P-1.232

REDES DE EXPECTATIVAS LÓGICO MATEMÁTICAS, UNA HERRAMIENTA PARA EL DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO

Marcos Bautista López Aznar
pensamosdistintorazonamosigual@gmail.com
Universidad de Huelva. España

Núcleo temático: V Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
Modalidad: P
Nivel educativo: terciario o bachillerato (16 a 18 años).
Palabras clave: inteligencia lógica, competencia matemática, didáctica de la matemática, pensamiento crítico.

Resumen

Los diagramas de Venn, tal vez la herramienta gráfica más empleada en el aula para adiestrar en la inferencia lógico matemática, pueden resultar excesivamente abstractos y solo permiten resolver ejercicios con un máximo de tres variables dicotómicas. Se presentan como alternativa circuitos lógico bayesianos que integran razonamiento argumentativo y matemático en un modelo de mallas asociativas. Estos circuitos, o redes de expectativas Marlo, tienen flexibilidad para expresar visualmente y de forma intuitiva problemas con un número ilimitado de variables. Usados en el aula poseen la virtud de combinar en la inferencia códigos lingüísticos, numéricos y de colores que facilitan el razonamiento a la mayoría de los alumnos. Este trabajo pretende compartir con la comunidad docente una herramienta útil y eficaz en la didáctica de las bases lógicas que subyacen a la inferencia matemática y que es producto de años de investigación teórica y práctica con el apoyo del departamento de matemáticas de mi centro en grupos de trabajo. Se trata de difundir un método que resuelve silogismos, lógica de proposiciones, de predicados y distintos problemas matemáticos desde una perspectiva en la que inferir es captar las relaciones lógico-matemáticas que mantienen entre sí los nodos de conjuntos concebidos en redes bayesianas.

Redes que diferencian ser de estar

Un sistema cognitivo codifica la experiencia generando teorías que le permiten predecir y anticipar, con más o menos éxito, la presencia o ausencia de una parte de los objetos que componen su mundo a partir de la presencia o ausencia de otros. Para ello, los sistemas tejen redes de expectativas formadas por nodos lógicos agrupados en conjuntos. Los nodos sirven como antecedentes de los esquemas de acción y pueden ser activados por diversos tipos de estímulos. Además, las redes son permanentemente recodificadas mediante procesos de síntesis y análisis. La síntesis permite convertir en unidad una pluralidad de objetos gracias a la captación de sus semejanzas. El análisis permite la operación inversa atendiendo a sus diferencias. Así pues,

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

el conjunto es la estructura elemental de los sistemas y sirve como base de la inferencia. "Un conjunto se compone de nodos OR, nodos objeto y nodos AND". López, M. (2016)

Un nodo OR sintetiza cualitativamente a todos los elementos del conjunto, siendo activado por cualquiera de ellos. Por ejemplo: Si divisas algún animal me avisas.

Por su parte, un nodo objeto designa una combinación única y distinta de cualidades que le permiten diferenciarse del resto y constituirse como unidad. Ejemplo: si ves a mi perro me avisas. Sin identidad el conocimiento sería imposible y nos enfrentaríamos a un incontrolable caos de estímulos. Cuando las diferencias entre objetos no son relevantes, el conjunto puede convertirse en el objeto en cuestión. En este artículo nos referiremos a objetos y conjuntos como moldes teóricos convencionales que usamos para construir nuestras representaciones del medio. Si cambiamos la escala, cambia el objeto.

Los nodos AND designan síntesis cuantitativas del conjunto que pueden ser teóricas o numéricas. Un ejemplo teórico sería: En Madrid hay toda clase de tiendas. Un ejemplo numérico: En Madrid viven todos mis hermanos. Que haya de todo no supone que esté todo, pero si está todo, entonces sí hay de todo lo que podía haber en teoría.

