismo algebraico y la invención de problemas. La información que se presenta permite enmarcar la investigación realizada y precisar el significado de los términos que utilizamos. Seguidamente describimos el estado de la cuestión en relación con ambas componentes del problema de investigación planteado previamente, sintetizando los resultados de los principales estudios previos consultados.

Antes de abordar ambas cuestiones, recogemos algunas ideas generales sobre el álgebra como parte de las matemáticas y como campo de investigación desde la educación matemática, que nos aportan una visión más amplia del marco en que se sitúa esta investigación.

1. ÁLGEBRA: DEFINICIÓN Y CAMPO DE INVESTIGACIÓN

En sus comienzos, desde la época de al-Khwârizmî (780 – 850) y hasta Vieta (1540 – 1603) y Euler (1707 – 1783), el álgebra se refería en su totalidad a procedimientos y notaciones. Este punto de vista del álgebra, como herramienta para manipular símbolos y para resolver problemas, ha sido reflejado en el álgebra del currículo escolar desde que se desarrolló y tomó forma a lo largo del S.XIX y el S. XX (Kieran, 2007). En un estudio del desarrollo histórico del álgebra realizado a finales del pasado siglo, según Kieran (1992), se define el álgebra como la rama de las matemáticas que se encarga de simbolizar relaciones numéricas generales y estructuras matemáticas y de las operaciones con estas estructuras.

El álgebra ha recorrido un largo camino hasta alcanzar los niveles de especialización en el siglo XX, como señalan Castro, Godino y Rivas (2009). Factores tanto culturales como intramatemáticos han impulsado esta especialización, en la cual ha permanecido su poder representacional.

Recientemente, tratando de dar una descripción precisa de lo que define actualmente el álgebra escolar, diferentes autores han identificado varias concepciones del álgebra. Entre ellos cabe destacar a Usiskin (1998), Bednarz, Kieran y Lee (1996), Drijvers y Hendrikus (2003) y Drijvers, Goddijn y Kindt (2011). Los Common Core State Standards Americanos (2010) también identifican diferentes componentes o visiones del álgebra a considerar en su enseñanza.

Los citados investigadores muestran que con el paso de los años ha habido una evolución en lo que se ha entendido por álgebra y coinciden en señalar el álgebra como una parte de las matemáticas que presenta múltiples conexiones con la aritmética, la geometría y el análisis.

Drijvers y Hendrikus (2003), por ejemplo, distinguen las siguientes concepciones: álgebra para expresar generalización a través de patrones y fórmulas, álgebra para resolver problemas, álgebra como el estudio de relaciones y funciones, y álgebra como un sistema de representaciones simbólicas. Estos autores señalan que estas concepciones están conectadas unas con otras y no han de tratarse de forma separada.

En cuanto a las diferentes investigaciones realizadas en el campo de álgebra escolar también se observa una evolución sobre los temas que se han ido tratando. Sintetizamos a continuación la revisión de la misma realizada por Kieran (2007). Durante la primera mitad del S.XX, las investigaciones en el aprendizaje y enseñanza del álgebra se centraban en la dificultad relativa de resolver varios tipos de ecuaciones lineales y en los errores que los estudiantes de álgebra cometen al aplicar procedimientos. En la década de los 50 y principios de los 60, las investigaciones en esta temática fueron llevadas a cabo mayoritariamente por psicólogos, quienes utilizaban la materia como un vehículo para estudiar cuestiones relativas al desarrollo de habilidades o de la memoria. Más adelante, desde finales de la década de los 70, cuando los investigadores en la didáctica del álgebra comenzaron a aumentar en número y a constituirse como grupo, los estudios pasaron a centrarse en el significado que los alumnos dan al álgebra, así como en el análisis de las diferentes formas a través de las cuales se puede hacer significativo, para los alumnos, el aprendizaje del álgebra.

Entre las razones que han promovido el cambio de temática en la investigación, Kieran señala en primer lugar la influencia en la investigación en educación matemática de las ideas de Piaget sobre el desarrollo cognitivo. Así mismo se ha observado que los estudios centrados exclusivamente en desarrollar habilidades y técnicas para la enseñanza del álgebra, no han sido exitosos en conducir a que los estudiantes sean expertos en el álgebra. De ahí el cambio de temática en la investigación en didáctica del álgebra desde finales de los 70 y los 80. A partir de la década de los 80 la investigación en este campo sugiere nuevas formas de pensamiento o trata sobre el contenido que compone el álgebra de la educación secundaria, así como la introducción de actividades algebraicas en la educación primaria (Kaput, 1995), que podría ayudar a eliminar algunos de los obstáculos asociados al álgebra de secundaria. Por último, la llegada de las nuevas tecnologías está influyendo también en la reformulación de las concepciones sobre qué debe ser enseñado en el álgebra escolar y en la investigación sobre la didáctica del álgebra.

2. SIMBOLISMO ALGEBRAICO

A la hora de definir el simbolismo algebraico es necesario tener en cuenta su relación con el lenguaje algebraico pues hay autores que lo consideran como parte de éste, mientras que otros identifican ambos términos.

En Molina (2012) se pone de manifiesto que el término lenguaje algebraico es utilizado por algunos autores como sinónimo de simbolismo algebraico mientras que otros, como Drouhard y Teppo (2004), refieren a una parte del lenguaje matemático formado por simbolismo algebraico, lenguaje natural y representaciones algebraicas compuestas (ej., tablas, diagramas, gráficos,..). Desde esta perspectiva, Drouhard (2001) y Kirshner (1987) han demostrado que cumple los requisitos que desde la lingüística se le imponen a un lenguaje (Molina, 2012).

En este trabajo, utilizaremos el término simbolismo algebraico para referirnos al sistema de representación que se caracteriza por el empleo de forma escrita de numerales, letras y signos característicos de la aritmética y el álgebra. Entendemos por sistema de representación un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, con reglas y convenios, que nos permiten expresar aspectos y propiedades de un concepto sin agotarlo por sí solo (Castro y Castro, 1997).

2.1 Desarrollo del simbolismo algebraico

En Kieran (1992) se presenta un análisis histórico del desarrollo del simbolismo algebraico distinguiendo tres etapas. La primera etapa en la evolución del simbolismo algebraico se caracterizaba por el uso de descripciones en el lenguaje ordinario para resolver un tipo particular de problemas, y por la falta del uso de símbolos o signos especiales para representar incógnitas. La segunda etapa introduce el uso de letras para cantidades desconocidas; en este periodo el principal objetivo de los algebristas era descubrir la identidad de las letras más que expresar generalidad. Hasta el S. XVII no se desarrolló verdaderamente el simbolismo algebraico o álgebra simbólica, a partir de aquí fue posible expresar soluciones generales y usar el álgebra como una herramienta para establecer reglas gobernadas por relaciones numéricas. Durante los siglos siguientes, el crecimiento del simbolismo llevó al desarrollo de otros conceptos matemáticos como el de función.

Implícito en el desarrollo del simbolismo algebraico está la evolución gradual del álgebra desde una perspectiva procedimental a una estructural. Antes de la invención del simbolismo algebraico por Vieta, la esencia del álgebra era resolver determinados tipos de problemas dándole significado a prescripciones verbales que envolvían una mezcla de lenguaje natural y caracteres especiales. La invención de una notación condensada permitió al álgebra ser más que meramente una herramienta procedimental, esto permitió a las formas simbólicas ser usadas como objetos estructurales.

2.2 Componentes del simbolismo algebraico

Castro (2012) identifica las siguientes componentes del simbolismo algebraico atendiendo a las dificultades que los mismos ocasionan a los estudiantes:

- *Variables:* símbolos literales que se utilizan para representar incógnitas, números generalizados o argumentos de funciones (Kieran, 1992; Usiskin, 1987). La investigación muestra que, en sus primeras aproximaciones al álgebra, los estudiantes no entienden el significado de las letras y comúnmente las interpretan como suplencia de objetos o palabras (MacGregor y Stancey, 1997), esto puede entorpecer la construcción del concepto de variable. Se señala como impedimento por ejemplo el asignar una letra como nombre de una persona, pudiendo así asumir que las letras son abreviaturas. Hay estudiantes que adquieren cierta facilidad en la rutina de manipular variables y pueden trabajar con ellas aunque no tengan plena comprensión de las mismas (Wagner, 1983). Por ejemplo cuando las variables representan incógnitas a veces no entienden que las letras tienen un valor específico. Estudios como Küchemann (1981) muestran que solo un porcentaje muy pequeño de estudiantes entre 13-15 años puede interpretar una letra como un número generalizado.
- *Signos:* símbolos que denotan operaciones o relaciones de igualdad u orden. Algunas dificultades en el aprendizaje del álgebra están asociadas al uso de los símbolos (Wagner y Parker, 1999), en particular la correcta interpretación del signo de igualdad es esencial para el aprendizaje del álgebra (Carpenter, Franke y Levi, 2003; Molina, Castro y Castro, 2009). Es importante a la hora de transformar una expresión en otra, en la simplificación de expresiones o en los procedimientos de solución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

- *Expresiones:* Una expresión algebraica es una descripción de unas operaciones que contienen signos y emplean dos sistemas de símbolos distintos, letras y números. Su uso conlleva economía en la notación pero al ajustarse las letras y los números a diferentes reglas, causa dificultades para los estudiantes (Wagner y Parker, 1999).
- *Estructura de las expresiones algebraicas:* Se ha argumentado que muchas de las dificultades de los estudiantes con el álgebra simbólica y las transformaciones en la misma, son debidas a falta de percepción o reconocimiento de la estructura de las expresiones (Hoch y Dreyfus, 2004; Vega-Castro, Molina, Castro, 2011).

2.3 Características del simbolismo algebraico

El simbolismo algebraico como sistema de representación posee unas características que lo diferencian de otros. Algunas de ellas han sido implícitamente mencionadas en los apartados previos como es el caso de la polisemia de algunos de sus símbolos (ej., las letras pueden representar: incógnitas, números generales o argumentos de funciones).

Kieran (1992) y Socas (1997) señalan que al movernos desde las descripciones en lenguaje ordinario, de una situación o un problema y sus soluciones, hacia las representaciones simbólicas se produce una pérdida de significado. Socas (1997) considera que el uso en el aula de la representación verbal favorece la interpretación de los signos utilizados en el lenguaje algebraico pero que el lenguaje matemático en general, y el simbolismo algebraico en particular, es más preciso que el lenguaje natural ya que está sometido a reglas exactas y es necesario interpretar de manera correcta los signos utilizados. Además señala la posibilidad de lecturas secuenciales y no secuenciales de expresiones simbólicas.

Drijvers, Goddijn y Kindt (2011) ponen de manifiesto que el álgebra utiliza su propio sistema de signos, símbolos y reglas estandarizadas sobre cómo se puede escribir algo; el álgebra tiene su propia gramática y sintaxis y esto hace posible formular ideas algebraicas de forma inequívoca y compacta. En este sistema de representación los signos y símbolos pueden ser manipulados con unas reglas bien establecidas que no se refieren a un contexto específico. Por otro lado también señalan que la gramática algebraica va de la mano con la formalización y la abstracción, así a través del simbolismo algebraico se pueden expresar ideas algebraicas de una forma diferente de la inicial, planteando un problema de forma más concreta.

Como características del sistema de representación simbólico también cabe destacar la alta presencia de información no explícita u omitida y una baja presencia de información irrelevante o confusa, en comparación con otros sistemas de representación como el verbal, el tabular o el gráfico (Bossé, Adu-Gyamfi, y Cheetham, 2011).

Castro (2012) menciona que tanto en su sintaxis como en su semántica, el simbolismo algebraico se aleja del lenguaje natural y también del lenguaje aritmético (Rojano, 1994), lo cual no facilita darle significado. Muchos de los errores sintácticos se explican por el hecho de que el uso del simbolismo algebraico está restringido al aula, en desventaja que con el uso de la lengua vernácula. A esto hay que añadir el carácter formal del lenguaje algebraico.

2.4 Sentido simbólico

Arcavi (1994) introduce la noción de sentido del símbolo como una meta deseada en la enseñanza de las matemáticas, en concreto en la enseñanza del álgebra. No obstante señala que una definición explícita de este constructo no es viable debido a la complejidad y variación en todo lo que se necesita para utilizar con eficacia y razonar con diferentes formas simbólicas del álgebra. Por ello este autor aporta una serie de descriptores, y señala ejemplos para cada uno de ellos, que utiliza para caracterizar el sentido del símbolo en el dominio de álgebra en secundaria. Entre los descriptores que da este autor destacamos los siguientes:

1) Apreciación del poder de los símbolos que incluye lo que los símbolos pueden y no pueden hacer: señala que los individuos que saben realizar manipulaciones algebraicas, pero no consideran la posible importancia de los símbolos para revelar la estructura de un problema, no han desarrollado completamente su sentido simbólico. Tener sentido simbólico, según Arcavi, es tener los símbolos disponibles como una herramienta para tomar decisiones.

2) Capacidad para determinar cuándo abandonar el uso de símbolos y recurrir a otras formas de representación: en ocasiones un problema algebraico es más fácil de resolver cuando recurrimos a otras técnicas o sistemas de representación, como el gráfico, que a través de la manipulación simbólica.

3) Capacidad de “leer” expresiones y ecuaciones: consiste en interrumpir la manipulación simbólica que hacemos mecánicamente, por ejemplo cuando resolvemos una ecuación, con el objetivo de ver el significado que hay detrás de esos símbolos.

4) Capacidad para diseñar formas simbólicas de acuerdo a un propósito: Arcavi sugiere que, dados los símbolos, el sentido simbólico incluye ver el significado que ellos tienen, por lo que se caracteriza, en primer lugar, por la apreciación de que se puede crear una expresión simbólica para un determinado propósito, en segundo lugar darse cuenta de qué tipo de expresión simbólica es la necesaria para nuestro propósito, y por último incluye la habilidad de crear la expresión buscada de forma satisfactoria.

5) Conocimiento de los diferentes roles que los símbolos juegan en diferentes contextos. Este conocimiento consiste en reconocer la multitud de significados que pueden tener los símbolos en función del contexto y la habilidad de manejar los diferentes objetos y procesos que ellos conllevan.

2.5 Antecedentes

Las investigaciones que hemos consultado relativas al problema de investigación considerado en este trabajo hacen referencia a múltiples aspectos. Las sintetizamos aquí distinguiendo dos grupos según el foco en el que se hace mayor énfasis en cada trabajo: (1) aquellas que hacen referencia a la compresión del simbolismo algebraico y la capacidad general de sentido simbólico de los estudiantes y (2) las relativas a los errores que cometen los alumnos y dificultades que ponen de manifiesto cuando trabajan con el simbolismo algebraico.

2.5.1 Investigaciones relacionadas con la compresión del simbolismo algebraico y sentido simbólico de los estudiantes

Kieran (2007) hace una revisión de investigaciones sobre didáctica del álgebra las cuales clasifica por niveles de edad de los sujetos implicados, y por tipos de tareas consideradas distinguiendo entre generalización, transformación o tareas de alto nivel (a las que llama meta-globales). En dicha revisión señala que las investigaciones más antiguas relativas al significado que los estudiantes atribuyen a variables, expresiones y ecuaciones, llevadas a cabo con alumnos de edades de entre 11 y 15 años, se centraban en los siguientes aspectos:

- Cómo los alumnos interpretan los símbolos algebraicos. Por ejemplo Küchemann (1981) por medio de un test realizado a 1000 estudiantes de 14 años de edad analizó los diferentes significados que atribuían a las letras. Clasificó las interpretaciones de los estudiantes sobre las letras en álgebra en dos grandes grupos: en el primero la letra es ignorada, le dan un valor arbitrario o bien es usada como el nombre de un objeto, y en el segundo la letra es usada como un número desconocido específico o como un número generalizado. Cada uno de estos grupos fue dividido en dos categorías en función de las demandas cognitivas de acuerdo con la complejidad de cada apartado del test, dando en total cuatro niveles que Küchemann asoció con los niveles de desarrollo cognitivo identificados por Piaget. El autor concluyó con que la mayoría de los estudiantes participantes en su estudio eran incapaces de ver las letras en álgebra como cantidades desconocidas o como números generalizados.

- Análisis de la experiencia aritmética previa y formas de pensamiento. Por ejemplo Booth (1984) realizó una investigación sobre el conocimiento algebraico de estudiantes entre 13 y 17 años de edad. Todos los alumnos cometían errores relacionados con el diferente enfoque que requiere la actividad algebraica en comparación con la aritmética, el uso de la notación y convenciones específicas del álgebra, el significado de las letras y variables, y el tipo de relaciones y métodos utilizados en aritmética. En aritmética la finalidad de las actividades es encontrar un número particular como respuesta, mientras en álgebra no siempre es así y muchos estudiantes tienden a buscar una respuesta numérica. Por otro lado, también señala que muchas de las dificultades que los alumnos muestran en álgebra se debe a una falta de comprensión en aritmética, dado que una de las concepciones del álgebra es como aritmética generalizada, esa fata de comprensión se traslada al álgebra.
- Comprensión de la notación con signos específicos como paréntesis o el signo igual. Kieran (1979) muestra que los estudiantes normalmente no utilizan paréntesis porque consideran que la secuencia escrita de operaciones determina el orden en que deben ser operadas, además muchos piensan que el valor de una expresión permanece invariable si el orden de cálculo cambia. Otros autores (ej, Behr, Erlwanger y Nicolas, 1976) muestran que estudiantes desde doce a catorce años normalmente ven el signo igual de una forma unidireccional que precede a una respuesta numérica y no como una relación de equivalencia.

Trabajos más recientes (ej, ver revisión de Kieran, 2007) sugieren factores adicionales que inciden en la interpretación de la notación algebraica por los estudiantes, no necesariamente vinculados a niveles de desarrollo cognitivo. Por ejemplo MacGregor y Stacey (1997), a partir de un estudio con 2000 estudiantes australianos de entre 11 y 15 años, presentan evidencias de la existencia de orígenes específicos de la interpretación incorrecta que dichos estudiantes hacen de las letras en álgebra, que en la literatura se han pasado por alto. Los orígenes de estas interpretaciones incorrectas de las letras en álgebra evidenciados por los autores son: supuestos intuitivos y de razonamiento pragmático de una nueva notación, analogías con sistemas de símbolos familiares, interferencia del nuevo aprendizaje en matemáticas, y el efecto del mal uso de los materiales de enseñanza. Según estos autores estos orígenes pueden estar o no estar asociados con el nivel cognitivo.

Otras investigaciones centran su atención en el concepto de variable al considerarlo fundamental para que los alumnos progresen en álgebra e incorporan a su trabajo en el aula tecnologías tales como la calculadora u hojas de cálculo. Este es por ejemplo el caso de Graham y Thomas (2000) quienes realizan un estudio utilizando un módulo de trabajo basado en calculadoras gráficas, lo cual proporciona un ambiente donde los estudiantes pueden experimentar algunos aspectos de las variables y comenzar a construir la comprensión de las mismas. Las calculadoras gráficas se destacan en este estudio como un instrumento que ayuda a alcanzar una mejora significativa en la comprensión de los estudiantes.

Hay investigaciones que se han centrado en obstáculos conceptuales que tienen lugar cuando los estudiantes pasan a operar con ecuaciones que tienen una incógnita a un lado del signo igual, a ecuaciones más complejas con incógnitas a ambos lado del signo igual. Filloy y Rojano (1989), realizaron un estudio con alumnos de 12 y 13 años mostrando que la transición de ecuaciones con la incógnita a un lado del signo igual, tales como $x+27=58$, a ecuaciones con la incógnita a ambos lado del signo igual, como $38x+72=56x$, no tienen lugar de forma inmediata. Para esta transición es necesario adquirir algunos elementos de la sintaxis algebraica, la construcción de dichos elementos se basan en el conocimiento aritmético solo hasta cierto punto, después hay lo que ellos llaman un “corte didáctico” con las nociones aritméticas.

Van Amerom (2003) observa que las capacidades de razonamiento y simbolización se desarrollan de forma independiente, ya que aunque en su estudio había estudiantes que eran capaces de escribir ecuaciones para representar problemas, no utilizaban estas ecuaciones para encontrar la solución y preferían utilizar métodos más informales. Koedinger y Nathan (2004) también detectan que los estudiantes tienen más éxito resolviendo problemas matemáticos de álgebra simples, que resolviendo ecuaciones matemáticas equivalentes, y argumentan que esto es debido a las dificultades de los alumnos para comprender las representaciones simbólicas de relaciones cuantitativas. De hecho solamente un 5% de los estudiantes traducían los problemas en forma de ecuación. Según los autores "el lenguaje simbólico del álgebra presenta nuevas demandas que no son comunes en inglés o en la pasada experiencia de los alumnos con el lenguaje simbólico aritmético" (p. 149).

2.5.2 Investigaciones relacionadas con errores y dificultades al trabajar con el simbolismo algebraico

En la revisión que hace Kieran (2007) de las investigaciones sobre la didáctica del álgebra, también recoge investigaciones relacionadas con los tipos de errores que los estudiantes cometen en actividades de transformación de expresiones algebraicas. Por ejemplo en la investigación de Kirshner (1989) señala que los errores cometidos no son debidos a una ausencia de control teórico, sino de una percepción errónea de la estructura de la expresión. También menciona investigaciones como la de Carry, Lewis y Bernard (1980) quienes trabajan sobre los tipos de errores a la hora de resolver ecuaciones algebraicas o Sleeman (1984) que realiza una clasificación de los errores que cometen 24 estudiantes de 14 años de edad al presentarles una tarea algebraica a través del sistema Leeds Modelling System.

