

## **Estudo das posições relativas entre reta e plano: Uma proposta de abordagem geométrica utilizando Geogebra.**

Carlos André Bogéa Pereira<sup>1</sup> – Rildenir Ribeiro Silva<sup>2</sup> – Wanessa Danielle Barbosa Soares<sup>3</sup>  
andre.bogea@hotmail.com – ril.ifmatematico@gmail.com – wanessasoares2.lettras@gmail.com

USF–SP - Brasil  
IFMA – MA – Brasil  
UNINASSAU – MA - Brasil

Núcleo temático: **Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.**

Modalidad: **P**

Nivel educativo: **Nivel educativo terciario o Bachillerato (16 a 18 años)**

Palabras clave: **Resolução de problemas, Geometria Analítica, Geogebra**

### **Resumo**

*Este trabalho teve como ponto de partida viabilizar uma nova forma de se analisar e representar os resultados analíticos encontrados na resolução de problemas do estudo das posições relativas entre retas e planos, assunto este abordado em Geometria Analítica nos cursos de graduação das áreas de exatas como Matemática, Física, Química, Engenharias, Sistemas de Informação, etc. Nosso objetivo é dar um enfoque geométrico no desenvolvimento da resolução dos problemas de posição relativa entre reta e reta, reta e plano e plano e plano, onde este assunto é visto em muitas práticas pedagógicas apenas de maneira superficial, com um tratado teórico. As análises, com esta nova metodologia de ensino foi implementada durante às aulas de Cálculo Vetorial e Geometria Analítica em laboratórios de informática do IFMA, apresentando os conteúdos teóricos trabalhados em sala de aula com a aplicação do software Geogebra para à verificação e validação dos resultados. Utilizamos o software dinâmico, como uma metodologia alternativa, para auxiliar na complementação das atividades teóricas, almejando um pleno desenvolvimento deste conteúdo de nível superior, uma vez que, tal dinamização do conhecimento pode ser inserida em diversas outras aplicações com este recurso, proporcionando novas possibilidades para o ensino e aprendizagem da Geometria.*

### **Introdução**

Pesquisas recentes sobre o ensino e aprendizagem da matemática revelam que esta disciplina é um dos principais componentes curriculares com grande déficit de desempenho nas escolas de muitos países. As dificuldades podem começar no ensino básico, perdurando ao longo da vida acadêmica. Porém, paralelamente a estes problemas, está o desenvolvimento tecnológico das grandes mídias, meios de comunicação e informação.

A utilização dessas tecnologias no ensino da matemática vem se firmando como uma das áreas mais ativas e relevantes no aprimoramento de novas abordagens e ferramentas de ensino. Segundo Ponte e Oliveira (2003), a eficácia da utilização de ferramentas computacionais pode “trazer novas perspectivas no ensino da Matemática de modo profundamente inovador, reforçando o papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação e relativizando a importância do cálculo e da manipulação simbólica”. Dessa forma, as atividades mediadas pelo uso de softwares permitirão ao professor explorar as distintas formas de representar um mesmo problema sendo de forma gráfica, algébrica ou por meio de tabelas.

Sendo nosso ponto de partida como campo de pesquisa, a Geometria Analítica é a área que mais tem sido beneficiada pelas transformações com a utilização das tecnologias, principalmente, no desenvolvimento de softwares específicos voltados para o seu processo de ensino e aprendizagem. Conforme diz Zullato (2002) são frequentemente utilizados no ensino de Geometria e permitem trabalhar com Geometria Euclidiana Plana, Geometria Não-Euclidiana e Geometria Analítica. Ainda segundo o mesmo autor, os softwares são utilizados com a intenção de mostrar as propriedades que estão sendo estudadas com o intuito de realizar a verificação e visualização de propriedades.

Diante do advento da tecnologia e, sobretudo, nas salas de aula ao longo de décadas, a utilização das tecnologias da Informação e Comunicação no ensino da matemática vem pontualmente, se firmando como uma das áreas mais ativas e relevantes no aprimoramento de novas abordagens e ferramentas de ensino. A disponibilidade de inúmeros recursos como internet e softwares dinâmicos trabalhados de forma planejada e orientada, vem sendo de grande relevância para o surgimento de novas capacidades, abrindo um leque de possibilidades didáticas, modificando inclusive as relações entre professor e aluno no processo de ensinar e aprender. Segundo D’Ambrósio e Barros (1990), essas mudanças causam grandes impactos na sociedade, gerando reflexos conceituais e curriculares na educação básica e na educação superior.