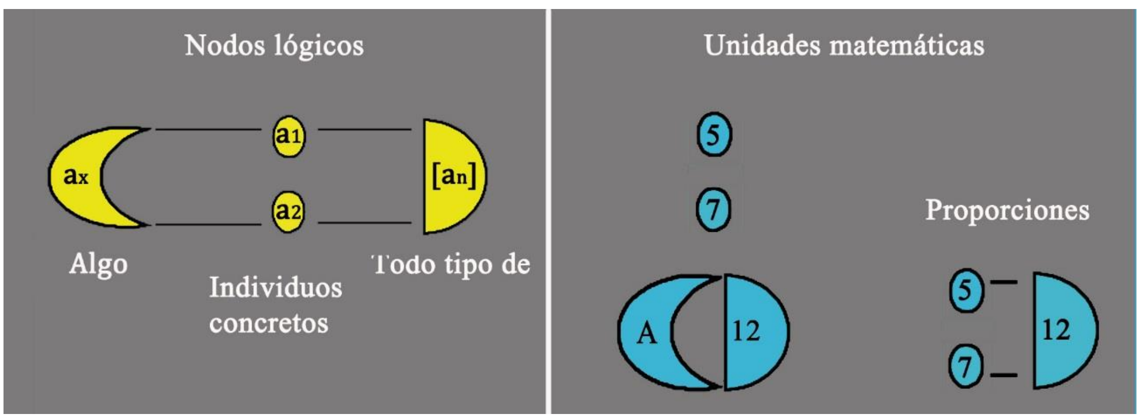


Fig. 1. El conjunto como unidad lógica elemental de los sistemas cognitivos

Una vez que comprendemos cómo se forman los conjuntos podemos observar en la figura número dos cómo se transmiten las certezas en todas las direcciones de un sistema teórico. Observemos que la propagación depende del nodo en el que se inicie la inferencia. Las inferencias son resultado de la mezcla de los tres colores tierra básicos, los cuales representan la certeza de que sí, de que no y la duda. La certeza de que sí y de que no siguen principios opuestos en su propagación. Por ejemplo, partiendo de un nodo verdadero el caso que menos incertidumbre nos deja es el caso tres. Si todo es cierto, es cierto cada uno y es cierto alguno. Sin embargo, partiendo de un nodo falso el más informativo es el caso cuatro: si ninguno, nada es cierto.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

ISBN 978-84-945722-3-4

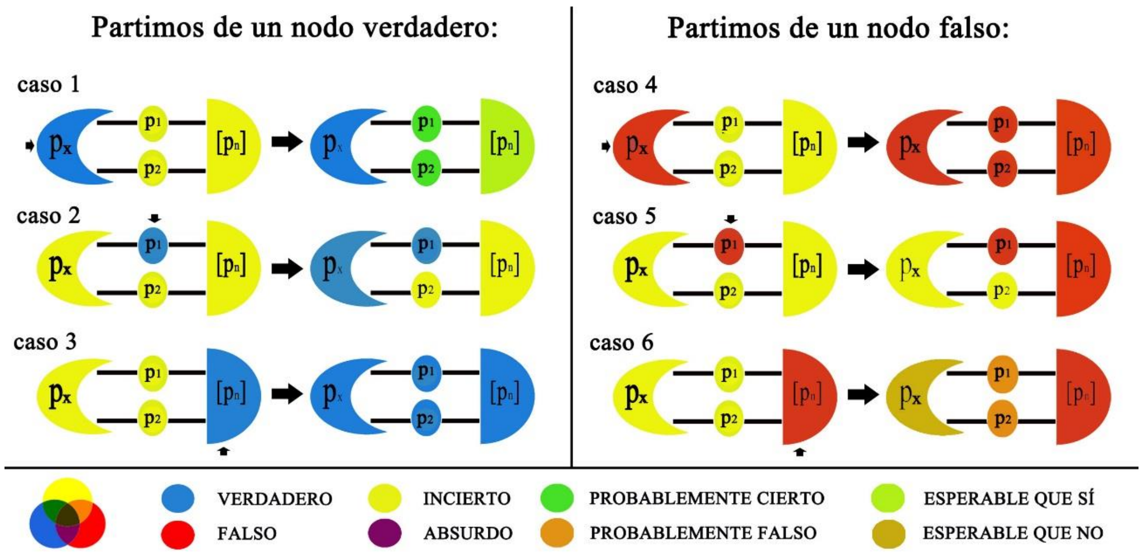


Fig. 2 Propagación de la certeza por los nodos de un conjunto.

A los sistemas cognitivos no les basta saber lo que las cosas son, necesitan saber con lo que cuentan, es decir, saber lo que está disponible y lo que no está disponible durante el curso de una acción en marcha. Por eso trabajamos en el aula un modelo de redes bayesianas que procesa las relaciones contrarias de presencia ausencia entre los nodos que surgen de combinar las variables. Las reglas se muestran en la figura 3.