Ruano, Socas y Paralea (2008) hacen una clasificación de los errores que cometen alumnos de 4º de ESO y 1º de Bachillerato en tres procesos específicos del lenguaje algebraico: la sustitución formal, la generalización y la modelización. Sitúan los errores que cometen los alumnos en relación con tres orígenes distintos: obstáculo, ausencia de sentido y actitudes afectivas y emocionales. Los errores más cometidos relativos a los procesos de sustitución formal son, en la fase de sustitución: (1) no usar paréntesis donde es necesario, suele tener su origen en la ausencia de sentido o bien en un obstáculo, y (2) relacionado con la necesidad de clausura, generalmente tiene su origen en un obstáculo cognitivo, también (3) la necesidad de particularizar las expresiones algebraicas aparece como un error que tiene su origen en la ausencia de sentido del lenguaje algebraico; en la fase de desarrollo de las expresiones los errores más cometidos son: (1) la necesidad de clausura y (2) el uso incorrecto de la propiedad distributiva. En el proceso de modelización los errores más cometidos son: el de particularizar, el cambio de registro incorrecto y la confusión de las operaciones multiplicación y potencia, todos ellos suelen tener su origen en una ausencia de sentido del lenguaje algebraico. Como conclusión cabe destacar que los errores más cometidos de forma general son la necesidad de clausura, la particularización de expresiones, el uso incorrecto del paréntesis y la confusión de la multiplicación y la potencia. Por otro lado la mayoría de los errores tienen su origen en una ausencia de sentido.

Cerdán (2010) es otro de los autores que ha centrado su atención en los errores que los cometen los estudiantes cometen; en su caso analiza los procesos de traducción del sistema de representación verbal al simbólico algebraico. El estudio al que aquí aludimos se centra en el análisis de las igualdades incorrectas producidas por estudiantes de BUP en dicho proceso. Propone un catálogo de errores que se divide en tres categorías: errores en el uso de las letras, errores en la construcción de expresiones algebraicas y errores en la construcción de la igualdad. En las producciones persistentes de los problemas estudiados se diagnosticaron los siguientes errores: (a) de polisemia: una cantidad es designada con más de una letra, una letra se utiliza para designar a más de un número o una cantidad, o una letra se utiliza para designar otra cantidad diferente de la que le fue expresamente atribuida a tal literal; (b) de operación: la relación entre dos o más cantidades se expresa con otra operación diferente a las que las relaciona; (c) de inversión: la relación entre dos o más cantidades se expresa con la operación inversa a la que las relaciona; (d) de igualdad: las cantidades referidas por las expresiones de un lado y otro de la igualdad son diferentes; (e) de arbitrariedad: resto de casos.

Rodríguez-Domingo, Molina, Cañadas y Castro (2011) llevan a cabo una investigación, en la que analizan y clasifican los errores en los que incurren estudiantes de 4º de E.S.O. al realizar traducciones del sistema de representación simbólico y verbal, en ambos sentidos, mediante la cumplimentación de un dominó algebraico diseñado para la investigación. Los errores cometidos se clasifican en tres categorías con sus correspondientes subcategorías: I. Según la completitud del enunciado; II. Derivados de la aritmética; III. Derivados de las características propias del lenguaje algebraico. Al transformar enunciados del sistema de representación simbólica a verbal: dentro de la categoría II los estudiantes incurren en errores debidos al mal uso de la interpretación de la operación potencia y producto, dentro de la categoría III los estudiantes incurren en errores debidos a la generalización y errores de variables. En cuanto a la traducción de enunciados del sistema representación verbal al simbólico, destacan los errores dentro de la categoría III, debidos a la particularización en un solo enunciado, errores relacionados con variables y errores de complicación estructural. Finalmente observan que el 75% de los errores analizados correspondían a las traducciones del sistema de representación verbal al simbólico.

En un trabajo de reflexión sobre estudios previos, Castro (2012) atiende a las dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar las cuales clasifica en aquellas que son intrínsecas al objeto, otras que son inherentes al propio sujeto, y aquellas que son consecuencia de las técnicas de enseñanza. Según esta autora, en relación al álgebra como generalización de la aritmética muchos de los errores que se producen al trabajar el álgebra escolar se justifican, bien desde la falta de conocimiento de los estudiantes sobre el mismo asunto en aritmética, o bien porque el conocimiento aritmético supone un obstáculo para el algebraico.

3. INVENCIÓN DE PROBLEMAS

La invención de problemas es una actividad utilizada por diversos investigadores en el ámbito de la educación matemática, que ha tomado fuerza en los últimos años. Sin embargo, según señalan Singer et al. (2013), no se trata de una herramienta nueva; Sócrates (469 a. C. – 399 a. C) estableció un método eficiente de aprendizaje, a través de un diálogo continuo basado en inventar y responder preguntas para estimular el pensamiento crítico y clarificar ideas. Lo que sí es más reciente es el conocimiento de los efectos positivos que proporcionan la inclusión de esta herramienta en las aulas de matemáticas (Singer et al., 2013). Estos autores señalan que en los últimos 25 años ha ido aumentando el interés en este campo y se han llevado a cabo diversas investigaciones con diferentes propósitos.

3.1 Bondades de la invención de problemas

Las ventajas que se le reconocen a la invención de problemas en el campo de la didáctica de la matemática han sido señaladas por varios investigadores, entre ellos la profesora Castro, de cuyo trabajo extraemos las siguientes seis bondades que se le reconocen a esta actividad:

- Una ventaja hace referencia al incremento del conocimiento matemático de los estudiantes, ya que para inventar un problema el individuo tiene que relacionar conceptos que ha ido adquiriendo a lo largo de su etapa educativa, y además se llevan a cabo una serie de tareas propias del aprendizaje.
- La segunda ventaja hace referencia a la motivación.
- La tercera ventaja está relacionada con la ansiedad que a algunos estudiantes produce su relación con las matemáticas. Las investigaciones realizadas argumentan que el

trabajo en invención de problemas reduce el miedo y preocupación por las matemáticas que en muchos casos padecen los alumnos.

- Otra ventaja hace alusión a que se disminuyen los errores matemáticos habituales que los estudiantes cometen, ya que esta actuación induce al alumno a elegir la información que ha de utilizar en la resolución del problema y a seleccionar los datos con los que ha de operar, haciendo que los errores resolutivos disminuyan.
- La quinta ventaja alude a la creatividad, ya que inventar problemas ayuda positivamente al desarrollo de la creatividad.
- Una sexta ventaja está relacionada con la tarea evaluadora del profesorado, se refiere a la posibilidad de utilizar la invención de problemas para evaluar ciertas capacidades matemáticas de los estudiantes. Permite evaluar, en los estudiantes, su conocimiento, su forma de razonar y su desarrollo conceptual.

La sexta virtud que tiene la tarea de invención de problemas es la que nosotras utilizamos en el presente trabajo. Consideramos que para inventar un problema los estudiantes tienen que utilizar el conocimiento adquirido y relacionar diferentes conceptos. Por otro lado es una tarea con la que los estudiantes no están acostumbrados a trabajar, por lo que nos puede proporcionar información sobre el significado que realmente dan al simbolismo algebraico.

3.2 Investigaciones sobre la invención de problemas

Los trabajos dedicados a la invención de problemas tienen diferentes propósitos y se han llevado a cabo con sujetos de diferentes edades. Según argumentan Singer et al. (2013) dentro de la investigación en educación matemática es un campo diverso al que le falta definición y estructura.

Además de centrarse en las diferentes bondades que se le reconocen a la invención de problemas la investigación en esta temática, según Singer et al. (2013) ha atendido a otras cuestiones tales como:

- Cuándo deben tener lugar las sesiones de invención de problemas y cómo han de ser.
- Definir las características de la invención de problemas, identificando varias subcategorías de esta tarea y posibles relaciones e interdependencias entre la invención y la resolución de problemas (Singer, Ellerton, Cai y Leung, 2011; Stoyanova y Ellerton, 1996).

- Identificar diferentes formas de generar nuevos problemas (Silver, Mamona-Downs, Leung y Kenney, 1996).
- La influencia de la enseñanza en esta actividad. Se tienen evidencias de que un entrenamiento sistemático, centrado en la modificación de problemas a través de varios sistemas de representación, y la adición o exclusión de algunos elementos diferentes al problema inicial, junto con la comparación entre los problemas resultantes, con el objetivo de encontrar diferencias y similitudes entre ellos, así como el análisis de problemas incompletos o redundantes, puede aumentar el conocimiento de los alumnos de la consistencia y el significado de los problemas (Singer, 2007, 2010).

3.3 Clases de problemas

La expresión “problema” presenta varias acepciones en los diccionarios y son varios los investigadores (e.g. Moliner, 1996; Seco, Andrés y Ramos, 1999) que han intentado dar una definición precisa de la misma[1]. Si nos centramos en problema matemático, en la literatura encontramos varias definiciones dadas por diferentes autores, entre ellos Polya (1962), o Schoenfeld (1985). Nosotras nos acogemos a la acepción adoptada por Ayllón (2012): se tiene un problema cuando existe una situación en la que es necesario superar un obstáculo para lograr una meta.

En el contexto de esta investigación nos interesa la definición de problema algebraico (en el contexto del álgebra escolar). Sin embargo dentro de la investigación en didáctica de la matemática, no es clara la distinción entre problemas aritméticos y algebraicos. Según se pone de manifiesto en Martínez (2011) hay autores como Cerdán (2008) y Palarea y Socas (1995) que plantean que la diferencia depende de la forma de resolución, y por tanto es dependiente del sujeto. Martínez considera en su trabajo el planteamiento desarrollado por Cerdán (2008) que trabaja en torno a la Familia de Problemas Aritmético-Algebraico (FPAA), la que entiende como el grupo formado por problemas del ámbito escolar que podrían resolverse, bien utilizando varias operaciones aritméticas elementales, bien mediante el planteamiento y resolución de ecuaciones. Dentro de un problema algebraico existen diferentes tipos de cantidades, unas son los datos o cantidades conocidas y otras las incógnitas o cantidades desconocidas.

[1] En Ayllón (2012) se recogen algunas de ellas.

3.4 Formas de inventar un problema

Adoptando las palabras de Koichu y Kontorovich (2012) nos referimos a la invención de un problema matemático como el proceso mediante el cual los estudiantes construyen interpretaciones personales de situaciones concretas, y las formulan como problemas matemáticos con significado.

Por formas de inventar un problema, entendemos las diferentes situaciones ante las que se puede enfrentar un estudiante cuando se le plantea la tarea de inventar problemas. Varios autores aportan clasificaciones al respecto. Castro (2011) recoge la clasificación de Silver (1994) y Stoyanova (2000), que está relacionada con la información que se le da al estudiante cuando se le propone la tarea. Dicha clasificación es la siguiente:

a) situación libre, solamente se requiere que el estudiante proponga problemas;
b) que proponga un problema que responda a una respuesta dada;
c) que se proponga un problema a partir de una cierta información proporcionada;
d) proponer problemas teniendo en cuenta una situación dada;
e) inventar problemas que se puedan resolver con un cálculo dado.

La tarea que se proponemos a los estudiantes en nuestro estudio se corresponde con la e), en la que nosotros plantemos a los estudiantes una ecuación o sistemas de ecuaciones y ellos tienen que inventar un problema, cuya resolución requiera del planteamiento de dicha ecuación o sistema de ecuaciones.

3.4 Antecedentes

En este trabajo la invención de problemas nos proporciona una herramienta para indagar en el significado que los estudiantes dan al simbolismo algebraico. Por tanto nos hemos interesado por los estudios previos sobre invención de problemas que atienden bien a su utilidad para evaluar o a su uso en relación con la didáctica del álgebra.

3.4.1 Investigaciones que utilizan la invención de problemas para evaluar

Son variadas las investigaciones que utilizan la tarea de invención de problemas para indagar en el conocimiento o habilidades de estudiantes de diferentes niveles. Cobo, Fernández y Rico (1986) presentan un trabajo de investigación con alumnos de educación primaria en el que la invención de problemas se utilizaba para evaluar el uso que los alumnos hacen de los números, el significado atribuido a los mismos y las relaciones que se establecen entre ellos, ya sea dentro o fuera de las operaciones.

Cázares, Castro y Rico (1998) a partir de situaciones semiestructuradas de compra-venta, analizan las producciones de un grupo de alumnos de todos los cursos de primaria y establecen cuatro niveles de desarrollo evolutivo de la competencia aritmética de los estudiantes, según es manifestada en el proceso de invención de problemas aritméticos.

Ayllón (2012) lleva a cabo una investigación en la que indaga en los procesos de pensamiento aritmético que presentan alumnos de los diferentes cursos de Educación Primaria cuando inventan problemas en una situación semiestructurada. Estudia la concepción de problema y la utilizad de los problemas de los estudiantes, así como también analiza el tipo de enunciados que propone atendiendo a la coherencia, la estructura operatoria y el número de etapas.

También se han llevado a cabo trabajos en esta línea con profesores en formación. A modo de ejemplo citamos dos. Lin (2004) presenta un estudio realizado con profesores de aula inmersos en un proyecto entre cuyos objetivos se encuentra realizar una evaluación integral de la instrucción. La participación en el proyecto obliga a los profesores a generar tareas matemáticas que incluyan: a) estimular a los estudiantes a hacer conexiones entre ideas matemáticas; b) promover alta cualidad en la invención de problemas, la justificación y formas de pensamiento; c) generar tareas creativas que unan procesos y conceptos matemáticos; y d) generar tareas para evaluar qué y cómo los estudiantes aprenden.

Harel, Koichu y Manester (2006) tratan de caracterizar la forma de pensar de 24 profesores de algebra de educación secundaria americanos, a la hora de inventar problemas, a partir de la siguiente tarea a realizar oralmente: "Inventa un problema verbal cuya solución sea la realización de la operación $4/5$ dividido entre $2/3$". Distinguen dos formas de pensamiento: coordinada cuando en algún momento de la entrevista el profesor considera los números $4/5$ y $2/3$ como medidas de cantidades, y las cantidades son consideradas como argumentos de una operación aritmética, y descoordinada si utilizan puntos de referencia, esto quiere decir que el profesor en cuestión considera un determinado conocimiento como verdadero y lo utiliza como ancla para la planificación o seguimiento de la tarea. Como conclusiones obtienen que más del 60% de los profesores participantes en el estudio fueron capaces de formular un problema matemático que tuviera respuesta, mientras que solamente el 20% inventaron problemas “exitosos” según los criterios que ellos establecen para dicha consideración. Los investigadores sugieren que el obstáculo de no comprender el significado de la división de fracciones lleva a formular problemas descoordinados.

3.4.2 Investigaciones sobre didáctica del álgebra que utilizan la invención de problemas

Algunos trabajos consultados utilizan la invención de problemas para indagar en aspectos de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar o universitaria. En Cai y Hwang (2002) comparan las habilidades que tienen estudiantes chinos y americanos de sexto grado en tareas tanto de resolver problemas como de inventarlos, utilizando problemas de patrones y generalización, así como la relación entre la resolución e invención de dichos problemas. En cuanto a la invención de problemas observan que los estudiantes chinos, que utilizan estrategias abstractas y representación simbólica, tienen mayor éxito que los americanos que utilizan estrategias concretas y representaciones pictóricas. El estudio revela diferentes relaciones entre la invención y la resolución de problemas, siendo éstas más estrechas en el caso de los estudiantes chinos.

Por su parte Akkan, Çakıroğlu y Ünal (2009) señalan que estudiantes de 12 a 15 años tienen menos éxito en inventar problemas sobre ecuaciones que en resolverlos, además mencionan que los estudiantes son mejores en inventar problemas que corresponden a ecuaciones aritméticas que en inventar problemas que corresponden a ecuaciones algebraicas.

Otros autores como Kojima, Miwa y Matsui (2009) utilizan la invención de problemas algebraicos para promover el aprendizaje, en este caso implementando un sistema mediante un programa informático que hace que los alumnos aprendan mediante imitación. Los estudiantes han de inventar una variedad de problemas, que se resuelven con una ecuación de primer grado a partir de un ejemplo dado y en el que se van alterando diferentes características. Los autores evalúan los problemas inventados por los alumnos mediante la identificación de categorías en función de las similitudes en cuanto a la situación y a la solución entre el ejemplo dado y el problema inventado. El objetivo de un futuro estudio es analizar la efectividad del método de enseñanza.

En el contexto universitario encontramos el trabajo de Brody y Rosenfield (1996) quienes indagan en las dificultades que tienen los estudiantes cuando entran en contacto con el álgebra lineal y abstracta en los primeros cursos de universidad y proponen un nuevo método para trabajar esta parte de las matemáticas a través de problemas abiertos o exploración libre de situaciones de problemas. A través de la invención de problemas introducen nociones como dependencia e independencia del conjunto de objetos y relaciones; bases, base canónica o dimensión; estructura y dualidad.

3.4.3 Investigaciones que utilizan la invención de problemas para evaluar el conocimiento algebraico

A pesar de que la invención de problemas es un tema que ha ido ganando interés en los últimos 25 años en el campo de la investigación en educación matemática, los propósitos de la utilización de dicha herramienta son muy variados y existen aún escasos estudios que atiendan a esta temática. En concreto solo hemos encontrado un trabajo que utilice la invención de problemas como herramienta de evaluación de conocimiento algebraico. Isik y Kar (2012) analizan las dificultades que manifiestan profesores en formación cuando inventan problemas sobre ecuaciones de primer grado con una incógnita y sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Distinguen siete tipos de dificultades las cuales están relacionadas el lenguaje, el realismo del problema y con la falta de relación entre las ecuaciones de los sistemas. Para las ecuaciones de primer grado las dificultades identificadas son: traducción incorrecta de la notación matemática (D1); asignación de valores no realistas a las incógnitas de los problemas inventados (D2); cambio de la estructura de la ecuación en el problema inventado (D3); uso de simbolismo algebraico en el enunciado del problema (D4) y fallo al establecer una relación parte-todo (D5). Para los sistemas de ecuaciones identifican las dificultades D1, D2 y D4, otras dos: inventan problemas separados para cada una de las ecuaciones que forman el sistema (D6) y fallo al establecer una relación entre las variables (D7).

CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA

Este capítulo se divide en tres apartados, en los que caracterizamos el tipo de investigación desarrollada, describimos los sujetos participantes en el estudio y detallamos el diseño de los instrumentos a partir de los cuales recogemos los datos con el fin de dar respuesta a los objetivos de investigación de este trabajo.

1. TIPO DE INVESTIGACIÓN REALIZADA

Esta investigación es de naturaleza exploratoria y descriptiva ya que se dispone de poca información procedente de estudios previos en relación con la capacidad de estudiantes de Educación Secundaria de dotar de significado al simbolismo algebraico a través de la invención de problemas. Se persigue indagar en el conocimiento que han adquirido los alumnos sobre el simbolismo algebraico al fin de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria. En general se pretende recopilar información preliminar que sirva de fundamentación para el diseño y desarrollo de una investigación posterior más amplia dirigida a la realización de una tesis doctoral.

Se trata de una investigación transversal porque se hace en un momento determinado en el que se recoge información de un grupo de sujetos. La investigación es de carácter cualitativo y cuantitativo de acuerdo con los objetivos de investigación planteados en la misma y con los datos recogidos.

2. SUJETOS DE ESTUDIO

La población considerada para realizar la investigación la constituyen estudiantes de 4º curso de ESO matriculados en la materia de matemáticas opción A.

Se consideró una muestra de 20 alumnos inscritos en el curso académico 2012-2013 en el Instituto de Enseñanza Secundaria Algazul de Roquetas de Mar (Almería), centro en el que trabajó durante el curso 2011-2012 como profesora de matemáticas la alumna de master que presenta este trabajo. El centro tiene varios grupos para cada curso de ESO.

La selección de los estudiantes fue intencional, atendiendo a la disponibilidad del centro. Todos los estudiantes forman parte del mismo grupo de clase. Para referirnos a los sujetos protegiendo su identidad, usaremos una notación compuesta por la letra A y un número que se ha asignado aleatoriamente a cada uno de los alumnos; así hay estudiantes numerados desde A1 hasta A20.

El poder adquisitivo de los habitantes de la zona donde se encuentra el centro educativo es de nivel bajo, y las condiciones socio-culturales también. Todo ello condiciona la situación escolar de este alumnado. Al menos cinco de los estudiantes con los que se lleva a cabo la investigación pertenecen a hogares desestructurados y con problemas económicos. La asistencia a clase de los estudiantes es regular salvo en dos de ellos.

En cuanto al rendimiento en la asignatura de matemáticas el nivel del grupo es heterogéneo, pudiendo calificarlo de medio. Tres estudiantes tienen la asignatura pendiente del curso anterior y una gran parte de los alumnos proceden de agrupamientos flexibles bajos, por lo que aun teniendo la asignatura aprobada del curso anterior parten de un nivel bastante inferior. Les presenta especial dificultad la resolución de problemas y el pensamiento lógico.

Respecto a su conocimiento previo, desde el primer curso de la Educación Secundaria han trabajado con ecuaciones, comenzando por ecuaciones de primer grado con una incógnita y problemas relacionados, posteriormente ecuaciones de segundo grado, sistemas de ecuaciones lineales y no lineales con dos incógnitas y problemas con los mismos. En el curso académico 2012 – 2013 habían concluido su trabajo en estos contenidos cuando se realizó la recogida de datos.

3. DISEÑO DEL INSTRUMENTO

Los instrumentos utilizados para la recogida de datos son un cuestionario escrito (ver Anexo 1) y una puesta en común, grabada en audio para su posterior transcripción (ver Anexo 3) y análisis. Con el diseño de ambos instrumentos, su aplicación y el posterior análisis de los datos obtenido, pretendemos alcanzar los objetivos de esta investigación planteados en el primer capítulo (ver relación en Tabla 1).

Tabla 1

Distribución de objetivos de investigación e instrumentos de evaluación

Instrumento de evaluación	Objetivo de investigación			
	O1	O2	O3	O4
Cuestionario				
Parte 1	X	X	X	X
Parte 2				X
Puesta en común			X	X

3.1. Cuestionario

A continuación describimos y justificamos el diseño del cuestionario utilizado, detallando las variables de tarea consideradas y las modificaciones realizadas en su diseño inicial a partir de una prueba piloto realizada con estudiantes de 3º de E.S.O. Por último detallamos el modo en que fue implementado en el aula.

3.1.1. Diseño del cuestionario

El cuestionario elaborado se divide en dos partes. En la primera parte se pide a los estudiantes que inventen problemas en cuya resolución puedan utilizarse ciertas ecuaciones o sistemas de ecuaciones dados. También han de señalar si, en cada caso, les resulta, fácil, regular o difícil inventarse el problema.