O âmbito de sala de aula, sem dúvida, não poderia estar de fora dessas transformações que ocorrem no mundo moderno com surgimentos de novas tecnologias. Ao longo de décadas, propostas voltadas para a utilização de Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) estão cada vez mais presentes em várias instâncias dentro da educação, seja por meio de políticas públicas ou até mesmo por desenvolvimento de pesquisa no mundo acadêmico e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) são bem claros ao apontar com relevância o ensino da matemática

com utilização de tecnologias. Diante do novo cenário e realidades distintas encontradas nas salas de aula, por meios das TICs, devemos utilizar as novas tecnologias:

De comum acordo com o ensino desenvolvido, a avaliação deve dar informação sobre o conhecimento e compreensão de conceitos e procedimentos; a capacidade para aplicar conhecimentos na resolução de problemas do cotidiano; a capacidade para utilizar as linguagens das Ciências, da Matemática e suas Tecnologias para comunicar ideias; e as habilidades de pensamento como analisar, generalizar, inferir. (BRASIL, 2000, p.54).

Em se tratando de novas tecnologias adotadas como forma de suporte para auxiliar no ensino aprendizagem em sala de aula verifica-se em Borba (1999) que:

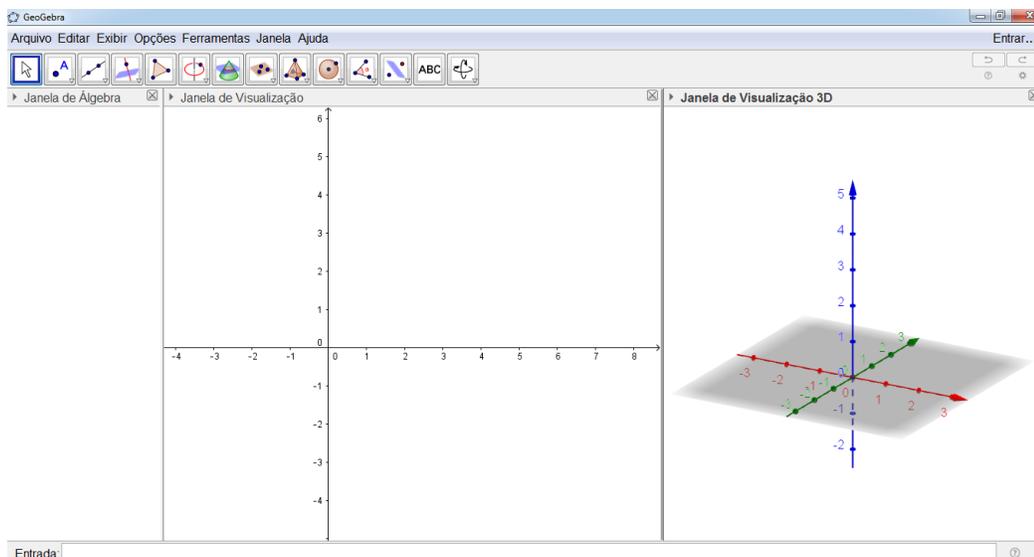
A introdução das novas tecnologias – computadores, calculadoras gráficas e interfaces que se modificam a cada dia – tem levantado diversas questões. Dentre elas destaco as preocupações relativas às mudanças curriculares, às novas dinâmicas da sala de aula, ao “novo” papel do professor e ao papel do computador nesta sala de aula. (BORBA, 1999, p. 285).

## **Metodologia**

O ensino do Cálculo Vetorial e Geometria Analítica, especificamente, na abordagem das posições relativas entre reta e plano, a partir da utilização do software dinâmico Geogebra, pode favorecer a construção de significados em Matemática a partir da representação de conceitos, estudos de propriedades intrínsecas às construções realizadas, bem como explorar, a partir da visualização, das formas algébrica e geométrica desses conceitos encontrados nos livros acadêmicos (BOULOS; CAMARGO, 2006). Essa forma dinâmica de aprendizado proposta pelo Geogebra pode favorecer à interação e estreitar os caminhos entre aluno e as novas ferramentas computacionais de aprendizagem.