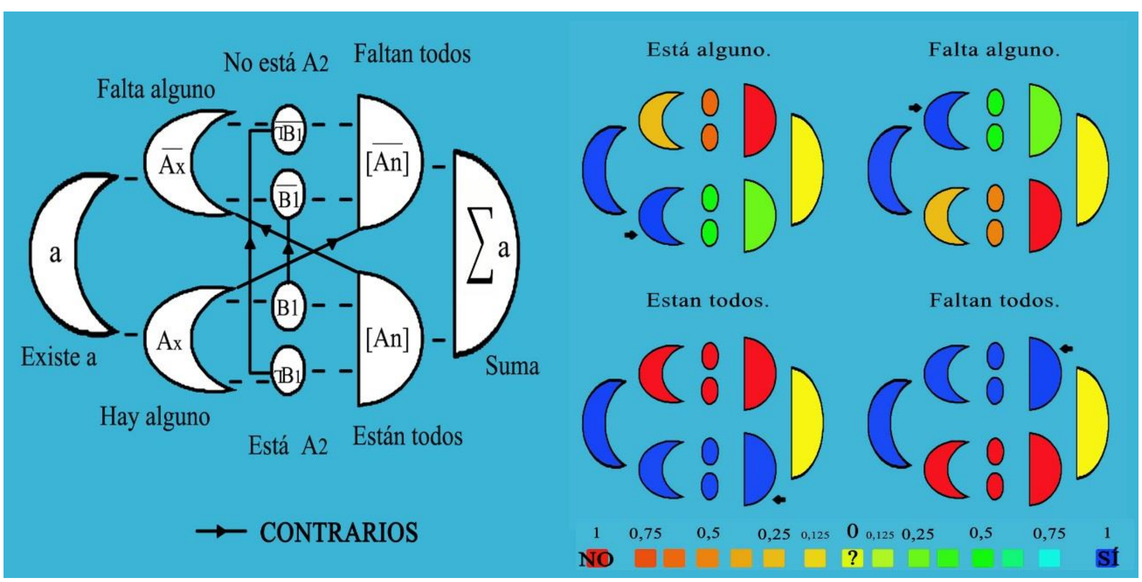


Fig. 3. Relaciones contrarias de propagación.

El supernodo OR de la izquierda de la figura 3 expresa que algo que se ajusta al criterio a existe en teoría. Vemos que lo que existe puede estar presente o ausente para el sistema, siendo modos incompatibles. A_x= algo que se ajusta al criterio a está presente.

ISBN 978-84-945722-3-4

$\overline{A_x}$ = está ausente algo que se ajusta al criterio a. $[A_n]$= está presente la totalidad de tipos que conforman a. $[\overline{A_n}]$= está ausente la totalidad de tipos que conforman a. A_1= está presente el objeto ab y A_2= está presente a¬b. El nodo objeto A_2 se nombra como ¬B1, dado que el nodo ¬B2, que no aparece en la figura, será definido como ¬a¬b.

Consideramos, pues, un sistema con dos criterios a y b tomados dicotómicamente. Por eso tenemos dos objetos centrales partiendo de a y tendríamos otros dos partiendo de ¬a que quedan fuera de la figura. Es decir, que lo que se ajusta al criterio a se combina con b y con ¬b para formar los objetos ab y a¬b. A su vez, ambos objetos pueden estar o no estar, siendo la presencia y la ausencia modos contrarios de existencia. Por ejemplo, si es cierto que está alguno que es alto, será falso que falten todos los que son altos. Las relaciones lógicas contrarias deben distinguirse de las relaciones numéricas complementarias. Cuantitativamente, los que no están complementan a los que están. Sin embargo, respecto a la cualidad lógica de la existencia, la certeza de que es verdad que está presente A1, debe ser equivalente a la certeza de que es falso que esté ausente.

En todo caso, la figura 3 solo analiza aspectos lógicos y no cuantitativos del sistema. Por eso el supernodo AND del sumatorio de lo que está y no está ha quedado indeterminado en amarillo: Sabemos cuántos tipos de objetos hay, pero no sabemos cuántos individuos, cuyas diferencias son ahora irrelevantes, hay de cada tipo.