En total se les proponen cinco ecuaciones y dos sistemas de ecuaciones (ver Tabla 2). Incluimos tanto ecuaciones con una incógnita, de primer y segundo grado, como sistemas de ecuaciones con dos incógnitas, lineales y no lineales. Estas expresiones aparecen dentro de los contenidos que se reflejan en el currículo de Educación Secundaria y habían han sido previamente trabajados por los alumnos a los que se les aplica el cuestionario.

Todos los números con los que se trabaja son números enteros, tanto los coeficientes de las incógnitas, como los términos independientes y las soluciones de las ecuaciones. Así mismo si los alumnos resolviesen las ecuaciones obtendrían siempre números enteros. De este modo queremos reducir la limitación que la resolución pueda ejercer en el contexto del problema a inventar. El resto de variables de tarea consideradas son:

- Número de incógnitas: Incluimos cinco ecuaciones con una incógnita y dos sistemas de ecuaciones con dos incógnitas, uno de ellos lineal y otro no lineal. Todos ellos tienen una única solución para cada una de las incógnitas, puesto que no se han trabajado en clase ecuaciones y sistemas de ecuaciones con más de una solución para cada una de las incógnitas.
- Número de miembros con incógnita: Los sistemas de ecuaciones tienen ambas incógnitas a un único lado del signo igual, cuatro ecuaciones tienen la incógnita a un solo lado de la igualdad, y una ecuación la tiene a ambos lados del signo igual. El hecho de contemplar esta variable a la hora de seleccionar las ecuaciones se debe a que en estudios previos (Isik y Kar, 2012) se destaca como un elemento que condiciona la dificultad de la tarea de inventar problemas.

- Posición de la incógnita: En tres de las ecuaciones en las que la incógnita está a un solo lado de la ecuación, ésta se encuentra a la derecha del signo igual, en las tres restantes, se encuentra a la izquierda.
- Coeficiente de la incógnita: En cuatro ecuaciones y sistemas de ecuaciones, las incógnitas tienen coeficiente igual a uno y en tres de ellos diferente a uno. Hemos tenido en cuenta esta variable debido a que en los libros de texto revisados encontramos variación en el coeficiente de las incógnitas.
- Operación de la incógnita: Consideramos las operaciones de incógnitas entre si, y las de las mismas con los términos independientes. En cuatro de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones esta operación es suma o resta, en las tres restantes se presenta además la operación multiplicación.

En la tabla 2 presentamos las ecuaciones y sistemas de ecuaciones considerados caracterizados en función de las variables de tarea que los diferencian.

Tabla 2

Asignación de variables a las ecuaciones

		Variable de tarea				
Nº	Ecuación	Nº de incógnitas	Nº miembros con incógnita	Coeficiente de la incógnita	Operación de la incógnita	Posición de la incógnita
1	$8 = x + 6$	1	1	1	Suma	Derecha
2	$2x - 1 = 9$	1	1	$\neq 1$	Suma	Izquierda
3	$x + 10 = 6x$	1	2	$\neq 1$	Suma	Ambos lados
4	$16 = x^2$	1	1	1	Multiplicación	Derecha
5	$\left.\begin{array}{r} 5x + 3y = 69 \\ x + y = 15 \end{array}\right\}$	2	1	$\neq 1$	Suma	Izquierda
6	$\left.\begin{array}{r} x + y = 7 \\ xy = 10 \end{array}\right\}$	2	1	1	Multiplicación	Izquierda
7	$20 = x(x + 1)$	1	1	1	Multiplicación	Derecha

En lo que respecta al orden de presentación de las ecuaciones y sistemas hemos tenido en cuenta las siguientes consideraciones. Se presentan tal cual suelen aparecer en los libros de texto: ecuaciones de primer grado con una incógnita, ecuaciones de segundo grado con una incógnita, sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas y sistemas de ecuaciones no lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas. Dentro de las ecuaciones de primer grado, el orden es el que nosotros hemos considerado de más fácil a más difícil.

La ecuación número 7, a pesar de ser de segundo grado, la hemos situado al final del cuestionario, por dos motivos. En primer lugar, por la longitud del cuestionario, como pretendemos que los alumnos traten de inventar problemas tanto con ecuaciones como con sistemas de ecuaciones, si no les da tiempo a realizarlo entero preferimos que sea esa ecuación la que no trabajen. En segundo lugar, porque consideramos que inventar un problema con la ecuación número 7, es más complicado y no queremos que los estudiantes le dediquen mucho tiempo y dejen otros apartados sin trabajar, a pesar de indicar en las instrucciones previas a la realización, que si algún apartado les resulta muy difícil pasen al siguiente.

En la segunda parte del cuestionario, se les plantea a los alumnos la siguiente pregunta: *Para resolver algunos problemas se necesitan solo números y operaciones, en cambio, para resolver otros, hay que utilizar símbolos algebraicos como la x o la y. ¿Cómo tiene que ser un problema para haya que utilizar símbolos algebraicos para su resolución?*

3.1.2. Estudio piloto

A partir de un primer diseño del cuestionario, que incluía únicamente la primera parte del mismo, decidimos realizar una prueba piloto con los siguientes objetivos:

1. Comprobar si los alumnos eran capaces de inventar problemas para las ecuaciones o sistemas de ecuaciones propuestos.
2. Comprobar si 60 minutos de tiempo eran suficientes para la realización de la prueba.

Para ello se aplicó la primera parte del cuestionario a 13 alumnos de 3º de ESO de un instituto de la localidad de Granada. Estos alumnos previamente habían recibido formación relativa a la resolución de ecuaciones con una incógnita, con dos incógnitas y sistemas de ecuaciones lineales, así como problemas relacionados. No habían trabajado aún los sistemas de ecuaciones no lineales. Antes de resolver el cuestionario, por iniciativa propia, la profesora de los alumnos les pidió que indicasen el nivel de dificultad que ellos considerasen para la invención de cada uno de los problemas.

Las ecuaciones y sistemas de ecuaciones incluidos en la prueba piloto fueron análogos a los de la versión final salvo los que ocupan la posición 1, 4 y 7, que consistieron respectivamente en $x+6=8$, $x^2=16$ **y** $x(x+1)=20$. Explicamos a continuación el pilotaje que dio lugar a dichos cambios.

Observaciones tras la implementación del cuestionario piloto

Según las respuestas de los estudiantes, las ecuaciones fueron consideradas mayoritariamente fáciles o de dificultad media, mientras que los sistemas de ecuaciones eran considerados difíciles. Observamos que muchos de los problemas que los alumnos consideran fáciles de inventar no corresponden a la ecuación o sistema dado. El caso contrario, el hecho de considerarlos difíciles y ser adecuados para la expresión dada, también se da en alguno de los problemas. Respecto a la invención de problemas correcta o incorrectamente, para las ecuaciones 1 y 4 se obtiene una mayoría de enunciados inventados correctos. El sistema de ecuaciones número 5 es con el que más dificultad tienen los estudiantes a la hora de inventar un problema de forma correcta.

La mayoría de los alumnos son capaces de inventar problemas para las ecuaciones o sistemas de ecuaciones propuestos, objetivo 1 de la prueba piloto. Son muy pocos los alumnos que se dejan problemas sin inventar. En el caso del problema 7, no se han considerado las respuestas de algunos estudiantes que son iguales entre sí, pues nos consta que la profesora les facilitó un ejemplo de cómo hacerlo.

Los estudiantes trabajaron el cuestionario durante una clase ordinaria de 60 minutos, y se observa que en su mayoría son capaces de finalizar la prueba, por lo que consideramos que es tiempo suficiente para llevar a cabo el cuestionario, objetivo 2 de la prueba piloto.

Podemos señalar diferentes observaciones respecto a los problemas planteados por los alumnos, entre las que destacamos las siguientes: algunos contextos no tienen sentido aunque el problema sea resoluble con la ecuación o sistema de ecuaciones propuesto, en algunos problemas faltan dados o el texto no tiene sentido. Se observa además que la mayoría de los problemas que se han considerado como buenos, son poco originales y algunos de ellos están mal expresados. Encontramos numerosos enunciados de teoría de números[2].

Modificaciones realizadas al cuestionario a partir del estudio piloto

A partir de las observaciones expuestas en el apartado anterior, se decidió hacer las siguientes modificaciones en el cuestionario:

- Incluir en cada recuadro las opciones de fácil, regular o difícil, para que los alumnos indiquen el nivel de dificultad que ellos asignan a la tarea de inventar cada problema.
- Modificar las ecuaciones 1, 4 y 7, incluyendo una nueva variable de tarea, posición de la incógnita, de tal forma que la incógnita se encuentre a la derecha del signo igual, ver tabla 2. El motivo del cambio es que la mayoría de los alumnos consideran que inventar problemas para estas ecuaciones es fácil, y se obtiene una mayoría de problemas inventados correctamente, lo que nos permite incluir esta nueva variable, y ver si influye en la capacidad de los estudiantes de dar sentido a la ecuación o sistema inventando un problema.

3.1.3. Implementación del cuestionario en el aula

Antes de repartir el cuestionario y de que los alumnos comiencen a trabajar con él, se realiza la siguiente presentación en la que se describen las instrucciones para la realización de la tarea y se les pide a los estudiantes su colaboración.

> *Hola, soy Elena Fernández, profesora de matemáticas. Este curso estoy realizado un Master en Didáctica de la Matemática, que consiste, entre otras cosas, en investigar sobre cómo se enseñan y aprenden las Matemáticas.*
> *En mi caso estoy llevando a cabo una investigación sobre el aprendizaje del álgebra por alumnos de Secundaria. Por ese motivo estoy hoy aquí para pediros vuestra colaboración respondiendo a un cuestionario. En cada recuadro, os tenéis que inventar el enunciado de un problema, el que vosotros queráis, que se pueda resolver con el planteamiento de cada una de las ecuaciones o sistemas de ecuaciones propuestos. Además, tenéis que indicar, con una X, si la invención del problema os resulta fácil, regular o difícil, tal y como se indica en cada uno de los recuadros.*
> *Si en alguno no sabéis qué poner podéis saltároslo y volver después cuando hayáis inventado los otros problemas.*
> *Cuando acabéis, tenéis que responder a una última pregunta en un folio aparte. La pregunta es ¿cómo debe ser una problema, para que sea necesario para su resolución utilizar símbolos algebraicos como pueden ser la x o la y?*

[2] Nos referimos a enunciados de teoría de números cuando son de un contexto puramente matemático. Por ejemplo, para la ecuación 2: *¿Qué numero al multiplicar por 2 y al restarle 1 te da como resultado 9?*

La pregunta debéis dejarla para el final, intentad inventar todos los problemas antes.
Es importante que trabajéis individualmente y en silencio. Si tenéis cualquier duda levantad la mano y yo iré a ayudaros.
Tenéis 50 minutos para realizar la prueba

3.2. Puesta en común

A continuación describimos y justificamos el diseño de la puesta en común, así como el modo en que fue implementada en el aula.

3.2.1. Diseño de la puesta en común

Una vez pasado el cuestionario a los alumnos, revisamos las respuestas y se planificó la puesta en común, que se llevaría a cabo el día siguiente. Con la misma esperábamos obtener información complementaria a la del cuestionario. Es este apartado presentamos y justificamos los problemas inventados por los alumnos que seleccionamos para comentar en la puesta en común, así como las preguntas a plantear a los estudiantes. Los problemas se presentan tal y como los escribieron los alumnos en el cuestionario

Seleccionamos problemas inventados en aquellas ecuaciones que causaron mayores dificultades a los estudiantes y en los que hubo mayor diversidad de respuestas, ya que consideramos que son los que nos podían proporcionar mayor información. Para trabajar en la puesta en común, a partir de un rápido análisis de las respuestas, elegimos una ecuación de primer grado, otra de segundo y un sistema de ecuaciones: en concreto, la ecuación número 3, de primer grado, la número 4, de segundo grado, y el sistema de ecuaciones número 5.

Seleccionamos algunas de las invenciones de los alumnos, cinco como máximo para cada ecuación o sistema de ecuaciones, incluyendo problemas incorrectos (en el sentido de que no correspondían a la ecuación o sistema dado) y también alguno correcto o incompleto. Descartamos los problemas de teoría de números y aquellos que no tienen sentido, es decir, con los que no es posible plantear una ecuación para su resolución.

Para cada uno de los problemas propuestos se planificó hacer preguntas generales tales como ¿se corresponde este problema con la ecuación o sistema de ecuaciones planteado?, ¿qué quiere decir que aparezca una incógnita, x o y, en una ecuación? o ¿cómo se podría corregir el problema para que se corresponda con la ecuación o sistema de ecuaciones planteado?, antes de indagar en aspectos específicos con preguntas adicionales. La planificación de la puesta en común de cada una de las ecuaciones y el sistema se presenta en las figuras 1, 2 y 3.

<table>
<tr><td>Nº</td><td>ECUACIÓN</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$x+10=6x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">PREGUNTAS INICIALES</td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Se corresponde la resolución este problema con la ecuación?; ¿Qué diferencias hay entre la ecuación y el problema?; ¿Cómo podríamos reformular el problema para que se resolviese con la ecuación propuesta?</td></tr>
<tr><td colspan="2">PROBLEMAS SELECCIONADOS</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1. (A1 – 3) Tengo tres bolsas en una tengo 10 caramelos en la otra tengo 6 veces mas y en la tercera nose. ¿Cuantos caramelos hay.</td><td><u>OBSERVACIONES</u>: No se puede resolver principalmente porque no establece ninguna igualdad; No se corresponde con la ecuación plantea, no relaciona correctamente los coeficientes con las incógnitas.</td></tr>
<tr><td><u>PREGUNTAS ADICIONALES</u>: ¿Cuál es la incógnita en el problema?; ¿Qué relaciones hay entre la incógnita de la ecuación y los coeficientes?; ¿Existen esas relaciones en el problema?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2. (A4 – 3) La edad de Luis es 6 veces la edad de Andrea más 10. ¿Cuántos años tiene Luis?</td><td><u>OBSERVACIONES</u>: No se puede resolver principalmente porque presenta dos incógnitas.</td></tr>
<tr><td><u>PREGUNTAS ADICIONALES</u>: ¿Cuál es la incógnita en el problema?; ¿Cuántas incógnitas hay en la ecuación?; ¿Qué habría que cambiar en el problema para que solamente hubiese una sola incógnita?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3. (A9 – 3) Queremos averiguar cuantos discos hay en 10 cajas si en cada caja caben 6.</td><td><u>OBSERVACIONES</u>: No es necesario el simbolismo algebraico para su resolución.</td></tr>
<tr><td><u>PREGUNTAS ADICIONALES</u>: ¿Qué quiere decir el hecho de que aparezca una incógnita en la ecuación?; ¿Está presente esa incógnita en el problema?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4. (A11 – 3) Tengo 10 conejos, y me regalan el mismo número de conejos que a mi vecino. Si mi vecino tiene 6 conejos y ahora tenemos los mismos. ¿Cuántos conejos me dierón?</td><td><u>OBSERVACIONES</u>: Mal planteado porque no estable la relación entre coeficiente 6 y la incógnita.</td></tr>
<tr><td><u>PREGUNTAS ADICIONALES</u>: ¿Qué relación hay entre la incógnita y los números de la ecuación?; ¿Aparecen esas relaciones en el problema inventado?</td></tr>
</table>

Figura 1. Planificación de la puesta en común de la ecuación 3

Para la puesta en común de la ecuación número 4, se pediría a los estudiantes que durante unos minutos comenten con el compañero de al lado, por qué los problemas planteados no se resuelven con dicha ecuación, y posteriormente se realizarían las preguntas iniciales.

Nº	ECUACIÓN
4	$16 = x^2$
PREGUNTAS INICIALES	
¿A qué conclusiones habéis llegado de por qué estos problemas no se resuelven con la ecuación planteada?; ¿Qué tipo de problemas se resuelven elevando x al cuadrado?	
PROBLEMAS SELECCIONADOS	
1: (A1 – 4) *Tengo 16 pelotas y las quiero en dos grupos ¿de cuantas pelotas estan formados los grupos?* 2: (A4 – 4) *Calcula la edad de Ana sabiendo que su hermana le cuatriplica la edad, teniendo la hermana 16 años.* 3: (A9 – 4) *Ana tiene 16 años. ¿Cuántos años tendrá cuando pasen otros 16 años?* 4: (A11 – 4) *Si en un taller hay 16 ruedas de coche, ¿para cuántos coches habrá suficientes ruedas?*	
<u>OBSERVACIONES</u>: Ninguno de estos problemas se resuelve con la operación potencia.	

Figura 2. Planificación de la puesta en común de la ecuación 4

Para la puesta en común de la ecuación número 5 se procedería de la misma forma que en la ecuación número 3.

<table>
<tr><td>Nº</td><td>ECUACIÓN</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$\left.\begin{array}{r} 5x+3y=69 \\ x+y=15 \end{array}\right\}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">PREGUNTAS INICIALES</td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Se corresponde este problema con la ecuación?; ¿Qué diferencias hay entre la ecuación y el problema?; ¿Cómo podríamos reformular el problema para que se resolviese con la ecuación propuesta?</td></tr>
<tr><td colspan="2">PROBLEMAS SELECCIONADOS</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1. (A3 – 5) Compramos 5 libros y 3 lapices, que nos cuestan 69€. ¿Cuantos libros y lapices hemos comprado, si nos a costado 15€?</td><td><u>OBSERVACIONES</u>: La primera ecuación se corresponde con el sistema de ecuaciones propuesto, la segunda no; pregunta por cantidades y las incógnitas en la primera ecuación son el precio.</td></tr>
<tr><td><u>PREGUNTAS ADICIONALES</u>: ¿Cuáles son las incógnitas en el problema inventado?; ¿Cómo se representan esas incógnitas en las ecuaciones?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2: (A9 – 5) En una clase de 69 personas, hay 5 con la camiseta azul y 3 con la camiseta verde. ¿Cuántas personas llevaran camiseta azul o verde si en la clase hay sólo 15?</td><td><u>OBSERVACIONES</u>: No identifica bien las incógnitas.</td></tr>
<tr><td><u>PREGUNTAS ADICIONALES</u>: ¿Cuáles son las incógnitas en el problema?; ¿Se corresponden con las de las ecuaciones propuestas?</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">3: (A8 – 5) Si tenemos 5 cajas de peras y 3 cajas de manzanas, la suma de todas las frutas es 69. Sabemos que sumando una caja de cada fruta, obtenemos 15 frutas. ¿Cuantas peras y manzanas hay?</td><td><u>OBSERVACIONES</u>: Problema incompleto, la pregunta debería ser “¿Cuántas peras y manzanas hay en cada caja?”</td></tr>
<tr><td><u>PREGUNTAS ADICIONALES</u>: No se planifican.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4: (A12 – 5) En una granja hay 69 patas de gallina y 15 patas de caballos ¿cuantos caballos y gallinas hay en la granja?</td><td><u>OBSERVACIONES</u>: No es necesario el simbolismo algebraico.</td></tr>
<tr><td><u>PREGUNTAS ADICIONALES</u>: ¿Qué quiere decir que aparezcan incógnitas en las ecuaciones?; ¿Están presentes esas incógnitas en el problema?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5: (A13 – 5) En un almacén hay 15 pares de pañuelos. Unos son rojos y otros azules. Están en rebajas y los rojos valen 5€ y los azules 3.¿Cuántos pañuelos rojos hay? ¿Y cuántos azules?</td><td><u>OBSERVACIONES</u>: Falta la igualdad en la primera ecuación.</td></tr>
<tr><td><u>PREGUNTAS ADICIONALES</u>: ¿Qué quieren decir los números de en las ecuaciones? ¿Qué relaciones hay entre las incógnitas y esos números? ¿Están esas relaciones en el problema?</td></tr>
</table>

Figura 3. Planificación de la puesta en común del sistema de ecuaciones 5

Para el caso de disponer de más tiempo o de que los estudiantes no participaran en las puestas en común anteriores, se tendría en cuenta la ecuación número 2 y algunos problemas inventados por los alumnos para la misma. La forma de llevar a cabo la puesta en común sería similar al caso de las ecuaciones 3 y 5.

<table>
<tr><td>Nº</td><td>ECUACIÓN</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$2x-1=9$</td></tr>
<tr><td colspan="2">PREGUNTAS INCIALES</td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Se corresponde este problema con la ecuación?; ¿Qué diferencias hay entre la ecuación y el problema?; ¿Cómo podríamos reformular el problema para que se resolviese con la ecuación propuesta?</td></tr>
<tr><td colspan="2">PROBLEMAS SELECCIONADOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">1: Quiero repartir 9 caramelos entre los alumnos de la clase y a uno le doi uno y al otro le doi el doble que al primero.
2: En una granja hay 9 patos. Cada pato tiene dos patas y una cabeza. Si hay 9 patos, ¿cuántas patas habrá?
3: En un campo de cultivo hay 9 Flores entre Narcisos y rosas, y hay el doble de narcisos que de rosas.
4: El doble de la edad de Ana menos uno es igual que la edad de su hermano que tiene 9 años ¿Que edad tiene Ana?</td></tr>
</table>

OBSERVACIONES: Los problemas seleccionados presentan diferentes errores, en el caso de que los alumnos no colaborasen con las preguntas planteadas inicialmente, se les harán otras similares a las propuestas para las ecuaciones 3 y 5.

Figura 4. Planificación de la puesta en común para la ecuación número 2

En el trascurso de la puesta en común nos interesaba que participaran el mayor número de alumnos posible por lo que comenzaríamos pidiendo voluntarios, y en el caso de que siempre participaran los mismos estudiantes, preguntaríamos al resto con la intención de obtener más diversidad de respuestas.

3.2.2. Implementación de la puesta en común en el aula

La puesta en común se realizó un día después de pasar el cuestionario y fue guiada por la investigadora con ayuda de la profesora. Antes de comenzar se les dio a los estudiantes las siguientes instrucciones:

> *Hoy vamos a hacer una puesta en común de los problemas que inventasteis en el cuestionario que hicisteis ayer, pero no diré los nombres de quién los hizo.*
> *Entre todos vamos a intentar obtener conclusiones de porqué algunos de esos problemas inventados no se corresponden con las ecuaciones propuestas, cuáles han sido los fallos o qué habría que modificar en los problemas para que se resolviesen con las ecuaciones propuestas.*
> *Me interesa que participéis todos, pero que no habléis a la vez, por lo que cada vez que alguien quiera intervenir, por favor, que levante la mano. Para identificar quién está hablando en cada momento vuestra profesora os nombrará antes de que intervengáis.*

De los 20 estudiantes que participaron en el estudio, 17 hicieron alguna intervención en la puesta en común, centrándose la mayoría de las intervenciones en 8 estudiantes. Las preguntas que se realizaron para cada uno de los problemas fueron las planificadas al principio, aunque se añadieron otras y alguna intervención adicional por parte tanto de la profesora como de la investigadora. A continuación se resumen las intervenciones adicionales a las planificadas en la puesta en común.