O software Geogebra é um software matemático livre que reúne geometria, álgebra e cálculo. Ele foi desenvolvido por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg para educação matemática nas escolas. Por um lado, o Geogebra é um sistema de geometria dinâmica, permitindo realizar construções tanto com pontos, vetores, segmentos, retas, como com funções que podem se modificar posteriormente de forma dinâmica.

Nesse trabalho utiliza-se o Geogebra 5.0, em que o mesmo apresenta uma plataforma diferenciada para análise em duas e três dimensões, conforme mostra a figura 1:



**Figura 1:** Janela principal do Geogebra 5.0 gerada pelo autor.

A partir desta ferramenta pedagógica, realiza-se como atividade exploratória alguns exercícios do livro acadêmico: “*Geometria Analítica: Um tratamento Vetorial*” de *Paulo Boulos* e *Ivan de Camargo*. As atividades são para verificar de forma gráfica, às propriedades que asseguram os conceitos sobre às posições relativas entre retas e planos estudadas no capítulo 16. Com base nos autores, foram preparadas 3 atividades que serão analisadas o comportamento gráfico entre Reta e Reta, Reta e Pano e Plano e Plano, verificando às condições abordadas teoricamente de forma geométrica.

## Resultados e Discussões

As simulações e verificações foram realizadas pelos alunos de graduação do curso de Matemática da Faculdade do Maranhão FACAM de maneira participativa e cooperativa com alunos do IFMA em laboratório de informática. A motivação para esta pesquisa, partiu da inquietação dos autores desta pesquisa, pelo fato de os problemas terem uma simples resolução, sem nenhum enfoque geométrico desses elementos. As investigações tiveram como ponto de partida, algumas atividades do livro já mencionado, em que propõe-se através de uma análise dinâmica, resolver os problemas propostos, proporcionando uma nova interpretação dos resultados analíticos obtidos nesta referência.

### 1ª Investigação – Posição relativa entre reta e reta

Nesta atividade, verifica-se a posição relativa entre duas retas  $r$  e  $s$ . De acordo com (BOULOS, P.; CAMARGO, I, 2006), para tal verificação, deve-se fixar um sistema de coordenadas no espaço e designar por  $\vec{u} = (a, b, c)$  um vetor diretor de  $r$ ,  $\vec{v} = (m, n, p)$  um vetor diretor de  $s$ , por  $A = (x_1, y_1, z_1)$ , um ponto qualquer de  $r$  e por  $B = (x_2, y_2, z_2)$ , um ponto qualquer de  $s$ . Analisemos a 2ª questão: Estude a posição relativa entre as retas:  $r: X = (1, 2, 3) + \alpha(0, 1, 3)$ , com  $(\alpha \in IR)$  e  $s: X = (1, 3, 6) + \beta(0, 2, 6)$ , com  $(\beta \in IR)$ .

Para inserir os elementos geométricos no software, podemos utilizar a aba mostrada na figura 2 que segue,



Figura 2: Aba das principais ferramentas. Fonte Geogebra.

ou, então, no campo de entrada do Geogebra, digitar os parâmetros para cada reta dada, os pontos  $A = (1,2,3)$  e  $B = (1,3,6)$  e os respectivos vetores diretores das retas  $r$  e  $s$ ,  $\vec{u} = (0, 1, 3)$  e  $\vec{v} = (0, 2, 6)$ . Para identificar as retas  $r$  e  $s$ , digitamos no CAMPO DE ENTRADA o comando **reta(A, u)**, isto é, queremos identificar a reta  $r$  que passa pelo ponto  $A$  e possui vetor diretor  $u$ , da mesma forma, para identificar a reta  $s$  que passa pelo ponto  $B$  e tem como vetor diretor  $v$  digitamos **reta(B, v)**. Os resultados da Atividade 1, ilustrados no gráfico 1 abaixo, mostram que, como os vetores são proporcionais, isto é,  $\vec{v} = 2\vec{u}$ , logo,  $r$  e  $s$  são paralelas,  $r // s$ .