Si reconocemos el uso cuantitativo de los nodos, comprenderemos bien la figura 4.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

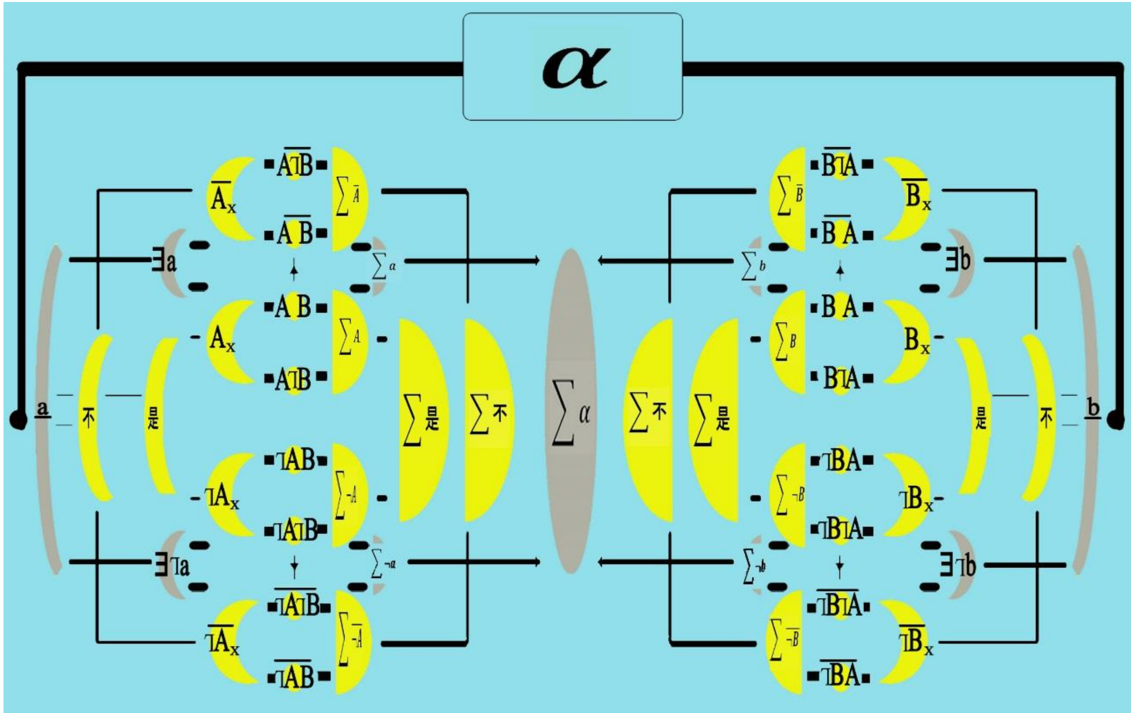


Fig. 4. Sistema alfa dicotómico respecto a los grados de ser y de existir.

En ella se describe un sistema α que combina los criterios a y b en escalas dicotómicas. Así ocurre respecto a los grados de ser: a = ser; ¬a= no ser. Así ocurre respecto a los grados de existencia: estar (是) y no estar (不). El sistema podría complicarse con infinitos grados de ser e infinitos grados de presencia, pero por economía se reducen a dos y dos. Lo que existe siendo a: ∃a, y lo que existe siendo ¬a: ∃¬a. Debemos observar que la totalidad de objetos que puede haber desde la perspectiva de un criterio equivale a la totalidad de objetos que puede haber desde la perspectiva de cualquiera de los otros criterios. Luego da lo mismo considerar qué hay desde a o desde b.

Los circuitos lógico-bayesianos permiten resolver problemas desde la perspectiva cualitativa de tipos y categorías y desde una perspectiva cuantitativa.

Podemos estudiar en la figura 5 las relaciones lógicas olvidando los sumatorios de cantidades. Esto nos permite reflejar en el aula cuál sería el estado de certeza de las redes ante un número ilimitado de proposiciones. Apoyaremos las inferencias lógicas en códigos numéricos y de colores. El sistema α puede codificar y comunicar estados de creencias respecto a mundos reales o imaginarios, sin que sea cuestión de este artículo tratar de distinguirlos.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