En el problema *Tengo tres bolsas en una tengo 10 caramelos en la otra tengo 6 veces mas y en la tercera nose. ¿Cuantos caramelos hay*, se preguntó: “¿cuál es la diferencia entre el problema y la ecuación?” y “¿cuántos caramelos hay en cada bolsa?”. Además se propuso el siguiente ejemplo “tengo una bolsa con caramelos y le añado 10, de tal forma que tendría los mismos que si pongo 6 veces los que tenía”, para que los alumnos dijesen si se resolvía o no con dicha ecuación. Por último se mencionó la falta de una igualdad en el planteamiento del problema.

En el problema *La edad de Luis es 6 veces la edad de Andrea más 10. ¿Cuántos años tiene Luis?* se preguntó por el número de incógnitas que había en el problema.

En el problema *Queremos averiguar cuantos discos hay en 10 cajas si en cada caja caben 6,* no se pidió a los estudiantes que reformulasen el problema si no que razonasen sobre qué faltaba en el problema.

En el problema *Tengo 10 conejos, y me regalan el mismo número de conejos que a mi vecino. Si mi vecino tiene 6 conejos y ahora tenemos los mismos. ¿Cuántos conejos me dierón?* se preguntó por cuál era la incógnita.

En el problema *Compramos 5 libros y 3 lapices, que nos cuestan 69€. ¿Cuantos libros y lapices hemos comprado, si nos a costado 15€?* una vez que los estudiantes reformularon el problema para que se pudiese resolver con la ecuación propuesta, la profesora preguntó por otra forma diferente de reformular el problema.

En el problema *En una clase de 69 personas, hay 5 con la camiseta azul y 3 con la camiseta verde. ¿Cuántas personas llevaran camiseta azul o verde si en la clase hay sólo 15?* se preguntó a los estudiantes: "¿podéis darle sentido a este problema?"; "¿qué es la x y qué es la y?"; tras la intervención de los alumnos, la profesora preguntó: "¿a qué se refieren los coeficientes 5 y 3?" y después ella propuso el siguiente ejemplo de cómo se podría plantear el problema para darle sentido: "Y si dijésemos x es el número de personas con camiseta azul e y el número de personas con camiseta azul, sabiendo que en una clase entre camiseta verde y azul hay 15 personas y sabiendo que en una segunda clase hay cinco veces más personas con camiseta azul y tres veces más personas con camiseta verde y en total son 69 personas ¿podría ser algo así?"

En el problema: *En un almacén hay 15 pares de pañuelos. Unos son rojos y otros azules. Están en rebajas y los rojos valen 5€ y los azules 3. ¿Cuántos pañuelos rojos hay? ¿Y cuántos azules?* se preguntó: "¿a qué hace referencia el 69?"

No fue necesario utilizar los problemas seleccionados correspondientes a la ecuación número 2 dado que los estudiantes participaron activamente en la puesta en común sobre el resto de problemas.

CAPÍTULO 4: ANÁLISIS DE LOS DATOS Y RESULTADOS

En este cuarto capítulo detallamos el modo en que hemos analizado los datos obtenidos a partir de los dos instrumentos de recogida de datos descritos en el capítulo anterior, para posteriormente presentar los resultados obtenidos y la discusión de los mismos. En primer lugar presentamos el análisis de los datos obtenidos por medio del cuestionario y los resultados que se extraen del mismo. Posteriormente dedicamos un apartado a la descripción y análisis de la puesta en común, que permite aportar algunos resultados complementarios a los presentados previamente. Finalmente se incluye una discusión global de los resultados.

1. ANÁLISIS DE LOS DATOS DEL CUESTIONARIO

En este apartado presentamos los criterios tenidos en cuenta para analizar los datos obtenidos mediante el cuestionario. En primer lugar atendemos al análisis de los enunciados inventados por los estudiantes, los cuales se recogen en el anexo 2 tal cual fueron formulados. A lo largo del trabajo los enunciados se presentan tal cual fueron redactados por los estudiantes, independientemente de que contengan faltas de ortografía. Los enunciados inventados por los alumnos se identifican con *AX – Y*, dónde *X* es el número asignado a cada alumno de forma aleatoria, e *Y* hace referencia a la ecuación para la cual ha sido propuesto el enunciado. Así A17 – 6 denota el enunciado que el estudiante A17 ha propuesto para la ecuación 6.

Iniciamos el análisis de cada problema identificando la estructura sintáctica del problema formulado por el estudiante. Para ello siempre que ha sido posible hemos traducido el enunciado a simbolismo algebraico, procediendo de izquierda a derecha en la lectura del mismo, realizando una *traducción sintáctica* en términos de MacGregor y Stancey (1993). En otros casos hemos realizado una *traducción semántica*, es decir, mediante una comparación estática y global, hemos expresado el significado de la expresión a partir de la construcción de un modelo cognitivo de las relaciones matemáticas descritas en el enunciado dado. Este es el caso por ejemplo del proceso de traducción realizado para representar la estructura sintáctica del siguiente problema: *Cada 5 días a Marcos recibe su paga y Ana la recibe al cabo de 3 días ¿Cuánto dinero tendrán al cabo de 69 días? ¿y al cabo de 15 días?*

En los casos en que el problema formulado expresa una igualdad y contiene una de las cantidades desconocidas despejada en uno de los miembros, siendo esta la cantidad a averiguar, al escribir su estructura sintáctica utilizaremos un signo de interrogación en vez de una letra para representar dicha cantidad desconocida y no nos referiremos a la misma como incógnita. Por ejemplo representamos con $10+6\cdot 10+x=?$ la estructura sintáctica del siguiente problema propuesto por A1: *Tengo tres bolsas en una tengo 10 caramelos en la otra tengo 6 veces más y en la tercera no lo se. ¿Cuantos caramelos hay?* En particular, utilizamos este símbolo al representar la estructura sintáctica de problemas puramente aritméticos. Por ejemplo representamos como $(9+1)/2=?$ la estructura sintáctica del siguiente problema propuesto por A18: *Si tengo 9 globos y mi madre me da uno más pero se me explotan la mitad ¿cuántos globos me quedan?*

No consideramos en este análisis aquellos problemas que no tienen sentido, es decir, que no pueden traducirse a un enunciado simbólico. Un ejemplo es el problema que propone el estudiante A12 para la ecuación $2x-1=9$: *En una casa hay 2 personas y una tele y 9 muebles ¿Qué sería la tele? ¿x o y?* También descartamos aquellos enunciados que piden directamente resolver la ecuación o sistema de ecuaciones dado. Un ejemplo es el enunciado planteado por A7 para la ecuación $20=x(x+1)$: *Teniendo esta expresión 20 = x(x + 1), halla la x sabiendo que en los dos casos es el mismo número, y al resolverlo nos da 20.*

Para el análisis de los enunciados formulados por los estudiantes, a partir de un primer análisis de los mismos y de los trabajos previos consultados, hemos definido unas categorías que describimos a continuación. Para su elaboración hemos tenido en cuenta los objetivos de investigación de este trabajo, por ello atendemos a las características de los problemas inventados por los estudiantes que entendemos relacionadas con el significado atribuido al simbolismo algebraico, dejando a un lado otras, como si el problema es real o no, o si aparece lenguaje simbólico en el enunciado. Registramos algunas de otras características como observaciones adicionales relativas a cada problema. Dado que en ningún momento se pedía la resolución de los problemas no atendemos a si son o no resolubles.

Clasificamos las categorías en sintácticas, de la A a la G, y semánticas de la H a la J, según si atienden a características sintácticas o semánticas de los problemas planteados.

Cada una de las categorías presenta tres valores posibles: Si, No y No Aplica (N/A). En aquellos casos en que el estudiante no da respuesta se codifican todas las categorías con el valor de no aplica.

Los siguientes recuadros (ver Figuras de 5 a 14) presentan la definición de cada categoría, ejemplos de sus posibles valores y aclaraciones relevantes para entender el modo en que se han aplicado en el análisis de los datos.

<table>
<tr><th>CATEGORÍA</th><th colspan="2">DEFINICIÓN</th></tr>
<tr><td>A</td><td colspan="2" rowspan="2">La estructura sintáctica del problema, es igual que la de la ecuación o sistema de ecuaciones original.
Los sistemas de ecuaciones se evalúan de forma global, considerando de forma conjunta ambas ecuaciones.</td></tr>
<tr><td>Conservación de la estructura de la ecuación.</td></tr>
<tr><th colspan="3">CODIFICACIÓN Y EJEMPLOS</th></tr>
<tr><td colspan="3">SI: A17 – 2: María tiene x €, los invierte en una apuesta y gana el doble. Al terminar la tarde María se gasta 1€ en una botella de agua, y ahora tiene 9€. ¿Cuánto dinero tenía al empezar el día? Ecuación original y estructura sintáctica del enunciado: $2x-1=9$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">NO: A14 – 1: Pablo guarda en una bolsa sus canicas, las de Maria y las de Jesús. En total hay 16 canicas, si 8 son de Pablo y 6 son de Maria ¿Cuántas canicas de las que hay en la bolsa son de Jesús? Estructura sintáctica del problema: $16=8+6+x$. Ecuación original: $8=x+6$.</td></tr>
<tr><th colspan="2">ACLARACIÓN</th><th>EJEMPLO</th></tr>
<tr><td colspan="2">La codificación de esta categoría es independiente del orden de los términos de la ecuación.</td><td>A1 – 1: Tengo 6 naranjas y necesito fresas para tener en total 8 frutas. ¿Cuantas fresas necesito? Estructura sintáctica del problema: $6+x=8$. Ecuación original: $8=x+6$. Codificamos con SI.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Si el número de incógnitas es diferente al de la ecuación o sistema de ecuaciones propuesto se codifica con NO.</td><td>A4 – 3: La edad de Luis es 6 veces la edad de Andrea más 10. ¿Cuántos años tiene Luís? Estructura sintáctica del problema: $x=6y+10$, Ecuación original: $x+10=6x$.</td></tr>
</table>

Figura 5. Definición, ejemplos y aclaraciones para la categoría A

<table>
<tr><th>CATEGORÍA</th><th colspan="2">DEFINICIÓN</th></tr>
<tr><td>B
Conservación del orden de los miembros de la ecuación.</td><td colspan="2">El orden de los diferentes miembros de la estructura sintáctica del problema, así como el de los miembros a ambos lados del signo igual, es el mismo que en la ecuación o sistema de ecuaciones propuesto.
Los sistemas de ecuaciones se evalúan de forma global, considerando de forma conjunta ambas ecuaciones.</td></tr>
<tr><th colspan="3">CODIFICACIÓN Y EJEMPLOS</th></tr>
<tr><td colspan="3">SI: A17 – 2: María tiene x €, los invierte en una apuesta y gana el doble. Al terminar la tarde María se gasta 1€ en una botella de agua, y ahora tiene 9€. ¿Cuánto dinero tenía al empezar el día? Ecuación original y estructura sintáctica del enunciado: $2x-1=9$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">NO: A1 – 1: Tengo 6 naranjas y necesito fresas para tener en total 8 frutas. ¿Cuantas fresas necesito? Estructura sintáctica del problema: $6+x=8$. Ecuación original $8=6+x$.</td></tr>
<tr><th colspan="2">ACLARACIÓN</th><th>EJEMPLO</th></tr>
<tr><td colspan="2">En el momento que la ecuación no conserva la estructura de la inicial, no resulta pertinente analizar la conservación del orden, por lo que consideramos que esta categoría no aplica N/A.</td><td>A3 – 3: Un número más 10 es igual a 6 veces un número. Escribe en lenguaje algebraico. Estructura sintáctica del enunciado: $x+10=6y$. Ecuación original: $x+10=6x$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Esta categoría también se refiere a si altera el orden de las ecuaciones en los sistemas de ecuaciones.</td><td>A13 – 5: En un almacén hay 15 pares de pañuelos. Unos son rojos y los otros azules. Están en rebajas y los rojos valen 5€ y los azules 3. ¿Cuántos pañuelos rojos hay? ¿y cuántos azules? Estructura sintáctica del sistema (incompleto) del enunciado: $\left.\begin{array}{l} x+y=15 \\ 5x+3y \end{array}\right\}$. Sistema de ecuaciones original: $\left.\begin{array}{l} 5x+3y=69 \\ x+y=15 \end{array}\right\}$.</td></tr>
</table>

Figura 6. Definición, ejemplos y aclaraciones para la categoría B

<table>
<tr><th>CATEGORÍA</th><th colspan="2">DEFINICIÓN</th></tr>
<tr><td>C</td><td colspan="2" rowspan="2">Las operaciones que se presentan entre los términos[3] en la estructura sintáctica del enunciado planteado son las mismas que las que se presentan en la ecuación o sistema de ecuaciones original.
Los sistemas de ecuaciones se evalúan de forma global, considerando de forma conjunta ambas ecuaciones.</td></tr>
<tr><td>Conservación de las operaciones entre los términos de la ecuación.</td></tr>
<tr><th colspan="3">CODIFICACIÓN Y EJEMPLOS</th></tr>
<tr><td colspan="3">SI: A17 – 2: María tiene x €, los invierte en una apuesta y gana el doble. Al terminar la tarde María se gasta 1€ en una botella de agua, y ahora tiene 9€. ¿Cuánto dinero tenía al empezar el día? Ecuación original y estructura sintáctica del enunciado: $2x-1=9$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">NO: A2 – 6: Me he comprado una camiseta y un pantalón y total me he gastado 7 euros. Si comprándome la camiseta al precio del pantalón me gasto 10€. ¿Cuánto vale el pantalón y la camiseta? Estructura sintáctica del enunciado: $\left.\begin{matrix} x+y=7 \\ y+y=10 \end{matrix}\right\}$. Sistema de ecuaciones original: $\left.\begin{matrix} x+y=7 \\ xy=10 \end{matrix}\right\}$.</td></tr>
<tr><th colspan="2">ACLARACIÓN</th><th>EJEMPLO</th></tr>
<tr><td colspan="2">Si en la estructura sintáctica del problema planteado el número de términos es diferente pero se conservan las operaciones entre los que coinciden con la ecuación o sistema original, se codifica con SI.</td><td>A14 – 1: Pablo guarda en una bolsa sus canicas, las de Maria y las de Jesús. En total hay 16 canicas, si 8 son de Pablo y 6 son de Maria ¿Cuántas canicas de las que hay en la bolsa son de Jesús? Estructura sintáctica del enunciado: $16=8+6+x$. Ecuación original: $8=x+6$.</td></tr>
</table>

Figura 7. Definición, ejemplos y aclaraciones para la categoría C

[3] Los términos pueden ser simples o complejos, según estén formados únicamente por un número o símbolo o en cambio incluya productos (ej., $3x^2$) o términos con paréntesis (ej, $(4+2)$). A diferencia de otros autores como Vega-Castro (2010), para nuestro análisis no consideramos el signo que le precede como parte del término.

<table>
<tr><th>CATEGORÍA</th><th>DEFINICIÓN</th></tr>
<tr><td>D</td><td rowspan="2">Se establece una relación de igualdad o equivalencia entre dos expresiones o entre una expresión y una cantidad.</td></tr>
<tr><td>Presencia de igualdad.</td></tr>
<tr><th colspan="2">CODIFICACIÓN Y EJEMPLOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">SI: A8 – 3: En dos granjas se establece un mismo número mínimo de animales. En la primera granja hay 10 animales más del número mínimo, y en la segunda hay 6 veces más animales de dicho número. ¿Cuál es ese número mínimo de animales sabiendo que en las dos hay la misma cantidad de animales? Estructura sintáctica del enunciado y de la ecuación original: $x+10=6x$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">NO: A6 – 5: Cada 5 días a Marcos recibe su paga y Ana la recibe al cabo de 3 días ¿Cuánto dinero tendrán al cabo de 69 días? ¿y al cabo de 15 días? Estructura sintáctica del problema es: $\left.\begin{array}{l}\frac{69}{5}x+\frac{69}{3}y=?\\ \frac{15}{5}x+\frac{15}{3}y=?\end{array}\right\}$. Sistema de ecuaciones original: $\left.\begin{array}{l}5x+3y=69\\ x+y=15\end{array}\right\}$.</td></tr>
<tr><th>ACLARACIÓN</th><th>EJEMPLO</th></tr>
<tr><td>Consideramos que no hay presencia de igualdad cuando la incógnita por la que pregunta el problema queda despejada en un miembro de la igualdad. El otro miembro puede incluir o no variables.</td><td>A1 – 3: Tengo tres bolsas en una tengo 10 caramelos en la otra tengo 6 veces más y en la tercera no lo se. ¿Cuantos caramelos hay? Estructura sintáctica del problema: $10+6\cdot 10+x=?$. Ecuación original: $x+10=6x$</td></tr>
<tr><td>En los sistemas de ecuaciones, si hay presencia solo de una igualdad en vez de dos, la codificaremos con NO*.</td><td>A13 – 5: En un almacén hay 15 pares de pañuelos. Unos son rojos y los otros azules. Están en rebajas y los rojos valen 5€ y los azules 3. ¿Cuántos pañuelos rojos hay? ¿y cuántos azules?. Estructura sintáctica del problema: $\left.\begin{array}{l}x+y=15\\ 5x+3y\end{array}\right\}$. Sistema de ecuaciones original: $\left.\begin{array}{l}5x+3y=69\\ x+y=15\end{array}\right\}$.</td></tr>
</table>

Figura 8. Definición, ejemplos y aclaraciones para la categoría D

<table>
<tr><th>CATEGORÍA</th><th colspan="2">DEFINICIÓN</th></tr>
<tr><td>E</td><td colspan="2" rowspan="2">En la estructura sintáctica del problema aparece/n alguna/s incógnita/s no despejada/s en un miembro.</td></tr>
<tr><td>Presencia de incógnita/s.</td></tr>
<tr><th colspan="3">CODIFICACIÓN Y EJEMPLOS</th></tr>
<tr><td colspan="3">SI: A16 – 3: ¿Cuantos años tiene Rosa sabiendo que si le sumas 10 será 6 veces mayor? Estructura sintáctica del problema y ecuación original: $x+10=6x$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">NO: A9 – 7: Ana tiene 20 años y Antonio es un año más pequeño. Dentro de un año la edad de Antonio será igual a la de Ana. Estructura sintáctica del problema: $(20-1)+1=20+1$. Ecuación original: $20=x(x+1)$.</td></tr>
<tr><th colspan="2">ACLARACIÓN</th><th>EJEMPLO</th></tr>
<tr><td colspan="2">Cuando el problema puede resolverse directamente con una operación aritmética esta categoría se codifica con NO.</td><td>A9 – 3: Queremos averiguar cuantos discos hay en 10 cajas si en cada caja caben 6. Este problema se representa sintácticamente con la expresión $10\cdot 6=?$. Ecuación original: $x+10=6x$.</td></tr>
</table>

Figura 9. Definición, ejemplos y aclaraciones para la categoría E

<table>
<tr><th>CATEGORÍA</th><th colspan="2">DEFINICIÓN</th></tr>
<tr><td>F</td><td colspan="2" rowspan="2">En la estructura sintáctica de la ecuación que resuelve el problema están presentes los mismos coeficientes de las incógnitas que aparecen en la ecuación original, operando con dichas incógnitas.</td></tr>
<tr><td>Establece una relación que vincula el/los coeficiente/s con la/s incógnita/s.</td></tr>
<tr><th colspan="3">CODIFICACIÓN Y EJEMPLOS</th></tr>
<tr><td colspan="3">SI: A5 – 5, David compró cinco camisetas por un precio, y su amigo Aitor compró 3 pantalones por otro; la suma de ambos tickets le salía a 69€, y la suma de una camiseta y de un pantalón eran 15€ ¿Cuánto cuesta cada prenda? Estructura sintáctica del problema y sistema de ecuaciones original: $\left.\begin{array}{l}5x+3y=69\\ x+y=15\end{array}\right\}$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">NO: A1 – 5, En una clase hay 69 mochilas estan repartidas en un grupo extranjeros y uno de españoles los españoles tienen 5 mochilas iguales y los extranjeros 3. Los grupos de extranjeros y españoles son de 15 ¿Cuántas mochilas hay en cada grupo? En este problema se menciona los coeficientes del sistema original (5, 3, 1 y 1) pero no aparecen relacionados con incógnitas. Estructura sintáctica del problema: $\left.\begin{array}{l}z+t=69\\ x+y=15\end{array}\right\}$.
Sistema de ecuaciones original: $\left.\begin{array}{l}5x+3y=69\\ x+y=15\end{array}\right\}$.</td></tr>
<tr><th colspan="2">ACLARACIÓN</th><th>EJEMPLO</th></tr>
<tr><td colspan="2">Si el problema inventado incluye más incógnitas que la ecuación o sistema original, pero las relaciones de estas con los coeficientes se conservan, se codifica con SI.</td><td>A4 – 3: La edad de Luis es 6 veces la edad de Andrea más 10. ¿Cuántos años tiene Luís? Estructura sintáctica del problema propuesto: $x=6y+10$. Ecuación original: $x+10=6x$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Si el coeficiente aparece como término independiente lo codificamos como NO.</td><td>A1 – 3: Tengo tres bolsas en una tengo 10 caramelos en la otra tengo 6 veces más y en la tercera no lo se. ¿Cuántos caramelos hay? Estructura sintáctica del problema: $10+6\cdot 10+x=?$. Ecuación original: $10+x=6x$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">En los sistemas de ecuaciones, si establece correctamente el vínculo de los coeficientes con las incógnitas solamente en una de las ecuaciones, la codificamos con NO*.</td><td>A3 – 5: Compramos 5 libros y 3 lápices, que nos cuestan 69€ ¿Cuántos libros y lápices hemos comprado, si nos a costado 15€? Estructura sintáctica del problema: $\left.\begin{array}{l}5x+3y=69\\ ax+by=15\end{array}\right\}$. Sistema de ecuaciones original: $\left.\begin{array}{l}5x+3y=69\\ x+y=15\end{array}\right\}$.</td></tr>
</table>