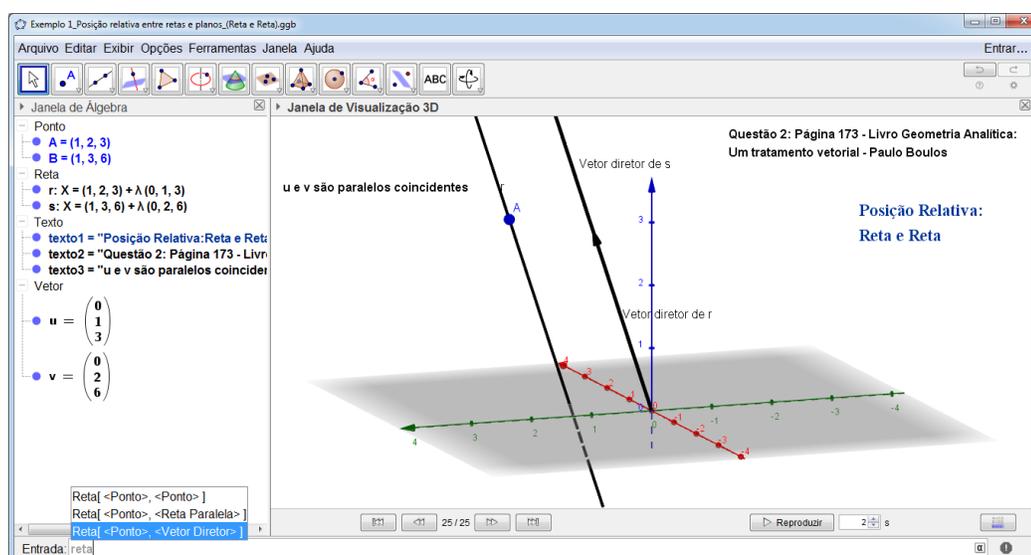


Figura 3: Interpretação geométrica entre duas retas.

## 2ª Investigação – Plano e Plano

Na página 206 da referência supracitada, é proposto o seguinte problema: “Verificar se os planos  $a: x + y - z - 2 = 0$  e  $b: 4x - 2y + 2z = 0$  são perpendiculares”.

Pelas equações cartesianas dos planos  $a$  e  $b$ , podemos tirar seus respectivos vetores diretores normais  $\vec{c} = (1, 1, -1)$  e  $\vec{u} = (4, -2, 2)$  e digitá-los no **Campo de entrada** do Geogebra. A solução geométrica é mostrada na figura 4, em que conclui-se que os planos  $a$  e  $b$  são perpendiculares, verificando a inclinação entre eles, através do comando  $\hat{\text{Ângulo}}(a,b)$ , e pressionando a tecla ENTER, encontra-se o ângulo  $\alpha = 90^\circ$ , o que comprova a perpendicularidade entre estes entes geométricos.