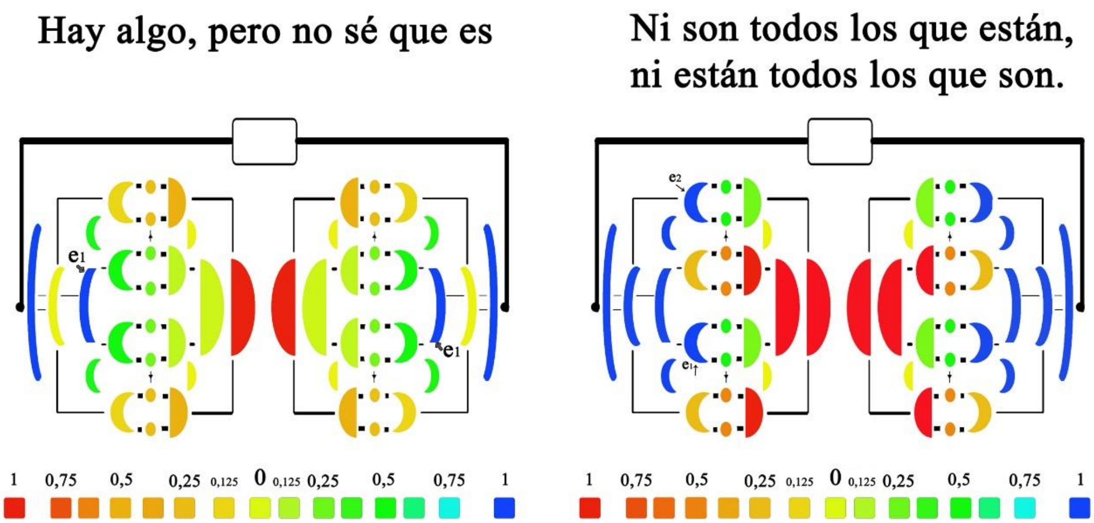


Fig. 5. Proposiciones en las redes de expectativas Marlo.

Aspectos cuantitativos

La tabla 1 recoge las leyes básicas que permiten al sistema α realizar operaciones aritméticas elementales.

Tabla 1. Principios cuantitativos del sistema

$\sum \alpha = \sum 是 + \sum 不 = \sum a + \sum \neg a$	Todo cuanto hay es igual a la suma de todo lo que está más todo lo que no está, y es igual así mismo a la suma de todo lo que es más la suma de todo lo que no es. Es decir, que lo que hay respecto a los grados de ser es igual a lo que hay respecto a los grados de existencia.
$\sum 是 = \sum A + \sum \neg A$	Todo lo que está es igual a la suma de todo lo que es A y está más todo lo que es ¬A y está.
$\sum 不 = \sum \bar{A} + \sum \overline{\neg A}$	Todo cuanto no está es igual a todo lo que es A y está ausente más todo lo que es ¬A y está ausente.
$\sum A = n\,AB + n\,A\neg B$	Todo lo que está presente siendo A es igual a la suma del número de objetos presentes en cada una de las categorías de A.
$n\,\exists a = \sum a = \sum A + \sum \bar{A}$	El número de individuos que existe ajustado al criterio $\underline{a}$ es igual a la suma de los que están y son A más lo que no están y son A.
$n\,\exists \neg a = \sum \neg a = \sum \neg A + \sum \overline{\neg A}$	El número de individuos que existe y no se ajusta al criterio $\underline{a}$ es igual a la suma de los que están y son ¬A más lo que no están y son ¬A.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Veamos un problema resuelto con cantidades: Mi prima colgó en las redes sociales las condiciones para poder presentarse a un casting de actores para personajes muy concretos. Utilizaría como criterios la altura, la belleza y la calvicie de los candidatos. Cada criterio generaría una escala de juicio con tres variables: no ser nada (0), estar en la media (0.5) y ser totalmente (1). Estas fueron sus indicaciones: Primero: si no estás nada calvo, entonces es necesario para presentarte que no seas nada bello. Segundo: Los que estén medio calvos tienen que ser totalmente bellos. Tercero: Si eres totalmente alto, no puedes ser medio bello. Cuarto: No se permiten personas que sean a la vez totalmente calvas y totalmente altas. Quinto: Los que sean medio calvos y totalmente altos, no pueden ser totalmente bellos. Sexta: Los que sean medio altos, deben ser o totalmente bajos o medio bajos. Finalmente, el día del casting se presentaron un total de veintitrés personas. No se presentó nadie que fuera totalmente calvo, aunque sí se presentaron siete personas medio calvas. Personas totalmente bellas se contaron trece. Personas medio altas fueron dieciséis.