Figura 10. Definición, ejemplos y aclaraciones para la categoría F

<table>
<tr><th>CATEGORÍA</th><th>DEFINICIÓN</th></tr>
<tr><td>G</td><td rowspan="2">El número de incógnitas que aparecen en la estructura sintáctica del problema es el mismo que el de la ecuación o sistema de ecuaciones original.</td></tr>
<tr><td>Igual número de incógnitas.</td></tr>
<tr><th colspan="2">CODIFICACIÓN Y EJEMPLOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">SI: A16 – 5: En una clase entre niños y niñas suman 15. Las niñas llevan 5 libros cada una y los niños 3. El total de libros de niños y niñas son 69 ¿Cuántas niñas hay? ¿y niños? Estructura sintáctica del problema y sistema de ecuaciones original: $\left.\begin{array}{l} 5x+3y=69 \\ x+y=15 \end{array}\right\}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">NO: A4 – 3: La edad de Luis es 6 veces la edad de Andrea más 10. ¿Cuántos años tiene Luís? Estructura sintáctica del problema: $x=6y+10$. Ecuación original: $x+10=6x$.</td></tr>
<tr><th>ACLARACIÓN</th><th>EJEMPLO</th></tr>
<tr><td>Cuando a una de las incógnitas le da un valor, la consideramos como dato y no la contabilizamos como incógnita.</td><td>A5 – 6: Sarena tiene 7€, si suma la paga que le dan a ella más la de su hermano, pero se queja porque su hermano recibe más. Si multiplicamos la paga de ella con la de su hermano nos da 10€ que es lo que cobra el hermano. ¿Cuánto de paga recibe cada uno? Estructura sintáctica del problema: $\left.\begin{array}{l} x+y=7 \\ xy=10 \\ y=10 \end{array}\right\}$. Sistema de ecuaciones original: $\left.\begin{array}{l} x+y=7 \\ xy=10 \end{array}\right\}$.</td></tr>
<tr><td>Cuando la categoría F se codifica con NO, esta categoría se codifica con N/A. Si no hay presencia de incógnitas, el número de las mismas siempre será diferente.</td><td>A19 – 2: Dos gemelos tienen nueve lunares y le quitaron uno ¿Cuántos les quedará? Estructura sintáctica del problema: $9-1=?$. Ecuación original: $2x-1=9$.</td></tr>
<tr><td>Cuando la codificación es NO, al lado indicamos entre paréntesis el número de incógnitas que se añaden (+) o se eliminan (-).</td><td>A4 – 3: La edad de Luis es 6 veces la edad de Andrea más 10. ¿Cuántos años tiene Luís? Estructura sintáctica del problema: $x=6y+10$. Ecuación original: $x+10=6x$. Se codifica NO (+1).</td></tr>
</table>

Figura 11. Definición, ejemplos y aclaraciones para la categoría G

<table>
<tr><th>CATEGORÍA</th><th colspan="2">DEFINICIÓN</th></tr>
<tr><td>H</td><td colspan="2" rowspan="2">En el enunciado del problema se asigna a las incógnitas un significado de un contexto no matemático.</td></tr>
<tr><td>Da significado a las incógnitas.</td></tr>
<tr><th colspan="3">CODIFICACIÓN Y EJEMPLOS</th></tr>
<tr><td colspan="3">SI: A16 – 5: En una clase entre niños y niñas suman 15. Las niñas llevan 5 libros cada una y los niños 3. El total de libros de niños y niñas son 69 ¿Cuántas niñas hay? ¿y niños? Estructura sintáctica del problema y sistema de ecuaciones original $\left.\begin{array}{l} 5x+3y=69 \\ x+y=15 \end{array}\right\}$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">NO: A5 – 7: Erika quiere saber porque cada día cobra 20€ y le preguntó a su jefe. Su jefe le dijo que cobraba un x por cada x y luego cobraba x por cada punto extra, es decir que multiplicase x por x+1. ¿Cuánto les sale?: Estructura sintáctica del problema: $20 = x(x+1)$. Ecuación original: $20 = x(x+1)$.</td></tr>
<tr><th colspan="2">ACLARACIÓN</th><th>EJEMPLO</th></tr>
<tr><td colspan="2">En los problemas de teoría de números consideramos que NO le da significado a las incógnitas.</td><td>A6 – 2: ¿Qué número al multiplicar por 2 y al restarle 1 te da como resultado 9?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Si en el enunciado del problema aparecen más incógnitas que en la ecuación planteada pero les da significado, se codifica con SI.</td><td>A10 – 2: En un campo de cultivo hay 9 flores. Entre narcisos y rosas. Y hay el doble de narcisos que de rosas Estructura sintáctica del problema: $\left.\begin{array}{l} x+y=9 \\ x=2y \end{array}\right\}$.
Ecuación original: $2x-1=9$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Cuando la categoría F se codifica con NO, esta categoría se codifica con N/A. Si no hay presencia de incógnitas, no les puede dar significado.</td><td>A19-2: Dos gemelos tienen nueve lunares y le quitaron uno ¿Cuántos les quedará? Estructura sintáctica del problema $9-1=?$</td></tr>
</table>

Figura 12. Definición, ejemplos y aclaraciones para la categoría H

<table>
<tr><th>CATEGORÍA</th><th colspan="2">DEFINICIÓN</th></tr>
<tr><td>I
Da significado a las operaciones aditivas.</td><td colspan="2">En el enunciado del problema las operaciones aditivas tienen significado y por tanto el problema presenta alguna de las siguientes estructuras semánticas: cambio (CM), combinación (CB), comparación (CP) o igualación (IG) de cantidades.</td></tr>
<tr><th colspan="3">CODIFICACIÓN Y EJEMPLOS</th></tr>
<tr><td colspan="3">SI: A7 – 2: María tenía dos billetes, para comprar un regalo y de camino a la tienda se gasta 1€ en cuches, quedandole 9€. ¿De cuánto eran los billetes? La operación aditiva expresa un cambio ya que modifica la cantidad inicial que tenía.</td></tr>
<tr><td colspan="3">NO: A3 – 3: Un número más 10 es igual a 6 veces un número. Escribe en lenguaje algebraico.</td></tr>
<tr><th colspan="2">ACLARACIÓN</th><th>EJEMPLO</th></tr>
<tr><td colspan="2">Si las dos cantidades, o más, entre las que se establece la relación aditiva no tienen las mismas unidades de tal forma que no se pueden ni unir, ni combinar, ni comparar, se codifica con NO.</td><td>A8 – 2 Calcula la altura de una pared, sabiendo que su doble menos la unidad da como resultado el cuadrado de 3.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Si la operación aditiva tiene significado en el enunciado propuesto por el estudiante, aunque su estructura sintáctica no se corresponda con la ecuación o sistema de ecuaciones original, se codifica con SI.</td><td>A10 – 2: En un campo de cultivo hay 9 flores. Entre narcisos y rosas. Y hay el doble de narcisos que de rosas. Estructura sintáctica del problema: $\left.\begin{array}{l} x+y=9 \\ x=2y \end{array}\right\}$.
Ecuación original: $2x-1=9$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">En los problemas de teoría de números en los que se describe verbalmente de forma literal lo que aparece en la ecuación original, entendemos que no le da significado a la operación.</td><td>A3 – 2: El doble de un número menos 1, es igual a 9.</td></tr>
</table>

Figura 13. Definición, ejemplos y aclaraciones para la categoría I

<table>
<tr><th>CATEGORÍA</th><th>DEFINICIÓN</th></tr>
<tr><td>J</td><td rowspan="2">En el enunciado del problema las operaciones multiplicativas, tanto entre coeficientes e incógnitas como entre incógnitas, tienen significado. El problema presenta alguna de las siguientes estructuras semánticas: proporcionalidad simple (PS), comparación (CP) o producto cartesiano (PC).</td></tr>
<tr><td>Da significado a las operaciones multiplicativas.</td></tr>
<tr><th colspan="2">CODIFICACIÓN Y EJEMPLOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">SI: A17 – 2: María tiene x €, los invierte en una apuesta y gana el doble. Al terminar la tarde María se gasta 1€ en una botella de agua, y ahora tiene 9€. ¿Cuánto dinero tenía al empezar el día? La operación multiplicación tiene el significado de comparación. Estructura sintáctica del problema y ecuación original: $2x-1=9$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">NO: A20 – 3: Luis perdió su memoria en un accidente de tráfico, y necesita recuperar datos de su vida, como por ejemplo la edad que tiene, sabe que su hermana tiene 10 años más que el, y que su edad más la diferencia de edad con su hermana, es igual a la de su sobrino, que son 6 años, por los que tiene ahora. En el enunciado aparece la operación multiplicación pero no le da ningún significado.</td></tr>
<tr><th>ACLARACIÓN</th><th>EJEMPLO</th></tr>
<tr><td>Si la operación multiplicativa tiene significado en el enunciado propuesto por el estudiante, aunque su estructura sintáctica no se corresponda con la ecuación o sistema de ecuaciones original, se codifica con SI.</td><td>A18 – 2: Si tengo 9 globos y mi madre me da uno más pero se me explotan la mitad ¿cuántos globos me quedan? Estructura sintáctica del problema: $(9+1)/2=?$. Ecuación original: $2x-1=9$. No es la misma pero la operación multiplicación tiene el significado de comparación.</td></tr>
<tr><td>En los problemas de teoría de números en los que el estudiante propone un enunciado en el cual escribe verbalmente de forma literal lo que aparece en la ecuación original, consideramos que no le da significado a la operación.</td><td>A6 – 2: ¿Qué número al multiplicar por 2 y al restarle 1 te da como resultado 9?</td></tr>
</table>

Figura 14. Definición, ejemplos y aclaraciones para la categoría J

2. RESULTADOS DEL CUESTIONARIO

En este apartado mostramos los resultados obtenidos al utilizar las categorías presentadas en el apartado anterior, para codificar los problemas inventados por los estudiantes. En primer lugar mostramos de forma independientemente los resultados correspondientes a cada una de las ecuaciones y sistemas del cuestionario. Posteriormente atendemos de forma global a los resultados obtenidos.

2.1 Resultados por ecuación o sistema

En este primer apartado presentamos la codificación de cada una de las categorías de los enunciados inventados por los estudiantes para cada ecuación y sistema de ecuaciones (ver Tablas de 3 a 10), así como los resultados correspondientes.

Tabla 3

Codificación de los problemas inventados en la ecuación 1: $8 = x + 6$

	Categoría									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
SI	15	0	16	17	17	16	17	14	16	0
NO	4	15	3	2	2	1	0	3	3	0
N/A	1	5	1	1	1	3	3	3	1	20

En la primera ecuación se analizan todos salvo uno de los enunciados (el del alumno A12) por carecer de sentido. La mayoría de los estudiantes, 15 de 20, son capaces de plantear un problema cuya resolución se corresponde con la ecuación planteada (categoría A), aunque el orden de los miembros que componen la ecuación no se conserva en ninguno de ellos (categoría B), ya que en la estructura sintáctica del problema el 8 aparece en el miembro derecho de la igualdad. Respecto de los cuatro problemas que no conservan la estructura de la ecuación: dos se resuelven directamente con una operación aritmética, uno añade un término a la ecuación y otro propone un enunciado cuya estructura sintáctica es completamente diferente.

Además de en las 15 producciones cuya estructura sintáctica coincide con la ecuación, en otro caso (alumno A14), que añade un término, se conservan las operaciones entre los términos de la ecuación (categoría C). La categoría D, presencia de igualdad, se cumple en 17 de los problemas analizados: en los dos que no hay presencia de igualdad, A11 y A19, es porque por lo que pregunta el problema queda despejado a un lado de la igualdad. Esos dos problemas son los únicos que no presentan incógnita (categoría E) al resolverse con una operación aritmética. Los otros 17 problemas contienen una sola incógnita, mismo número que en la ecuación original (categoría G), siendo en 14 de ellos en los que les da significado (categoría H); los 3 a los que no les da significado son de teoría de números.

La categoría F se cumple en 16 problemas: el coeficiente de la incógnita en la ecuación planteada es uno y se establece la relación de este coeficiente con la incógnita en todos los problemas en los que se conserva la estructura de la ecuación así como en el problema del alumno A14 que añade un término a la ecuación. En todos los problemas inventados por los alumnos excepto en los de teoría de números, dan significado a las operaciones aditivas. La estructura semántica más frecuente es de combinación (9 problemas), seguido de las de cambio (4 problemas), y las de igualación (3 problemas).

Tabla 4
Frecuencia de cada categoría para la ecuación 2: $2x-1=9$

Evaluación	Categoría									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
SI	8	8	10	12	12	12	10	9	12	13
NO	8	0	6	4	4	0	2	1	4	3
N/A	4	12	4	4	4	8	8	8	4	4

En el caso de la segunda ecuación no se analizan las producciones de los siguientes alumnos correspondientes a esta ecuación: A1 porque está incompleto y no se puede plantear la estructura sintáctica del problema, A12 porque no tiene sentido, y A14 y A16 porque no han inventado ningún problema.

En 8 de los 16 problemas analizados, los alumnos inventan problemas en los que su estructura sintáctica corresponde con la ecuación proporcionada y también se conserva el orden de los miembros de la ecuación (categorías A y B respectivamente). Se conservan las operaciones entre los términos de la ecuación (categoría C), en 10 de los problemas, aquellos en los que se conserva la estructura de la ecuación más dos problemas en los que añaden un término (alumnos A5 y A13). Hay presencia de igualdad (categoría D) en 12 problemas: en los 4 que no se cumple esta categoría es porque por lo que pregunta el problema queda despejado a un lado de la igualdad. En los mismos 4 problemas no hay incógnitas (categoría E). En todos los problemas donde hay incógnitas se establece una relación que vincula los coeficientes con las mismas (categoría F). En 10 de los problemas el número de incógnitas es uno, al igual que en la ecuación original (categoría G) y en 2 problemas los alumnos añaden una incógnita. Solo en uno de los problemas, que es de teoría de números, no se da significado a la incógnita. En cuanto al significado de las operaciones aditivas (categoría I) tienen significado en 12 problemas: todos son problemas de cambio salvo 2 de combinación. En 13 problemas le dan significado a las operaciones multiplicativas: 10 problemas son de comparación y los otros 3 de proporcionalidad simple.

Tabla 5

Frecuencia de cada categoría para la ecuación 3: $x+10=6x$

Evaluación	Categoría									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
SI	6	6	8	12	14	11	10	13	15	10
NO	11	0	9	5	3	3	4	1	2	7
N/A	3	14	3	3	3	6	6	6	3	3

No se analizan las producciones de los siguientes alumnos correspondientes a esta ecuación: A6 y A12 porque no tienen sentido y A14 porque no ha inventado ningún problema. En total se analizan 17 problemas.

En solo 6 de los problemas inventados por los alumnos, la estructura sintáctica del problema se corresponde con la ecuación original, manteniéndose así mismo el orden de sus miembros (categorías A y B respectivamente). En 8 problemas se conservan las operaciones entre los términos de la ecuación (categoría C): 6 de los cuales presentan la estructura sintáctica de la ecuación dada y en los otros 2 se añade una incógnita al considerar diferentes las incógnitas que se relacionan en ambos lados del signo igual. En 12 problemas hay presencia de igualdad (categoría D): los 5 en los que no hay es porque por lo que pregunta el problema queda despejado a un lado de la igualdad, en 2 de ellos es el resultado de una operación aritmética. Hay presencia de incógnita (categoría E) en 14 problemas: en los restantes (3) el problema se resuelve con una operación aritmética. En 11 de los problemas se establece una relación que vincula los coeficientes con las incógnitas (categoría F). En 10 de los problemas en los que hay presencia de incógnita, el número de ellas es el mismo que en la ecuación propuesta (categoría G), mientras que en 4 problemas se añade una incógnita. Sólo en un problema de los que hay presencia de incógnitas no le da significado a la misma (categoría H), se trata de un problema de teoría de números. En 15 de los problemas inventados le dan significado a las operaciones aditivas (categoría I) siendo 8 de ellos de cambio y 7 de combinación. A las operaciones multiplicativas le dan significado en 10 problemas (categoría J), siendo 9 de ellos de comparación y 1 de proporcionalidad simple.

Tabla 6

Frecuencia de cada categoría para la ecuación 4: $16=x^2$

Evaluación	Categoría									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
SI	8	2	8	11	11	8	11	5	1	7
NO	9	6	9	6	6	3	0	6	0	9
N/A	3	12	3	3	3	9	9	9	19	4

No se analizan las producciones de los siguientes alumnos correspondientes a esta ecuación: A5 porque no tiene sentido, y A14 y A19 porque no han inventado ningún problema.

De los 17 problemas considerados, menos de la mitad (8) conservan la estructura de la ecuación (categoría A), de los cuales solamente 2 conservan el orden de los miembros de la ecuación (categoría B). Las operaciones entre términos (categoría C) se conservan en todos los problemas cuya estructura sintáctica corresponde a la ecuación propuesta. En 11 de los problemas hay presencia de una igualdad (categoría D): en los 6 en los que no hay, es porque por lo que pregunta el problema queda despejado a un lado del signo igual, y además se corresponden con la solución de una operación aritmética. Hay presencia de incógnitas (categoría E) en 11 problemas, coincidiendo con el número de incógnitas de la ecuación original (categoría G). En todos ellos se establece una igualdad, y en aquellos que presentan la estructura sintáctica de la ecuación dada (8) se establece una relación que vincula el coeficiente con la incógnita (categoría F), los otros tres enunciados no se resuelven con la operación potencia, y los estudiantes ponen coeficientes diferentes a uno, utilizando expresiones tales como “el doble” o “el cuádruplo”. De los problemas en los que hay incógnitas les dan significado a 5 de ellos (categoría H), el resto son problemas de teoría de números. Solo en uno de los problemas se da significado a una operación aditiva (añadida dado que en la estructura sintáctica dada no aparece este tipo de operación), corresponde a un problema de cambio. En 7 de los problemas dan significado a las operaciones multiplicativas (categoría J): 4 son del tipo comparación y 3 de proporcionalidad simple; ninguno de estos problemas conserva la estructura de la ecuación inicial.

Tabla 7

Frecuencia de cada categoría para la ecuación 5: $\left.\begin{array}{r}5x+3y=69\\ x+y=15\end{array}\right\}$

Evaluación	Categoría									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
SI	7	4	10	11	14	9	9	14	14	11
NO	8	3	5	4	1	5	5	0	1	4
N/A	5	13	5	5	5	6	6	6	5	5

Los alumnos A14, A15, A17, A19 y A20 no inventan problema para este sistema de ecuaciones.

Se conserva la estructura del sistema de ecuaciones (categoría A) en 7 de los 15 problemas considerados, de los cuales en 3 se invierte el orden de las dos ecuaciones del sistema (categoría B). Las operaciones entre los términos se conservan en 10 problemas (categoría C): 7 de los problemas tienen la misma estructura sintáctica que el sistema de ecuaciones original, en cuanto a los otros tres, en dos de ellos hay un cambio de incógnita (A1 y A18) y en otro un cambio de coeficiente (A3). En 11 problemas establecen dos igualdades (categoría D) y en 2 establecen igualdad solo para una de las ecuaciones. Hay presencia de incógnitas en todos los problemas analizados menos en uno (categoría E), y en 9 problemas se establece una relación que vincula los coeficientes con esas incógnitas (categoría F). De los 5 en los que no se cumple la categoría F: en 3 de ellos solamente en una de las ecuaciones del sistema se vinculan los coeficientes con las incógnitas de forma correcta. En 9 problemas el número de incógnitas en la estructura sintáctica del problema es el mismo que en el sistema de ecuaciones planteado (categoría G). Respecto a los seis restantes, en 3 se añaden dos incógnitas, en 1 se añade una incógnita y en 1 se suprime una incógnita. Se da significado a las incógnitas en todos los problemas en los que hay presencia de ellas (categoría H). Les dan significado a las operaciones aditivas en 14 problemas (categoría I), todos ellos son de combinación. En cuanto al significado de las operaciones multiplicativas (categoría J), les dan significado en 11 problemas: salvo un problema de comparación los demás son de proporcionalidad simple.

Tabla 8

Frecuencia de cada categoría para la ecuación 6: $\left.\begin{array}{r} x+y=7 \\ xy=10 \end{array}\right\}$

Evaluación	Categoría									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
SI	6	6	8	11	12	12	8	10	9	0
NO	6	0	4	1	0	0	4	2	3	12
N/A	8	12	8	8	8	8	8	8	8	8

No se analizan las producciones de los siguientes alumnos correspondientes a este sistema de ecuaciones: A9, A12 y A19 porque no tienen sentido y A14, A15, A17, A18 y A20 porque no han inventado ningún problema.

La estructura sintáctica de los problemas planteados se corresponde con la estructura del sistema de ecuaciones original en la mitad de los problemas considerados (categoría A), y en todos ellos se mantiene el orden tanto de las ecuaciones como de los miembros de las mismas (categoría B). Las operaciones entre los términos se conservan en 8 problemas (categoría C): 6 de ellos son aquellos cuya estructura sintáctica se corresponde con el sistema de ecuaciones original, en uno de los otros dos una incógnita la pone como dato y en otro añaden una incógnita. Hay presencia de igualdad en todos salvo uno de los problemas (categoría D), en el otro problema solo se incluye una igualdad en vez de dos como requiere el sistema. En todos los problemas analizados hay presencia de incógnitas (categoría E) y se establece una relación que vincula los coeficientes con dichas incógnitas (categoría F). En todos salvo 4 de los problemas analizados, el número de incógnitas en los problemas es el mismo que en que la ecuación planteada; respecto a los 4 restantes: en 2 se añade una incógnita, en 1 se añaden dos y en otro hay una incógnita menos. Salvo en 2 problemas que son de teoría de números, en el resto dan significado a las incógnitas. En cuanto al significado de las operaciones aditivas (categoría I) le dan significado en 9 problemas, todos de combinación. En ningún problema dan significado a las operaciones multiplicativas (categoría J).