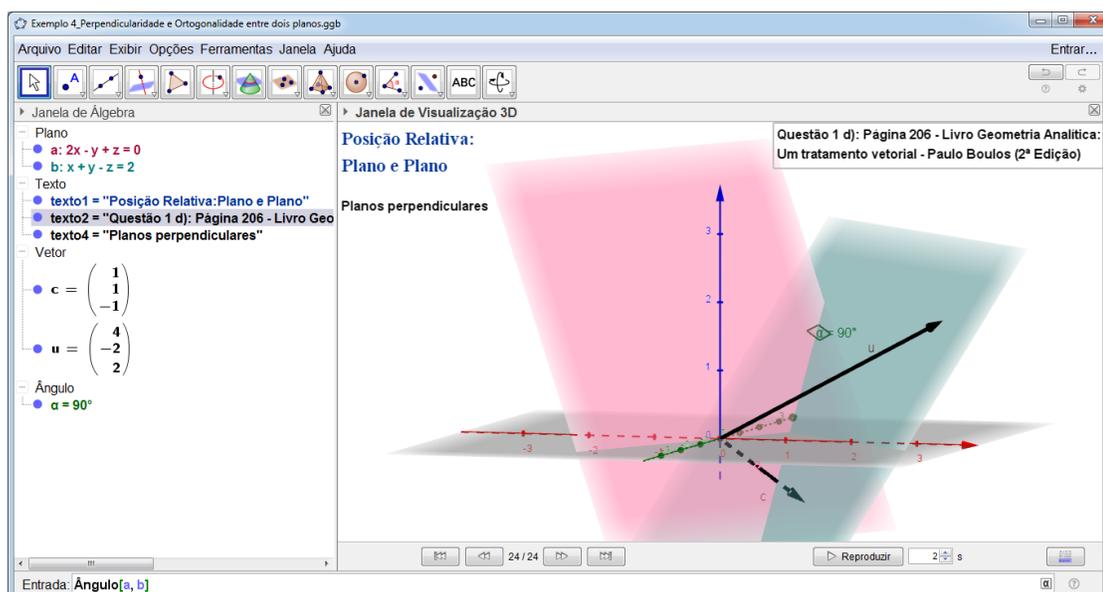


Figura 4: Interpretação geométrica entre dois planos.

## Conclusão

Diante das análises e resultados obtidos nesta pesquisa, ressalta-se o importante relato dos alunos em relação às investigações realizadas no laboratório, onde os mesmos confirmam que a metodologia aplicada com o uso do Geogebra durante as simulações, em que elas proporcionaram um bom desempenho no entendimento do conteúdo de Geometria Analítica sob uma nova perspectiva de observar a resolução dos problemas propostos, no que tange aos tópicos de posições relativas entre retas e planos, o que tornou este assunto mais interativo e acessível.

Este trabalho proporcionou à ampliação dos conhecimentos dos estudantes nas áreas em pesquisa como na Matemática, Geometria Analítica e Recursos Computacionais como ferramentas de investigação das aprendizagens correlatas. O avanço no conhecimento e aprendizado, se desencadeou, em virtude do desenvolvimento das novas metodologias aplicadas neste ramo da matemática, visando um completo entendimento do aluno, através das análises algébricas e geométricas destes conteúdos até então, vistos de maneira superficial, através de uma simples abordagem teórica, uma forma também de enriquecer a abordagem realizada na referência citada.

Assim, com os resultados alcançados pelos alunos, percebe-se que o papel do educador na arte de ensinar está se tornando cada vez mais desafiador com o passar dos tempos. Surgem cada vez mais novas possibilidades e oportunidades de se aplicarem recursos tecnológicos no ambiente de sala de aula para promover, sobretudo, um aprendizado interativo e significativo entre todos os envolvidos nas ações de ensinar e aprender. A partir dessas experiências propostas e realizadas, surgem reflexões que devem ser de todos os docentes da área, onde possam a cada prática educativa rever suas concepções de ensino e aprendizagem em que estes processos não podem ser resumidos a um mero processo de transmissão e aceitação de informações, e sim, pensados como um processo permanente de construção cognitiva que é estimulado pela investigação e participação dos discentes.

### **Referencias bibliográficas**

Borba, M. C. (1999) Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e Reorganização de Pensamento. In: Bicudo, M. A. V. (Org.). *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas*. São Paulo: UNESP.

Boulos, P.; Camargo, I. (2006). *Geometria Analítica – Um tratamento Vetorial*. 3. ed. São Paulo: Makron Books.

D'ambrosio, U.; Barros, J. P. D. (1990). *Computadores, Escola e Sociedade*. São Paulo: Scipione.

Geogebra-Informações (2016): *Geogebra ajuda e busca*: Universidade de Salzburg. Markus Hohenwarter. Traduzido por: Herminio Borges Neto, Luciana de Lima, Alana Paula Araújo Freitas, Alana Souza de Oliveira. Disponível em: <[https://app.geogebra.org/help/docupt\\_BR.pdf](https://app.geogebra.org/help/docupt_BR.pdf)>. Acesso em: 02 de Setembro de 2016.

Ponte, J. P.; Brocardo, J.; Oliveira, H. (2003) *Investigações Matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Zulatto, R. B. A. (2002). *Professores de Matemática que utilizam Software de Geometria Dinâmica: suas características e perspectivas*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2002.