Cuestiones: ¿Cuántos aspirantes hubo que fueran medio altos, nada bellos y totalmente calvos? ¿Y cuántos hubo nada altos, nada bellos y totalmente calvos? Por otra parte, de las nueve categorías generales resultantes de aplicar un criterio: 0a, 0.5a, 1a, 0b, 0,5b, 1b, 0c, 0,5c, 1b, ¿cuáles había totalmente prohibidas? ¿cuál fue la única de estas categorías en la que afirmar que hubo de todo lo permitido sería cierto?

Al resolver el problema en los circuitos el color violeta significa imposible en teoría, prohibido por las condiciones; el azul significa nodo empíricamente verificado y el rojo nodo empíricamente falso.

Sin modificar las condiciones, los nodos azules y rojos podrían intercambiar sus colores en un segundo día de casting.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

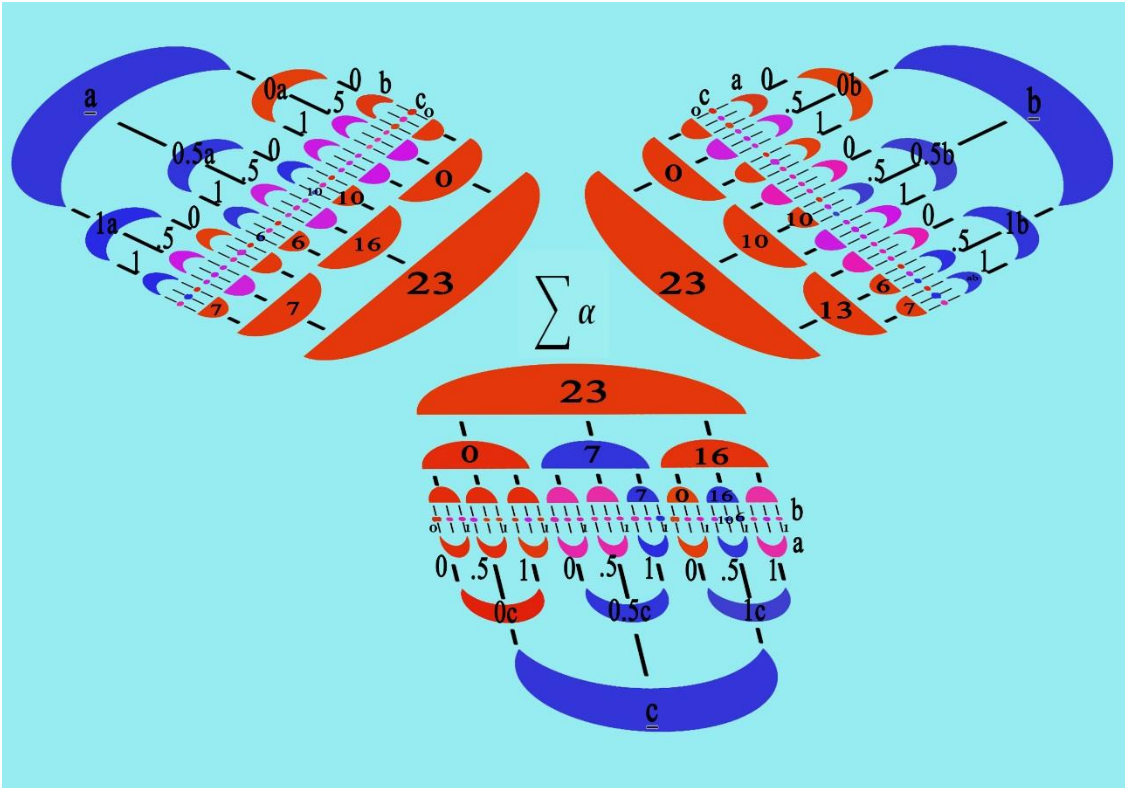
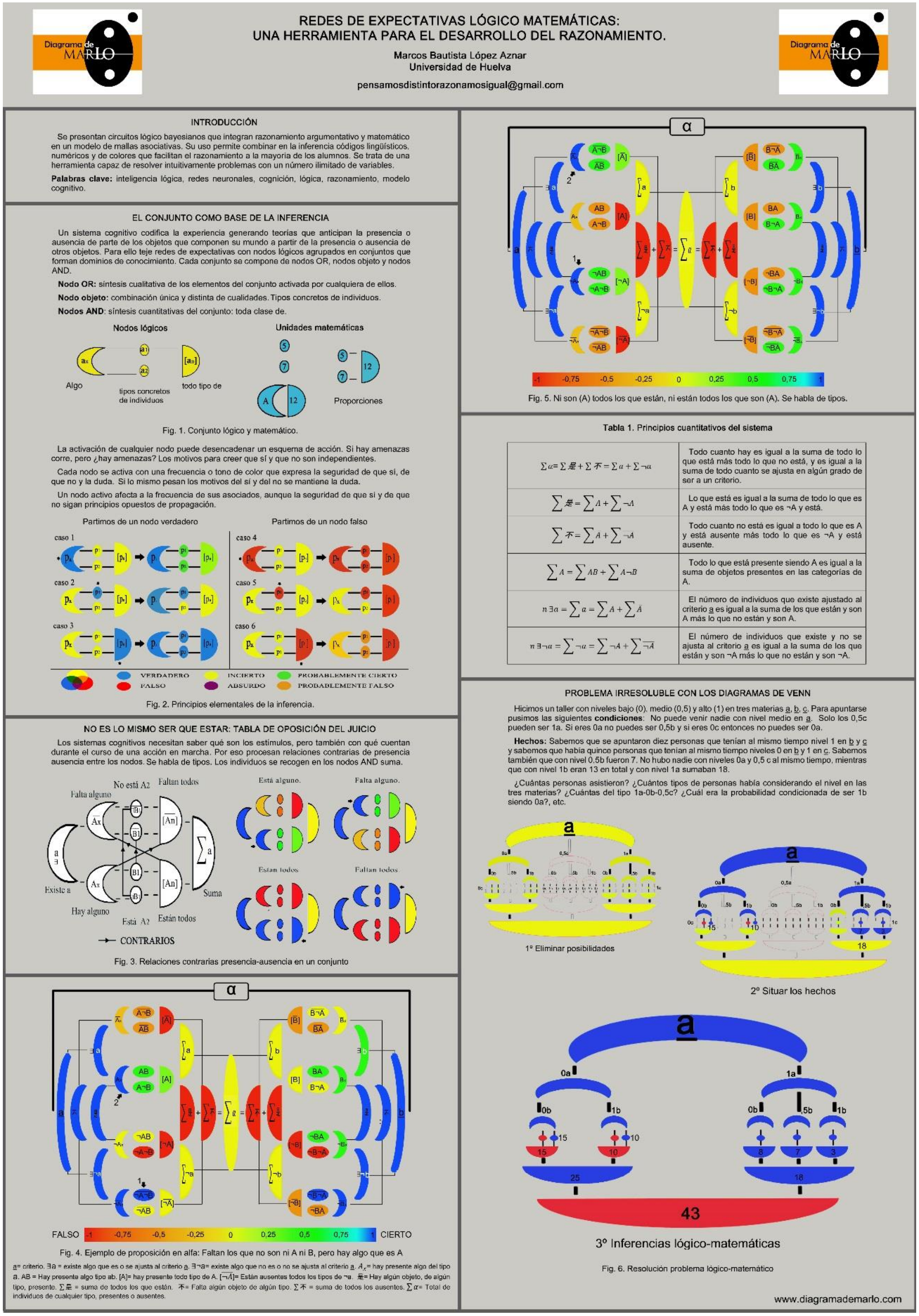


Fig. 6. Solución gráfica del ejercicio en los circuitos lógico-bayesianos.

Se hace evidente que no puede haber cálculo matemático sin una comprensión cabal de lo que es un objeto, ni sin flexibilidad mental para cambiar la perspectiva de los conjuntos o para convertir un conjunto en objeto. También es necesaria una interpretación del correcto significado de las proposiciones lógicas que componen el enunciado y del modo en que se propagan la verdad y la falsedad por los nodos de una red. Aspectos poco trabajados en el aula a juicio del autor.

ISBN 978-84-945722-3-4



Referencias bibliográficas

López, M. (2016). Innovación en didáctica de la lógica: el Diagrama de Marlo. En T. Mijangos (Coord.), Rutas didácticas y de investigación en lógica, argumentación y pensamiento crítico (105-154). México: Academia Mexicana de la Lógica. Libro electrónico.

ISBN 978-84-945722-3-4