Tabla 9
Frecuencia de cada categoría para la ecuación 7: $20 = x(x+1)$

Evaluación	Categoría									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
SI	6	2	7	11	11	11	10	4	9	0
NO	7	4	6	2	2	0	1	7	4	13
N/A	7	14	7	7	7	9	9	9	7	7

En esta ecuación solo se analizan 13 enunciados: el inventado por A7 no tiene sentido y A12, A14, A15, A16, A18 y A20 no proponen ninguno.

En 6 de los 13 problemas la estructura sintáctica se corresponde con la ecuación original (categoría A), y en 2 de ellos se conserva el orden de los miembros (categoría B). Las operaciones entre los términos de la ecuación se conservan en 7 problemas (categoría C): 6 de ellos son los que tienen la misma estructura sintáctica que la ecuación original y otro es porque añade una incógnita. Solo en 2 de los 13 problemas no hay presencia de igualdad, siendo uno de ellos resoluble mediante una operación aritmética. Hay presencia de incógnitas y se vincula de forma correcta los coeficientes con dichas incógnitas en todos salvo en dos de los problemas (categorías E y F respectivamente), el resto se resuelven con una operación aritmética. En todos menos en uno de los enunciados analizados, en el cuál se añade una incógnita, el número de incógnitas es el mismo que en la ecuación original (categoría G). Solamente en 4 de los problemas les dan significado a las incógnitas (categoría H); siendo 3 de los restantes de teoría de números. En cuanto al significado de las operaciones aditivas (categoría I) se lo dan en 9 de los problemas inventados: 7 de ellos son de cambio y 2 de comparación. En ninguno de los problemas le dan significado a la operación multiplicativa (categoría J).

2.2 Resultados por categoría de análisis

En este apartado recogemos los resultados de los enunciados inventados por los estudiantes atendiendo por separado a cada una de las categorías consideradas en el análisis, y teniendo en cuenta las variables de tarea implicadas en el diseño del cuestionario.

El mayor número de problemas inventados por los alumnos corresponde a la ecuación número 1 (19), mientras que las ecuaciones 6 (12) y 7 (13) son para las que los alumnos inventan menos problemas. Estas dos ecuaciones son las últimas del cuestionario lo cual pudo ser el motivo de la menor cantidad de respuestas. Ambas tienen en común las variables de tareas: número de miembros con incógnita que es uno, el coeficiente de la incógnita que es igual a uno, y la variable de tarea operación de la incógnita, en ambas se encuentra multiplicando. Para el resto de las ecuaciones el número de problemas inventados son: ecuación número 2, 16; ecuaciones número 3 y 4, 17; sistema de ecuaciones número 5, 15.

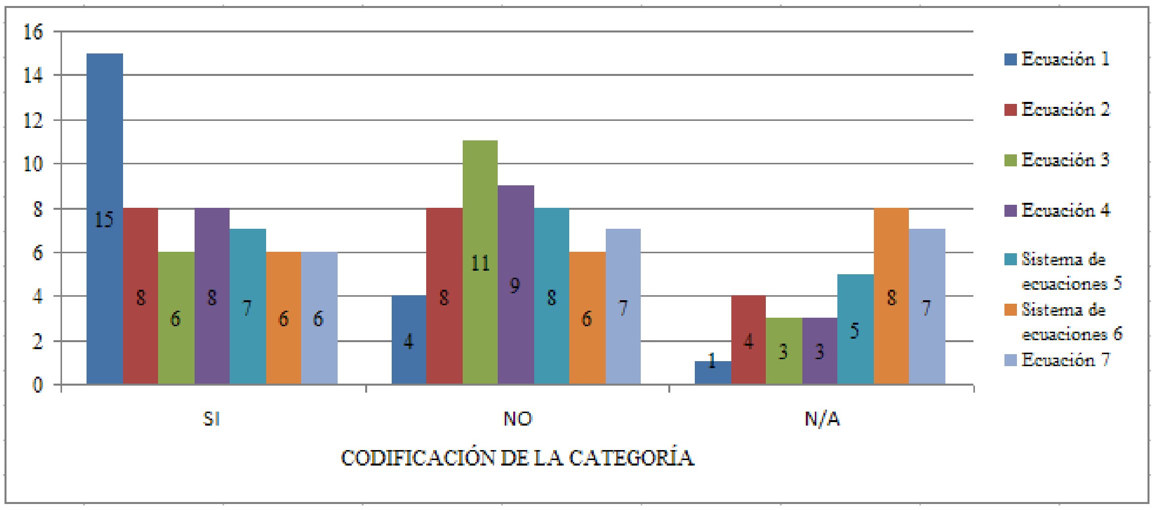

Figura 15. Frecuencia de la categoría A para cada ecuación y sistema de ecuaciones

Al atender a la diferencia de resultados según la categoría A (Conservación de la estructura de la ecuación) en función de las variables de tarea que distinguen cada ecuación o sistema (ver figura 15) observamos lo siguiente:

- No se detecta influencia al considerar de forma separada las variables número de incógnitas, coeficiente de la incógnita y operación de la incógnita. A igual número de incógnitas, la codificación para esa categoría difiere bastante, por ejemplo, la ecuación número 1 con una incógnita tiene un alto número de problemas codificados afirmativamente en esta categoría, pero las ecuaciones 2, 3, 4 y 7 que tienen el mismo número de incógnitas no tienen el mismo comportamiento, en la figura 15 se observa que ocurre lo mismo con el resto de las variables de tarea mencionadas.

- La primera ecuación destaca sobre las demás por ser la que presenta la mayor frecuencia. En este caso el número de incógnitas es uno, el coeficiente de la incógnita es uno y la operación con la incógnita es la suma. El único componente que podía hacer esta expresión más compleja que otras era que la incógnita se situaba en el miembro derecho.
- La tercera ecuación destaca por ser la que presenta una mayor frecuencia de enunciados con estructura sintáctica diferente a la ecuación dada. Esta es la única ecuación en la que la incógnita se muestra a ambos lados del signo igual.
- La posición de la incógnita en el miembro derecho o izquierdo no parece condicionar la respuesta de los estudiantes según los resultados correspondientes a esta categoría.

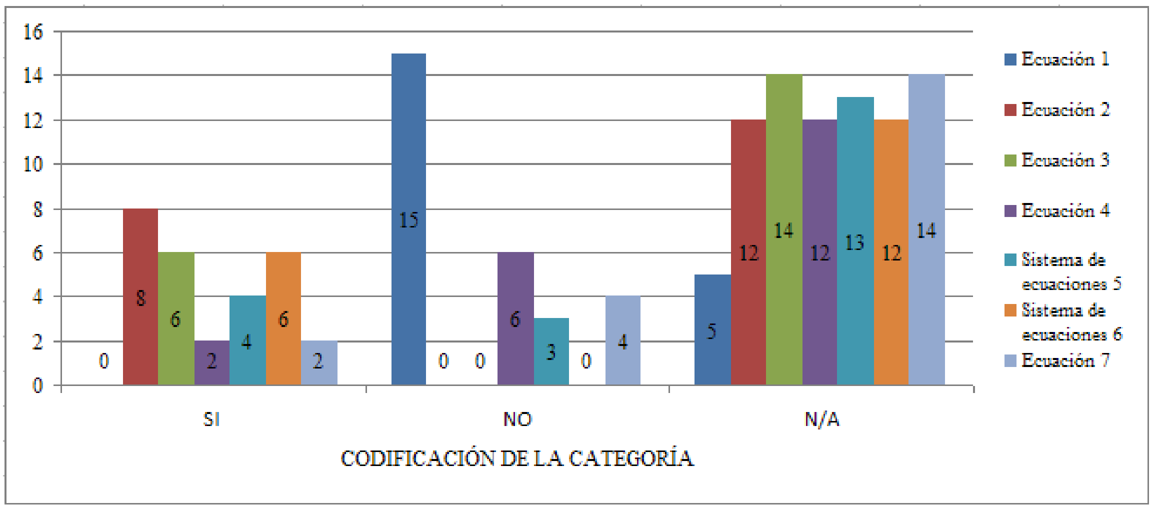

Figura 16. Frecuencia de la categoría B para cada ecuación y sistema de ecuaciones

Atendiendo a los resultados según la categoría B (Conservación del orden de los miembros de la ecuación) en función de las variables de tarea tenidas en cuenta para la selección de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones del cuestionario (ver Figura 16) observamos lo siguiente:

- No se detecta influencia al considerar de forma separada las variables de tarea número de incógnitas, número de miembros con incógnita, coeficiente de la incógnita y operación de la incógnita. Por ejemplo, en las ecuaciones 2 y 6 que tienen un número diferente de incógnitas y diferente operación con la incógnita, se conserva el orden de los miembros de la ecuación en todos los problemas inventados por los estudiantes. En el caso del sistema de ecuaciones número 5, en los tres problemas donde no se conserva el orden de los miembros es porque se altera el orden de las ecuaciones.

- La ecuación número 1 destaca por su alta frecuencia (15) donde no se conserva el orden de los miembros de la ecuación, es este caso la incógnita se encuentra a la derecha del signo igual. Las ecuaciones 4 y 7 también tienen la incógnita a la derecha del signo igual y podemos observar que son los siguientes casos donde no se conserva el orden de los miembros con mayor frecuencia (frecuencias 6 y 4 respectivamente).

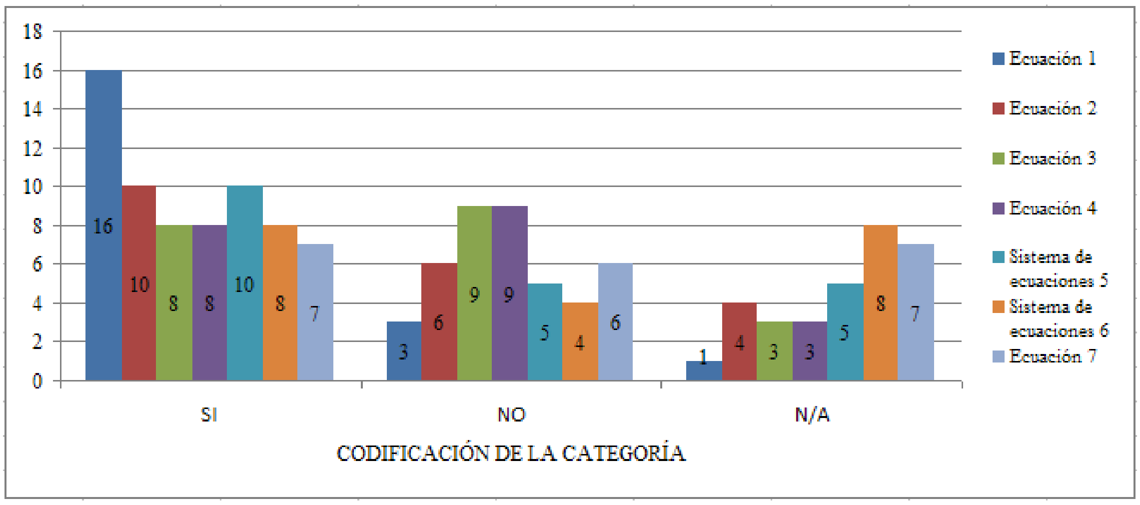

Figura 17. Frecuencia de la categoría C para cada ecuación y sistema de ecuaciones

Al atender a la diferencia de resultados según la categoría C (Conservación de las operaciones entre los términos de la ecuación) en función de las variables de tarea que distinguen cada ecuación o sistema (ver figura 17) observamos lo siguiente:

- No se detecta influencia al considerar de forma separada las variables de tarea número de incógnitas, coeficiente de la incógnita, operación de la incógnita y posición de la incógnita. Atendiendo al número de incógnitas, observamos que la ecuación número 1 tiene una incógnita y destaca en frecuencia (16) de problemas cuya estructura sintáctica conservan el orden de los términos de la ecuación, frente a las ecuaciones número 2, 3, 4 y 7, que tienen el mismo número de incógnitas y no tienen el mismo comportamiento tal y como se puede observar en la figura 17.
- Destacan las ecuaciones 3 y 4 por ser donde hay una mayor frecuencia de problemas cuya estructura sintáctica no conservan las operaciones entre los términos de la ecuación. En el caso de la ecuación 3 es la única donde la incógnita se encuentra a ambos lados del signo igual. En cuanto a la ecuación número 4, la única variable de

tarea que tiene en común con la ecuación 3 es el número de incógnitas y tal y como se muestra en el párrafo anterior no parece estar relacionada con la codificación de esta categoría.

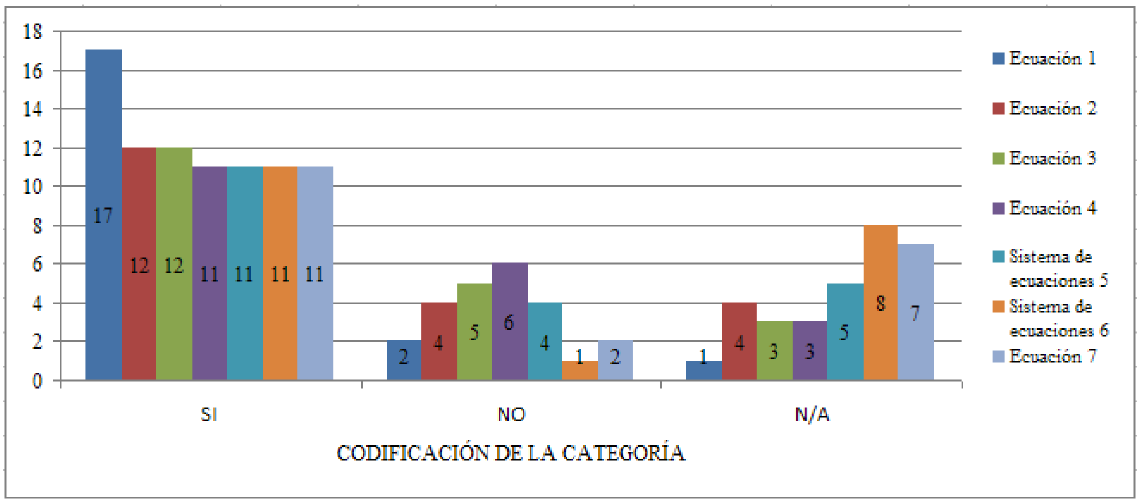

Figura 18. Frecuencia de la categoría D para cada ecuación y sistema de ecuaciones

Según la categoría D (Presencia de igualdad) obtenemos diferentes resultados para cada una de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones en función de las variables de tarea que las caracterizan (ver figura 18), destacamos las siguientes observaciones:

- En la mayoría de los problemas inventados por los estudiantes hay presencia de igualdad. Destaca la frecuencia de esta categoría (17) en la ecuación número 1, aunque tal y como ocurre en los resultados de las categorías anteriores, no hay ninguna variable de tarea que se presente de forma exclusiva en esta ecuación. Así, las ecuaciones 2, 3, 4 y 7 tienen el mismo número de incógnitas, las ecuaciones 4, 6 y 7 el mismo coeficiente de la incógnita, la 2, 3 y 5 la misma operación de la incógnita y las ecuaciones 4 y 7 el mismo número de miembros con incógnita e igual posición de la misma, y su comportamiento respecto a esta categoría es diferente. Por lo que no se detecta influencia al considerar de forma separada las variables de tarea mencionadas.
- En la ecuación número 4 es donde menos presencia de igualdad hay ya que por lo que pregunta el problema queda despejado a un lado de la igualdad en 6 de los 17 problemas. Esta ecuación no tiene ninguna variable de tarea no común al resto de las ecuaciones, por lo que no se detecta que la codificación de la categoría D dependa de las variables de tarea tenidas en cuenta de forma separada.

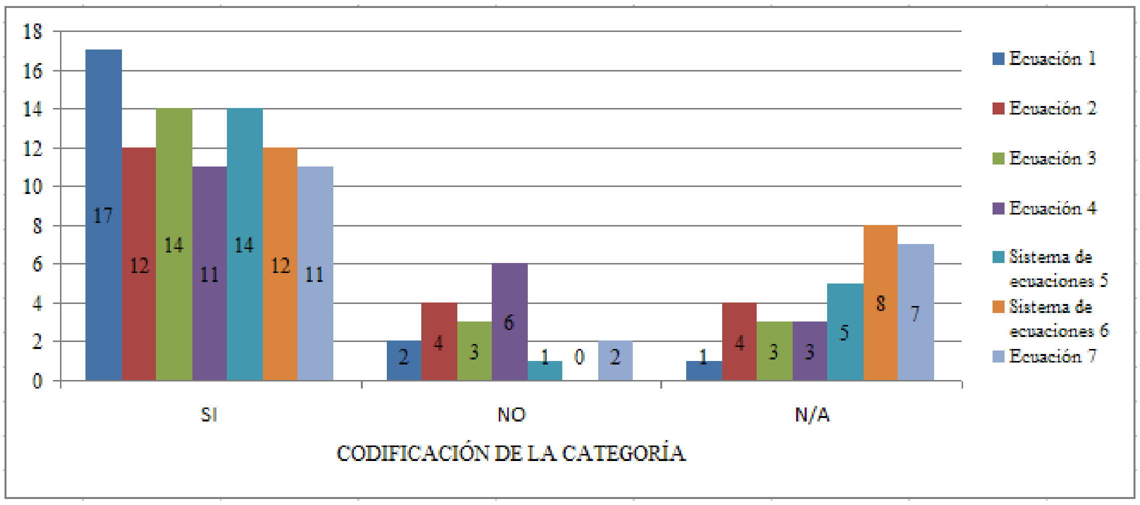

Figura 19. Frecuencia de la categoría E para cada ecuación y sistema de ecuaciones

Atendiendo a los resultados según la categoría E (Presencia de incógnita/s) en función de las variables de tarea tenidas en cuenta en las ecuaciones y sistemas de ecuaciones del cuestionario (ver Figura 19) observamos lo siguiente:

- Al igual que en la categoría D, en la mayoría de los problemas inventados por los estudiantes hay presencia de incógnitas (ver Figura 19). No se detecta influencia al considerar de forma separada las variables de tarea número de incógnitas, número de miembros con incógnita, coeficiente, operación y posición de la incógnita.
- La ecuación número 1 es la que tiene mayor frecuencia (17). En los enunciados propuestos por los estudiantes hay mayoritariamente presencia de incógnita.
- La ecuación número 4 es donde menor presencia de incógnitas hay, cuando no hay incógnita la solución del problema es el resultado de una operación aritmética. No se detecta que la codificación de la categoría D dependa de las variables de tarea tenidas en cuenta de forma separada, no hay variables de tarea no comunes a otras ecuaciones.

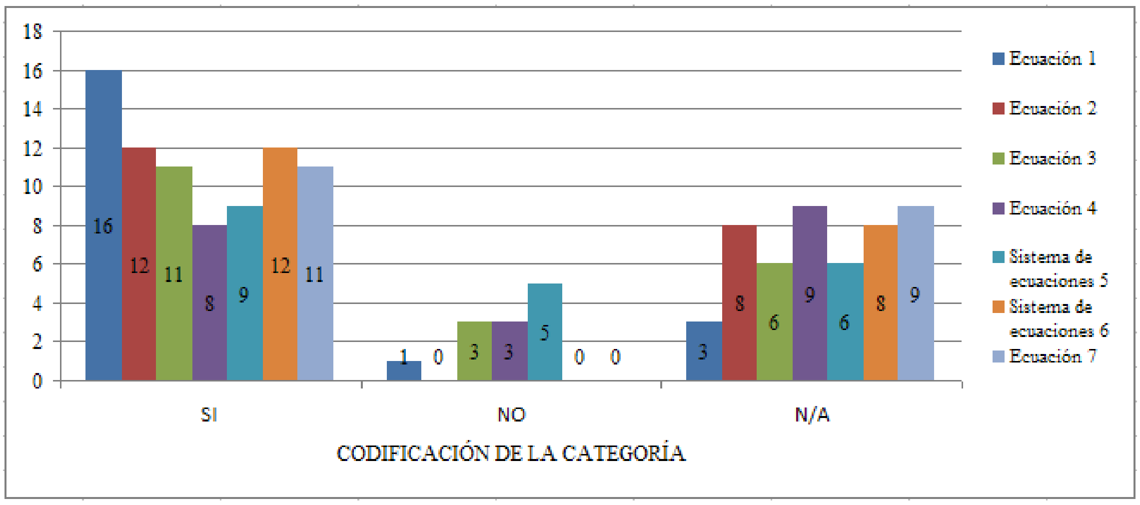

Figura 20. Frecuencia de la categoría F para cada ecuación y sistema de ecuaciones

Teniendo en cuenta los resultados según la categoría F (Establece una relación que vincula el/los coeficiente/s con la/s incógnita/s) en función de las variables de tarea que definen cada una de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones (ver Figura 20) observamos lo siguiente:

- No se detecta influencia al considerar de forma separada las variables de tarea número de incógnitas, número de miembros con incógnita, operación de la incógnita y posición de la incógnita.
- En las ecuaciones 3, 4 y 5 la frecuencia de no relacionar correctamente el coeficiente con la incógnita es mayor. La variable de tarea común a las ecuaciones 3 y 5 es el coeficiente de la incógnita diferente a uno, el comportamiento de la categoría es diferente en la ecuación número 2, donde el coeficiente de la incógnita es también diferente a uno.

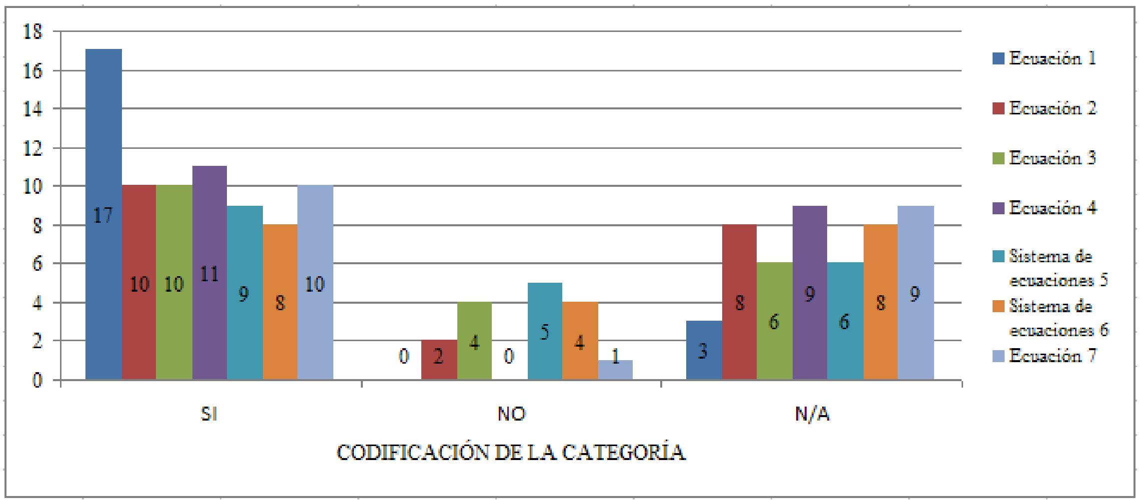

Figura 21. Frecuencia de la categoría G para cada ecuación y sistema de ecuaciones

Teniendo en cuenta la categoría G (Igual número de incógnitas) obtenemos diferentes resultados para cada una de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones en función de las variables de tarea que las caracterizan (ver Figura 21), destacamos las siguientes observaciones:

- No se detecta influencia al considerar de forma separada las variables de tarea coeficiente de la incógnita, operación de la incógnita y posición de la incógnita. A igual coeficiente de la incógnita la codificación para esta categoría difiere bastante, por ejemplo, la ecuación número 1 con coeficiente de la incógnita igual a 1 tiene una frecuencia alta (17) de problemas con igual número de incógnitas que la ecuación original, y el sistema de ecuaciones número 6 con igual coeficiente de las incógnitas no se comporta de la misma forma (frecuencia 8).

- Las ecuaciones y sistemas de ecuaciones 3, 5 y 6 destacan por ser en los que hay mayor diferencia del número de incógnitas respecto de las ecuaciones y sistemas originales. La ecuación número 3 se caracteriza por la variable de tarea número de miembros con incógnita, que se encuentra a ambos lados del signo igual. Los sistemas de ecuaciones 5 y 6 tienen como variable de tarea diferente del resto de ecuaciones el número de incógnita, que es dos.

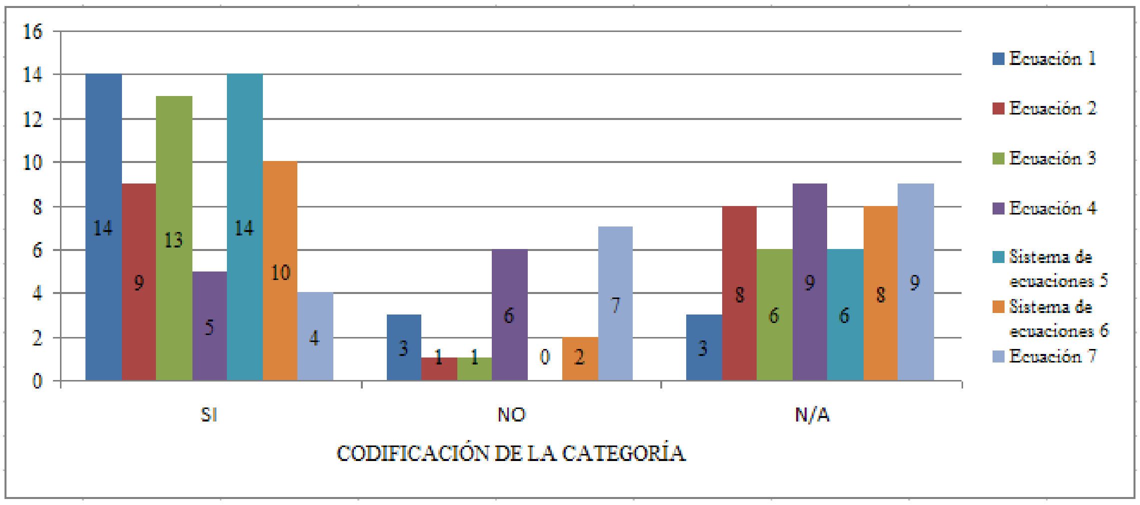

Figura 22. Frecuencia de la categoría H para cada ecuación y sistema de ecuaciones

Atendiendo a los resultados según la categoría H (Da significado a las incógnitas) en función de las variables de tarea que distinguen cada ecuación o sistema de ecuaciones (ver figura 22) observamos lo siguiente:

- No se detecta influencia al considerar de forma separada las variables de tarea número de incógnitas, número de miembros con incógnita, coeficiente de la incógnita y posición de la incógnita. Por ejemplo las ecuaciones 1 y 5, que destacan por tener una mayor frecuencia (14) de problemas en los que les dan significado a las incógnitas, tienen un número diferente de incógnitas.
- Los enunciados propuestos por los estudiantes correspondientes a las ecuaciones 4 y 7 son a los que menos les dan significado a la incógnita, la variable de tarea común a estas ecuaciones es la operación de la incógnita, siendo en estos casos la multiplicación.

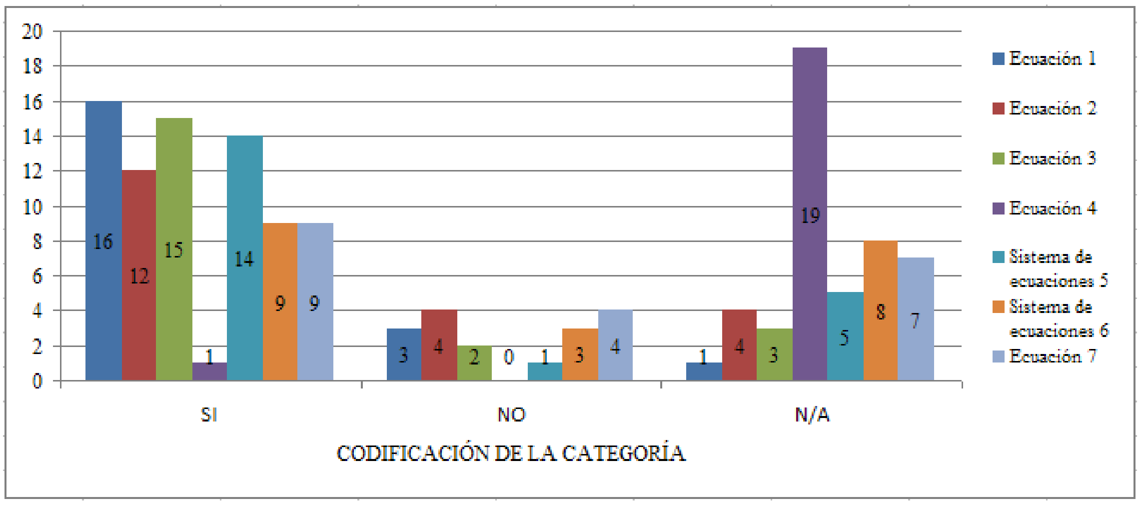

Figura 23. Frecuencia de la categoría I para cada ecuación y sistema de ecuaciones

Atendiendo a los resultados según la categoría I (Da significado a las operaciones aditivas)[4] en función de las variables de tarea (ver Figura 23) observamos lo siguiente:

- De forma general, los estudiantes dan significado a las operaciones aditivas en los enunciados que proponen, predominan las de combinación (57%) seguidas de las de cambio (39%) y las de igualación (4%).
- No se detecta influencia de que ninguna de las siguientes variables de tarea tenidas en cuenta por separado influyan en la codificación de esta categoría: número de incógnitas, número de miembros con incógnitas, coeficiente de la incógnita, operación de la incógnita y posición de la incógnita.

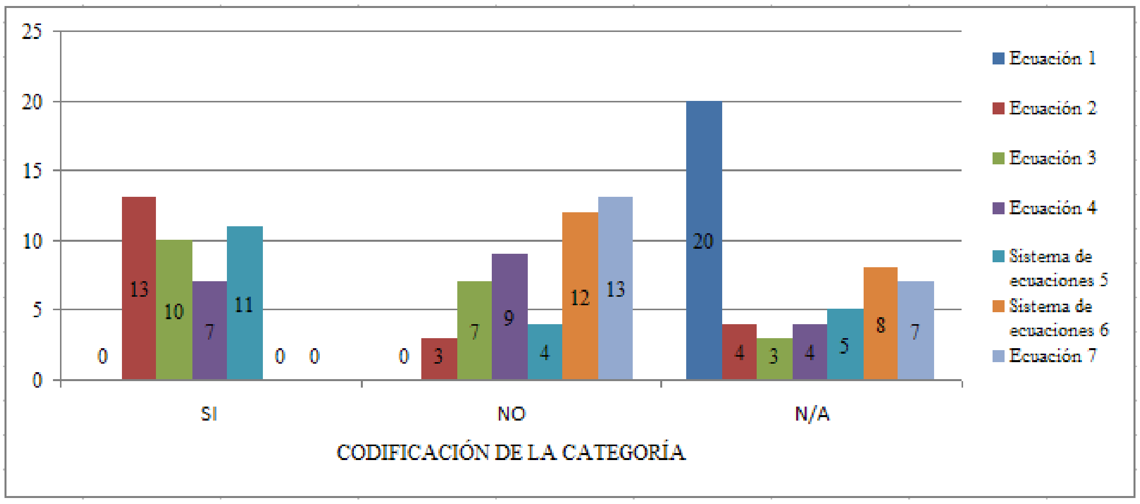

Figura 24. Frecuencia de la categoría J para cada ecuación y sistema de ecuaciones

Teniendo en cuenta la categoría J (Da significado a las operaciones multiplicativas)[5] obtenemos diferentes resultados para cada una de las ecuaciones y sistemas de

[4] Nos encontramos con estructuras aditivas en las ecuaciones 1, 2, 3, 5, 6 y 7.

ecuaciones en función de las variables de tarea que las caracterizan (ver Figura 24), destacamos las siguientes observaciones:

- No se detecta influencia al considerar de forma separada las variables de tarea, número de incógnitas, número de miembros con incógnitas, coeficiente de la incógnita, y posición de la incógnita. Predominan las operaciones multiplicativas de comparación (57%), seguidas de las de proporcionalidad simple (43%).
- Las ecuaciones 4, 6 y 7 son en las que menos les dan significado a las operaciones multiplicativas, en todas ellas la operación de la incógnita se encuentra multiplicando.

3. PUESTA EN COMÚN

En este apartado destacamos algunas intervenciones que tuvieron lugar durante la puesta en común las cuales nos permiten complementar la información obtenida a partir del análisis de las respuestas al cuestionario. Las observaciones obtenidas a partir de la puesta en común hacen referencia a intervenciones que hacen los alumnos de forma individual.

3.1 Intervenciones destacadas de la puesta en común

Recordamos que en la puesta en común solo se consideraron las ecuaciones 3 y 4 y el sistema 5.

3.1.1 Ecuación 3: $x+10=6x$

En la puesta en común de la ecuación 3 se plantearon cuatro problemas inventados por los estudiantes. Para el primer problema considerado (A1 – 3: *Tengo tres bolsas en una tengo 10 caramelos en la otra tengo 6 veces más y en la tercera no lo se. ¿Cuantos caramelos hay?*, con estructura sintáctica $6+6\cdot 10+x=?$) los estudiantes no llegan a proponer ninguna reformulación. Una de las estudiantes (A4) comenta: *"Dice que tiene tres bolsas pero serían dos, x+10 y 6x"*.

En el problema A4 – 3 (*La edad de Luis es 6 veces la edad de Andrea más 10. ¿Cuántos años tiene Luís?*, con estructura sintáctica $x=6y+10$) una de las alumnas (A5) menciona respecto al número de incógnitas: *"Tendría una igualdad con la edad de Andrea que no la sabemos, pero luego te pregunta que cuántos tiene Luis, entonces tendría dos, no se podría resolver de esa manera"*. Se observó que en los problemas A1 – 3 y A4 – 3 los estudiantes relacionan correctamente los coeficientes y las incógnitas.

[5] Nos encontramos con estructura multiplicativas en las ecuaciones 2, 3, 4, 5, 6 y 7.

En el problema A9 – 3 (*Queremos averiguar cuantos discos hay en 10 cajas si en cada caja caben 6*, con estructura sintáctica $6 \cdot 10 = ?$) los alumnos hacen comentarios como: (A1) "Si ya te lo está diciendo", o (A8): "10 por 6". Cuando se les pregunta: "¿qué nos falta en este problema?", muchos de los estudiantes contestan a la vez: "una incógnita".

En el problema A11 – 3 (*Tengo 10 conejos, y me regalan el mismo número de conejos que a mi vecino. Si mi vecino tiene 6 conejos y ahora tenemos los mismos. ¿Cuántos conejos me dieron?*, con estructura sintáctica $10 + x = 6 + x$) una de las estudiantes (A3) menciona: "sería 6 veces más ¿no? el número de conejos que tiene mi vecino".

3.1.2 Ecuación 4: $16 = x^2$

En la puesta en común para esta ecuación 4 se plantearon a los alumnos los siguientes enunciados: A1 – 4 (*Tengo 16 pelotas y las quiero en dos grupos. ¿De cuantas pelotas están formados los grupos?*, con estructura sintáctica: $16/2 = ?$), A4 – 4 (*Calcula la edad de Ana sabiendo que su hermana le cuatriplica la edad, teniendo la hermana 16 años*, con estructura sintáctica: $4x = 16$), A9 – 4 (*Ana tiene 16 años, ¿Cuántos años tendrá cuando pasen otros 16 años?*, con estructura sintáctica: $16+16=?$) y A11 – 4 (*Si en un taller hay 16 ruedas de coche ¿para cuántos coches habrá suficientes ruedas?*, con estructura sintáctica $16/4 = ?$). Cuando se les pregunta a los estudiantes cuáles son los fallos en los enunciados planteados hacen comentarios como: (A4) "Que no se ha elevado al cuadrado si no que se ha dividido o se ha multiplicado", (A8) "Es que en el tercero por ejemplo es una suma", (A20) "En el 4 si cada coche tiene 4 ruedas, pues 16 ruedas las divides entre las ruedas de los coches", (A17) "En el segundo hay un cuádruplo no puede haber un cuadrado". Posteriormente se les pregunta a los alumnos qué tipo de problemas se pueden resolver con la ecuación número 4 y ellos contestan: (A13) "Pues si tenemos un número y los elevamos a dos da 16, pues ¿qué número es?" o (A7) "Por ejemplo el área del cuadrado".

3.1.3 Sistema de ecuaciones 6: $\left.\begin{array}{r} 5x+3y=69 \\ x+y=15 \end{array}\right\}$

En la puesta en común para el sistema de ecuaciones 6 se plantearon los siguientes cinco problemas inventados por los estudiantes, en el problema A3 – 5 (*Compramos 5 libros y 3 lápices, que nos cuestan 69€ ¿Cuantos libros y lápices hemos comprado, si nos a costado 15€?*, con estructura sintáctica es $\left.\begin{array}{r} 5x+3y=69 \\ ax+by=15 \end{array}\right\}$) una estudiante (A8) observa que el enunciado no se corresponden con el sistema de ecuaciones propuesto: “Porque dice que todo le ha costado 15 euros y lo que le ha costado 15 euros sería un lápiz y un libro”, otra estudiante (A2) reformula el problema correctamente: “A ver, si compramos 3 lápices y 5 libros y nos cuesta 69 euros, ¿cuánto vale un lápiz y un libro sabiendo que los dos cuestan 15 euros?”.

En el problema A9 – 5 (*En una clase de 69 personas, hay 5 con la camiseta azul y 3 con la camiseta verde. ¿Cuántas personas llevarán camiseta azul o verde si en la clase hay sólo 15?*, con estructura sintáctica $\left.\begin{matrix} 5+3+z=69 \\ x+y=15 \end{matrix}\right\}$) los alumnos no encuentran sentido al enunciado como se muestra en los siguientes comentarios: (A20) “si dice que hay 69 personas, ¿cómo luego te va a decir que solo hay 15?”; (A16) “Porque dice que hay 15 entre los que llevan camiseta azul y verde hay 15 en total”; (A4) “Si dice que hay 69 personas y luego 5 de azul y 3 de verde, solo hay ocho”.

En el problema A8 – 5 (*Tenemos 5 cajas de peras y 3 cajas de manzanas, la suma de todas las frutas es 69. Sabemos que sumando una caja de cada fruta, obtenemos 15 frutas. ¿Cuantas peras y manzanas hay?),* una estudiante (A7) corrige la pregunta final con el comentario: “Que tendrías que saber cuanta fruta hay en cada caja”.

Para el problema A12 – 5 (*En una granja hay 69 patas de gallina y 15 patas de caballos ¿cuántos caballos y cuantas gallinas hay en la granja?*, con estructura sintáctica $\left.\begin{matrix} 69/2=? \\ 15/4=? \end{matrix}\right\}$) una estudiante (A1) observa la falta de datos: “faltaría el 3 y el 5”, otra estudiante (A4) reformula el enunciado para que se pueda resolver con el sistema de ecuaciones propuesto: “Las x y las y serían las gallinas y los caballos y que hay, 15 animales en total y que luego o que la gallina tenga 5 patas y el caballo 3 y luego la suma de todas las patas serían 69. O al revés que el caballo tenga 4 patas y mas la cabeza sean 5 y que la gallina tenga 2 patas y mas la cabeza 3”.

En el problema A13 – 5 (*En un almacén hay 15 pares de pañuelos. Unos son rojos y los otros azules. Están en rebajas y los rojos valen 5€ y los azules 3. ¿Cuántos pañuelos rojos hay? ¿y cuántos azules?*, con estructura sintáctica $\left.\begin{matrix} x+y=15 \\ 5x+3y \end{matrix}\right\}$) hay estudiantes que observan que falta uno de los datos (A4) aunque no le dan el significado correcto: “Yo lo pondría de otra forma la pregunta ¿Cuántos pañuelos rojos y azules hay si en total son 69?", y otro estudiante sí le da el significado correcto: "La pregunta, hay que preguntar que si he pagado 69 euros ¿cuántos pañuelos me he llevado de cada uno?".

3.2 Resultados extraídos de la puesta en común

Cabe destacar que los estudiantes no son capaces de reformular el primer enunciado propuesto, esto puede ser debido a que es el primero y hasta que no se avanza en la sesión no adquieren confianza para realizar más intervenciones o a que al principio no tenían clara la tarea que se les estaba proponiendo.

Resaltamos los comentarios de algunos alumnos, tales como el del estudiante A4 al problema A1 – 3, "Dice que tiene tres bolsas pero serían dos, x+10 y 6x", aunque podría haber tres bolsas, el alumno interpreta que debe haber dos bolsas como la relación entre los dos lados del signo igual. Encontramos interesante el hecho de que los alumnos observen cuándo no es necesario la utilización del simbolismo algebraico en determinados problemas, tal y como muestra la respuesta de todos los estudiantes relacionada con el problema A9 – 3 cuando se les pregunta "¿qué nos falta en este problema?", y todos responden "una incógnita". En cuanto a los enunciados propuestos para la ecuación número 4, destacamos los comentarios del estudiante A4: "Que no se ha elevado al cuadrado si no que se ha dividido o se ha multiplicado", cuando uno de los problemas propuestos en la puesta en común era suyo y multiplicaba en lugar de elevar al cuadrado, por lo que se da cuenta de su fallo. También el estudiante A7 comenta respecto a los enunciados anteriores, "Por ejemplo el área del cuadrado", a pesar de que ella inventa un problema de teoría de números en la puesta en común lo asocia al contexto del área de un cuadrado.

4. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

En este apartado del capítulo discutimos los principales resultados presentados en los apartados anteriores. Como era predecible por sus características, fue en la primera ecuación donde los estudiantes tuvieron mayor éxito en proponer un problema resoluble con la ecuación original. En la ecuación número 2 a pesar de que las únicas variables de tarea que varían respecto de la primera son el coeficiente de la incógnita y la posición de misma, los estudiantes encuentran más dificultades para proponer un problema cuya estructura sintáctica coincida con la ecuación dada. En este caso, un 25% de los problemas inventados son de tipo aritmético en el sentido de que no es necesario el uso de simbolismo algebraico para su resolución. Estos problemas no son resolubles con la ecuación dada ni con ninguna otra equivalente. Entendemos que la dificultad, en comparación con la primera ecuación, subyace en el coeficiente de la incógnita (diferente de 1) dado que la posición de la incógnita es la más habitual para los estudiantes. A pesar de ello, en los problemas formulados que incluyen incógnitas, en su mayoría (8 problemas de 11) relacionan correctamente el coeficiente con la misma.

En la ecuación número 3, con la incógnita a ambos lado del signo igual, es cuando los estudiantes tienen más dificultades en conservar las operaciones entre los términos de la ecuación y en establecer una igualdad. Tienden a identificar como diferentes las incógnitas situadas en cada miembro y les cuesta establecer una relación entre la misma incógnita con coeficiente igual a 1. Isik y Kar (2012) coinciden en señalar la mayor dificultad para inventar problemas cuando la incógnita se encuentra a ambos lados del signo igual, en su caso en un estudio con profesores en formación. Otros autores como Filloy y Rojano (1989) señalan que hay un "corte didáctico" cuando los alumnos pasan de trabajar con ecuaciones con la incógnita a un solo lado del signo igual a ecuaciones con incógnita a ambos lado. También Cerdán (2008) muestra que en los procesos de traducción del sistema de representación verbal al simbólico, se producen menos igualdades correctas cuando los estudiantes trabajan con este tipo de ecuaciones.

Cabe señalar también que en el caso de la ecuación 3, el coeficiente de la incógnita a la derecha del signo igual es 6, los estudiantes tienen mayor dificultad a la hora de relacionar este coeficiente con la incógnita que cuando es igual a 2 tal y como se puede observar en la Figura 20.

En cuanto a la ecuación número 4 los estudiantes presentan dificultades principalmente al establecer una igualdad, mantener las operaciones entre los términos de la ecuación y dar significado a la incógnita y a las operaciones multiplicativas. Los problemas escolares que de forma general se resuelven con este tipo de expresiones suelen estar asociados al contexto de área de un cuadrado, y en menor medida a otras situaciones en las que la multiplicación tiene significado de producto cartesiano. En los problemas inventados por los estudiantes del estudio observamos que este contexto no se presenta.

En los sistemas de ecuaciones se observa dificultad en establecer el mismo número de incógnitas, suelen añadir una o dos incógnitas, mostrando dificultad para referir a las mismas incógnitas cuando en el enunciado narran relaciones relativas a ecuaciones diferentes. En el sistema de ecuaciones número 5, de los 14 problemas en los que hay presencia de incógnitas, en 5 el número de incógnitas es diferente; en el sistema de ecuaciones número 6, de los 12 enunciados en los que hay presencia de incógnitas, en 4 de ellos el número es diferente al del sistema original. En el sistema de ecuaciones número 5 los estudiantes tienen mayores dificultades a la hora de relacionar los coeficientes con las incógnitas, tal como ocurre en la ecuación número 3. En ambos casos los coeficientes de las incógnitas son diferentes a uno y a dos. En general observamos que los estudiantes tienen más dificultades cuando el coeficiente de la incógnita es diferente a uno, siendo más acusado cuando también es diferente a 2. Consideramos que para ellos es más fácil decir el doble, ya que están más acostumbrados a trabajarlo y a escucharlo, que decir 6 veces.

A partir del sistema de ecuaciones número 6, este incluido, es cuando se analizan menos problemas, bien porque no es posible plantear la estructura sintáctica del problema inventado, o bien porque los estudiantes no han inventado ningún enunciado. Esto puede deberse a la posición en la que se encuentran este sistema en el cuestionario, ya que está al final, o a la dificultad de los mismos.

En cuanto al sistema de ecuaciones número 6 cabe destacar, que además de la dificultad que tienen los estudiantes para conservar el número de incógnitas del sistema original, también se presentan las de conservar las operaciones entre los términos y dar significado a las operaciones multiplicativas. Estas dificultades parecen estar motivadas por la operación de la incógnita, que es la multiplicación.

Respecto a la ecuación número 7, los estudiantes presentan dificultad al conservar el orden de los miembros de la ecuación tal y como ocurre en el resto de ecuaciones donde la incógnita se encuentra a la derecha del signo igual. Cabe destacar que ninguno de los estudiantes le da significado a la operación multiplicativa, lo cual parece estar relacionado, al igual que en el sistema de ecuaciones número 6, con que la operación de la incógnita es la multiplicación. El hecho de que la incógnita aparezca dos veces en la ecuación también parece influir en que los alumnos no le den significado a la misma.

Los resultados por categorías presentados en el apartado 2.2 de este capítulo muestran, respecto a la categoría B, que la conservación del orden de los miembros de la ecuación parece estar asociada a la posición de la incógnita, así cuando esta se encuentra a la derecha del signo igual suelen tener más dificultades a la hora de inventar un problema cuya estructura sintáctica tenga el mismo orden de los miembros que la ecuación original. A lo largo de la educación primaria y secundaria los alumnos están acostumbrados a resolver problemas de tal forma que el resultado se exprese a la derecha del signo igual, y en las ecuaciones normalmente la incógnita queda a la izquierda del signo igual, por lo que cuando plantean un problema tienden a hacerlo en ese orden, y como podemos observar en la Figura 16, en las ecuaciones 1, 4 y 7 que son donde la incógnita se encuentra a la derecha del signo igual, los estudiantes no conservan en su mayoría el orden de los miembros de la ecuación.

De forma general (75%) los estudiantes atribuyen significados a las incógnitas asociados a contextos no matemáticos. Observamos que los estudiantes no relacionan las ecuaciones con contextos de área lo cual dificulta que puedan dar significado a las incógnitas en las ecuaciones que incluyen multiplicaciones entre incógnitas.

Los estudiantes, de forma general (82%), dan significado a las operaciones aditivas en los problemas inventados, predominan las de cambio y combinación, lo cual queda justificado ya que los problemas que involucran operaciones aditivas son los más trabajados por los estudiantes desde el comienzo de la educación primaria, Ayllón (2012) menciona que los problemas aditivos más abundantes en los libros de texto son los de cambio y combinación, como señalan trabajos de diferentes autores entre los que se encuentran Orrantia, González y Vicente (2005). En cuanto al significado de las operaciones multiplicativas, los alumnos tienen más dificultades cuando se multiplican las incógnitas, como hemos mencionado en el párrafo anterior estos problemas están asociados a un tipo de contexto más específico y cuando los estudiantes no lo relacionan con el mismo suelen perder el significado de la operación.

Teniendo en cuenta la puesta en común, los estudiantes que inventan enunciados correctos son los que en general reconocen los errores que aparecen en los problemas del resto de sus compañeros. Todas las observaciones recogidas en el apartado 3 de este capítulo confirman la discusión de los resultados obtenidos.

CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES

Este último capítulo está dedicado a recoger las conclusiones obtenidas tras la realización de este trabajo de investigación.

1. CONSECUCIÓN DE LOS OBJETIVOS

Consideramos conseguido el primer objetivo específico de la investigación consistente en analizar la estructura sintáctica de los problemas que inventan los estudiantes y comparar con el tipo de ecuación o sistema de ecuaciones al que corresponden. Los estudiantes, en su mayoría, son capaces de proponer un enunciado para cada una de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones que se les proporcionó a partir del cuestionario elaborado al respecto, lo cual nos ha permitido representar su estructura sintáctica (ver Anexo 2). Posteriormente hemos comparado dicha estructura con las ecuaciones y sistemas originales, pudiendo así definir siete categorías de análisis de tipo sintáctico (descritas en el capítulo 4), las cuales posteriormente nos permiten obtener resultados sobre parte de las características de las ecuaciones que dificultan a los estudiantes el inventar un problema que se resuelva con dicha ecuación, y por lo tanto el dotar del significado apropiado al simbolismo algebraico.

En cuanto al segundo objetivo específico planteado, distinguir el significado que dan los estudiantes a los diferentes componentes de las ecuaciones dadas. La definición de las categorías de tipo semántico (categorías de la H a la I descritas en el capítulo 4) nos ha permitido determinar si los estudiantes, participantes en el estudio, dan o no significado a las incógnitas, las operaciones aditivas y las operaciones multiplicativas.

La consecución de los dos objetivos descritos, nos ha permitido abordar el tercer objetivo específico de la investigación, identificar las características de las ecuaciones que dificultan a los estudiantes la tarea de inventar un problema. Para ello hemos comparando la codificación de cada una de las categorías, tanto sintácticas como semánticas, definidas a partir de las producciones de los estudiantes y descritas en el capítulo 4, con las variables de tarea que caracterizan a cada una de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

El objetivo específico número cuatro, identificar qué entienden los alumnos por problemas en los que es necesario el uso del simbolismo algebraico para su resolución, no ha sido abordado a lo largo de esta investigación debido al tiempo y la limitación de espacio del mismo. Nos queda pendiente, para un análisis posterior, indagar en esta cuestión teniendo en cuenta las características de los problemas inventados en la primera parte del cuestionario, las respuestas a la segunda parte del mismo y las intervenciones de los estudiantes en la puesta en común.

No obstante, a partir de la consecución de los tres primeros objetivos específicos se ha avanzado en el objetivo general de este trabajo, consistente en analizar la capacidad para dotar de significado a expresiones simbólicas que ponen de manifiesto un grupo de estudiantes al final de la Educación Secundaria Obligatoria, a través de la tarea de invención de problemas.

Con este análisis hemos dado un primer paso en la indagación sobre la capacidad de los estudiantes participantes en el estudio para dar significado al simbolismo algebraico, y sobre la utilidad de la actividad de invención de problemas como herramienta evaluadora del conocimiento. La información obtenida es de utilidad para profundizar en el conocimiento de los estudiantes, tanto desde el punto de vista de la investigación como de la docencia. Por un lado aporta información útil para el desarrollo de investigaciones centradas en la comprensión del simbolismo algebraico, y las dificultades que los estudiantes manifiestan al trabajar con el mismo. También aporta información sobre los beneficios de la actividad de invención de problemas, ya que permite indagar en la comprensión real de los estudiantes tal y como se muestra en Castro (2012). Desde el punto de vista de la docencia, puede ser interesante para la elaboración de propuestas didácticas, por ejemplo tener en cuenta los factores de las ecuaciones y sistemas que hacen que los estudiantes tengan más dificultades en interpretar y dar significado al simbolismo algebraico, o el trabajo mediante la invención de problemas, con vista al planteamiento de determinadas actividades.

2. LINEAS DE CONTINUIDAD

En trabajo realizado es una primera indagación en la exploración del significado que los estudiantes atribuyen al simbolismo algebraico, en el último curso de la Educación Secundaria. A partir de los resultados obtenidos identificamos varias vías de continuación para esta investigación.

- Indagar en qué entienden los estudiantes por un problema en el es que necesario para su resolución la utilización del simbolismo algebraico para su resolución, con la finalidad de abordar el cuarto objetivo específico propuesto en el capítulo 1 de esta investigación. Los datos recogidos en relación con este objetivo nos servirán de primera fuente de información para diseñar una recogida de datos más informativa.

- Dado que a los estudiantes se les requería en la primera parte del cuestionario que indicasen la dificultad que les suponía inventar un problema para cada una de las ecuaciones y sistema de ecuaciones, pensamos que sería útil relacionar este grado de dificultad que los alumnos atribuyen a los problemas, con la capacidad de respuesta de los estudiantes y las características de las ecuaciones.
- Las ecuaciones elegidas para la elaboración del cuestionario vienen definidas a partir de unas variables de tarea, indagar en el significado del simbolismo teniendo en cuenta otras variables o aquellas para las que los alumnos presentan más dificultades a la hora de inventar un problema, es otra vía de continuidad.
- La puesta en común se llevó a cabo tras un rápido análisis de las respuestas de los estudiantes al cuestionario, posteriormente se observó que los alumnos que más intervenciones realizaron fueron los que había inventado respuestas correctas. En un estudio posterior más amplio se plantea la posibilidad de realizar entrevistas semiestructuradas de forma individual o en grupos pequeños de estudiantes, con el objetivo de que cada uno de ellos intente razonar sobre sus propias respuestas o las de sus compañeros y de este modo podamos profundizar en las dificultades detectadas en este estudio.

REFERENCIAS

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 1*(3), 24-35.

Ayllón, M.F. (2012). *Invención-Resolución de problemas por alumnos de educación primaria*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.

Ayllón, M.F., Castro, E. (2002). Invención de problemas por profesores de primaria en formación. *Jornadas: Investigación en el aula de matemáticas. Resolución de Problemas*. (pp. 139-145).

Ayllón, M. F., Castro, E., Molina, M. (2010). Conocimiento aritmético informal puesto de manifiesto por una pareja de alumnos (6-7 años) sobre la invención y resolución de problemas. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, T. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 223-233). Lleida: Edicions de la Universitat de Lleida y Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Akkan, Y., Çakıroğlu, Ü., y Güven, B. (2009). Equation Forming and Problem Posing Abilities of 6th and 7th Grade Primary School Students. Mehmet Akif Ersoy *University Journal of Education Faculty*, *17*, 41- 55.

Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (1996). *Approaches to algebra. Perspectives for Seeing. Harmondsworth*, Middlesex: BBC y Penguin Books Ltd.

Behr, M., Erlwanger, S., y Nichols, E. (1976). *How children view equality sentences.* Tallahassee: Universidad del Estado de Florida.

Boletín Oficial del Estado (2006). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*. (Vol. BOE Nº 5, pp. 677-773). Madrid, España: Ministerio de Educación y Ciencia.

Boletín Oficial de la Junta de Andalucía (2007a). *Decreto 231/2007, de 31 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes a la educación secundaria obligatoria en Andalucía.* (Vol. BOJA Nº 156, pp. 15-25). Sevilla: Junta de Andalucía.

Boletín Oficial de la Junta de Andalucía (2007b). *Orden de 10-8-2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía.* (Vol. BOJA Nº 171, pp. 23-65). Sevilla: Junta de Andalucía.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors.* Windsor, UK: NFER-Nelson.

Bossé, M. J., Adu-Gyamfi, K. y Cheetham, M. R. (2011). Assessing the difficulty of mathematical translations: synthesizing the literature and novel findings. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 6*(3), 113-133.

Brody, J. y Rosenfield, S. (1996). Problem posing/solving and linear algebra. *International Journal of Mathematic Education, 27*(1), 103-121.

Cai, J., Hwang, S. (2002). Generalized and generative thinking in US and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing. *Journal of Mathematic Behavior, 21*, 401-421.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic y algebra in elementary school*. Portsmouth: Heinemann.

Carry, L. R., Lewis, C., y Bernard, J. (1980). *Psychology of equation solving. An information processing study*. Austin: Universidad de Texas, Departamento de Currículum e Instrucción.

Cañadas, M.C. (2007). *Descripción y Caracterización del Razonamiento Inductivo Utilizado por Estudiantes de Educación Secundaria al Resolver Tareas Relacionadas con Sucesiones Lineales y Cuadráticas*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.

Castro, E. (2011). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (pp. 1-15). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García, L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Actas del XVI Simposio de la SEIEM*, (pp. 75-94). Baeza, Jaén: *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.*

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Horsori.

Castro, W. F., Godino J. D., Rivas, M. (2009). Relatividad Socio-Cultural de los Significados del Álgebra y los Procesos de Transposición Didáctica en el Marco del Álgebra Escolar. En M. C. Cañadas, J. M. Contreras y A. B. Heredia (Eds.) *Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Cazares, J.; Castro E. y Rico, L. (1998). La invención de problemas en escolares de primaria. Un estudio evolutivo. *Aula, 10*, 19-39.

Cerdán, F. (2008). *Estudio sobre la familia de problemas Aritméticos – Algebraicos*. Server de Publicacions de la Universitat de Valencia, España.

Cerdán, F. (2010). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico: un catálogo de errores. *PNA*, *4*(3), 99-110.

Cobo, F., Fernández, G. y Rico, L. (1986). Las situaciones reales de los problemas aritméticos. En Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática Thales (Eds.), *Actas de las II Jornadas Andaluzas de Profesores de Matemáticas* (pp. 249-257). Almería: Editor.

Drijvers, P., Goddijn, A. y Kindt, M. (2011). Algebra education: exploring topics and themes. En P. Drijvers (Eds.), *Secondary algebra education* (pp. 5-26). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense Publishers.

Drijvers, P. y Hendrikus, M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter*. Tesis doctoral no publicada. Utrecht, Los Países Bajos: Utrecht University.

Drouhard, J.-P. (2001). Research in language aspects of algebra: a turning point? En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 238-242). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Drouhard, J.-P. y Teppo A. R. (2004). Symbols and language. En K. Stacey, H. Chick, y M. Kendal (Eds), *The future of the teaching and learning of algebra. The 12th ICMI study* (pp. 227-264). New York, NY: Kluwer.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the learning of Mathematics*, *9*(2), 19-25.

Graham, A. T., y Thomas, M. O. J. (2000). Building a versatile understanding of algebraic variables with a graphic calculator. *Educational Studies in Mathematics*, *41*(3), 265-282.

Harel, G., Koichu, B., y Manaster, A. (2006). Algebra teachers' ways of thinking characterizing the mental act of problem posing. En J. Novotná, H. Maraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceeding of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education University of California*, Vol. 3, (pp. 241-248). Praga, República Checa: Charles University in Prague.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol.3 (pp. 49-56). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Isik, C. y Kar, T. (2012). The analysis of the problems the pre-service teachers experience in posing problems about equations. *Australian Journal of Teacher Education, 37*(9), 93-113.

Kaput, J. (1995). A research base supporting long term algebra reform? En D. T. Owens, M. K. Reed, y G. M. Millsaps (Eds.), *Proceedings of the Seventh Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol.1 (pp. 71-94). Colombia, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Kieran, C. (1979). Children's operational thinking within the context of bracketing and the order of operations. En D. Tall (Ed.), *Proceeding of the Third Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 128-133). Coventry, Inglaterra: Warwick University, Mathematics Education Research Centre.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 317-326.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390–419). Reston, VA: NCTM.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–62). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Kirshner, D. (1987). *Linguistic analysis of symbolic elementary algebra*. Tesis doctoral, University of British Columbia, Canada.

Kirshner, D. (1989). The visual syntax of algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 20,* 274-289.

Koedinger, K. R., y Nathan, M.J. (2004). The real story behind story problems: Effects of representations on quantitative reasoning. *Journal of the Learning Sciences, 13*, 129-164.

Koichu, B. y Kontorovich I. (2012). Dissecting success stories on mathematical problem posing: a case of the Billiard Task. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 71-86.

Kojima, K., Miwa, K. y Matsui, T. (2009). Study on support of Learning from Examples in Problem Posing as a Production Task. En S.C. Kong, H. Ogata, H.C. Arnseth, C.K.K. Chan, T. Hirashima, F. Klett, J.H.M. Lee, C.C. Liu, C.K. Looi, M. Milrad, A. Mitrovic, K. Nakabayashi, S.L. Wong, S.J.H. Yang (Eds.), *Proceedings of the 17th International Conference on Computers in Education* (pp. 75-82) Hong Kong: Asia-Pacific Society for Computers in Education.

Küchemann, D. E. (1981). Algebra. En K.M. Hart, M.L. Brown, D.E. Kuchemann, D. Kerslake, G. Ruddock y M. McCartney (Eds.), *Children's understanding of mathematics: 11–16* (pp. 102–119). London: John Murray.

Lin, P. (2004). Supporting teachers on designing problem-posing tasks as a tool of assessment to understand students' mathematical learning. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International. Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3 (pp 257–264). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Martínez, M.V. (2011). *Utilización del método geométrico lineal (MGL) para la resolución de problemas de álgebra elemental*. Tesis Doctoral. Granada, España: Universidad de Granada.

MacGregor, M y Stacey, K., (1997). Students' understanding of algebraic notation. *Building foundations for algebra. Mathematics Teaching in the Middle School, 2*, 252-260.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de Pensamiento Relacional y Comprensión del Signo Igual por Alumnos de Tercero de Educación Primaria*. Tesis doctoral. Granada, España: Universidad de Granada.

Molina, M. (2012). *Proyecto investigador. Plaza de Profesor Titular de Universidad*. Granada, España: Universidad de Granada.

Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2009). Elementary students´ understanding of the equal sign in number sentences. *Electronic Journal of Research in Educational, 7*(1), 341-368.

Moliner, M. (1986). *Diccionario de uso del Español*. Madrid: Editorial Gredos.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers (2010). *Common Core State Standards of Mathematics*. Washington D.C: National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers.

Orrantia, J., González, L. B. y Vicente, S. (2005). Un análisis de los problemas aritméticos en los libros de texto de Educación Primaria. *Infancia y Aprendizaje, 28*, 420-451.

Palarea, M. y Socas, M. (1995). Sistema de representación en la resolución de problemas algebraicos. *Suma, 29*, 29 – 35.

Polya, G. (1962). *Mathematical discovery*. Nueva York, NY: John Wiley and Sons.

Rodríguez-Domingo, S. (2011). *Traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólico por estudiantes de secundaria.* Trabajo de Fin de Máster. Granada, España: Universidad de Granada.

Rodríguez-Domingo, S., Molina, M., Cañadas, M. C., y Castro, E. (2011). Errores en la traducción de enunciados algebraicos en la construcción de un dominó algebraico. En M. Marín-Rodríguez y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 379- 391). Ciudad Real, España: SEIEM.

Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *12*(1). 45-56.

Ruano, R. M., Socas, M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*, *2*(2), 61-74.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.

Seco, M., Andrés, O. y Ramos, G. (1999). *Diccionario del español actual*. Madrid: Aguilar.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 19–28.

Silver, E. A., Mamona-Downs, J., Leung, S., y Kenney, P. A. (1996). Posing mathematical problems: an exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(3), 293-309.

Silver, E. A., Kilpatrick, J., y Schlesinger, B. (1990). *Thinking through mathematics: Fostering inquiry and communication in mathematics classrooms*. New York: The College Board.

Singer, F. M. (2007). Beyond conceptual change: Using representations to integrate domain-specific structural models in learning mathematics. *Mind, Brain, and Education, 1*(2), 84–97.

Singer, F. M. (2010). Children's cognitive constructions: From random trials to structures. En J. A. Jaworski (Ed.), *Advances in sociology research* Vol. 6, (pp. 1–35). Hauppauge: Nova.

Singer, F.M., Ellerton, N. y Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: new questions and directions. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 1–7.

Singer, F. M., Ellerton, N., Cai, J., y Leung, E. (2011). Problem posing in mathematics learning and teaching: A research agenda. En B. Ubuz (Ed.), Developing mathematical thinking. *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* Vol. 1, (pp. 137–166). Ankara, Turquía: PME.

Sleeman, D. H. (1984). An attempt to understand students' understanding of basic algebra. *Cognitive Science, 8*, 387-412.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.

Stoyanova, E. (2000). Empowering students' problem via problem posing. The art of framing "Good" questions. *Australian-Mathematics-Teacher, 56*(1), 33-37.

Stoyanova, E., y Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. In P. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education* (pp. 518-525). Melbourne: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Usiskin, Z. (1987). Why elementary algebra can, should and must be an eighth-grade course for average students. *Mathematics Teacher, 80*, 428-438.

Usiskin, Z. (1998). Conceptions of school algebra and uses of variables. En A. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra K–12* (pp. 8-19). Reston, VA: NCTM.

van Ameron, B. A. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics, 33*, 319-351.

Vega-Castro, D. (2010) *Sentido estructural manifestado por alumnos de 1º de bachillerato en tareas que involucran igualdades notables.* Trabajo de Fin de Máster. Granada, España: Universidad de Granada.

Vega-Castro, D., Molina, M., Castro, E. (2011). Estudio exploratorio sobre el sentido estructural en tareas de simplificación de fracciones algebraicas. En M. Marín, G.Fernández, L. J. Blanco y M.ª M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV*, (pp. 575-584). Ciudad Real, España: SEIEM.

Wagner, S. (1983). What are these things called variables? *Mathematics Teacher, 76*(7), 474-479.

Wagner, S. y Parker, S. (1999). Advancing algebra. En B. Moses (Ed.), *Algebraic Thinking, Grades K-12*, 328-340. Reston, VA: NCTM.