# Simetría y transformaciones geométricas en el plano, algunas ideas para su enseñanza[1]

**Hugo Barrantes Campos**

**Resumen**

El estudio de las transformaciones geométricas en el plano ocupa un lugar cada vez más importante en los programas de Matemáticas de la educación general básica en diversos países. Los conceptos y técnicas involucrados no corresponden, en general, a los temas clásicos en ese nivel educativo. Esto hace que en muchas ocasiones los docentes muestren reticencias a la hora de enfrentar el trabajo de aula en relación con esta temática.

Se exponen aquí algunas ideas que pueden ser útiles a los profesores en la enseñanza aprendizaje de las transformaciones en el plano. Se enfatiza el enfoque de resolución de problemas, así como el uso de construcciones con regla y compás, las cuales se pueden realizar de modo equivalente con software de geometría dinámica mediante el uso de rectas y circunferencias, como un medio de comprender el concepto general de simetría.

*Palabras clave*: educación matemática, transformaciones geométricas, simetría, isometría, geometría dinámica.

**Abstract**[2]

The study of geometric transformations in the plane occupies an increasingly important place in the Mathematics programs of basic general education in various countries. The concepts and techniques involved do not correspond, in general, to the classical themes at that educational level. This means that teachers often show reluctance when facing classroom work in relation to this issue.

Here some ideas that may be useful to teachers in teaching/learning of transformations in the plane are presented. The problem-solving approach is emphasized, as well as the use of constructions with ruler and compass, which can be performed in an equivalent way with dynamic geometry software through the use of lines and circles, as a means of understanding the general concept of symmetry.

*Keywords*: Mathematics Education, geometric transformations, symmetry, isometry, dynamic geometry.

---

**H. Barrantes**
Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica, Costa Rica
habarran@gmail.com

[1] Este trabajo corresponde a una conferencia paralela dictada por el autor en la XV CIAEM, celebrada en Medellín, Colombia, del 5 al 10 de mayo de 2019.
[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.
Recibido por los editores el 28 de mayo de 2019 y aceptado el 2 de julio de 2019.
*Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática.* 2019. Año 14. Número 18. pp 235–246. Costa Rica

## 1. Transformaciones geométricas en el currículo escolar

El estudio de las transformaciones geométricas se ha ido introduciendo paulatinamente en diversos currículos escolares en diversas partes de mundo. Diversos elementos relacionados con este tema se mencionan en currículos latinoamericanos, por ejemplo, en Chile (Ministerio de Educación, República de Chile, 2011), Perú (Ministerio de Educación, 2016), Colombia (Ministerio de Educación Nacional de Colombia, 1998), Costa Rica (MEP, 2012). Lo que hay en mente con la consideración de este tema de estudio es la búsqueda del desarrollo de diferentes capacidades matemáticas superiores en el sentido señalado por Ruiz (2018), referidas a plantear y resolver problemas, razonar y argumentar, conectar, comunicar y representar (p. 75). De tal manera, el currículo de Matemáticas de la educación primaria y media costarricense establece que:

> Además de trabajar con problemas con distintos niveles de complejidad es necesaria la introducción de contenidos matemáticos que juegan un papel crucial en la formación escolar moderna. Por ejemplo, tópicos de geometría de coordenadas y de transformaciones que, además de incluir una visión moderna de la Geometría, favorecen el tratamiento de otros conceptos y procedimientos matemáticos, brindando instrumentos para poder usar las Matemáticas en diversos contextos. Un tratamiento adecuado de las relaciones y funciones es otro propósito que debe enfatizarse y cultivarse adecuadamente desde el inicio de la formación escolar, pues éstas resultan centrales para la formación matemática moderna. (MEP, 2012, p. 15)

Por otra parte, en Ministerio de Educación Nacional de Colombia, (1998) se enuncia que:

> En la actualidad, gran parte de la geometría escolar se ha ocupado del movimiento de figuras geométricas desde una posición a otra, y de movimientos que cambian el tamaño o la forma. El estudio de las transformaciones de figuras ha ido progresivamente primando sobre la presentación formal de la geometría, basada en teoremas y demostraciones y en el método deductivo. (p. 40)

En la enseñanza media se podría definir formalmente el concepto de transformación como una aplicación inyectiva del plano sobre sí mismo; sin embargo, este enfoque formal que permite un estudio profundo del tema, carece de la riqueza didáctica del enfoque más visual e intuitivo que ve una transformación como un movimiento de los puntos o las figuras manteniéndolas congruentes a sí mismas, en el caso de las isometrías, o al menos manteniendo su forma como en el caso de las homotecias. Al respecto, Yanik y Flores (2009) en un estudio con futuros profesores encontró que todos los participantes concebían las transformaciones como movimiento; explicaban que las isometrías podían describirse como movimientos de todos los puntos del plano más que como aplicaciones del plano sobre sí mismo (p. 55).

En ese sentido, en MEP (2012) se menciona lo siguiente:

> El movimiento de puntos y entidades geométricas permite construir nuevas entidades (curvas por ejemplo) y visualizar las usuales de otras maneras: un sentido dinámico de algunas propiedades geométricas como las posiciones relativas y transformaciones de puntos y formas. (MEP, p. 52)

La introducción de este tema, que no ha sido tradicional, en los planes de estudio de la enseñanza primaria y media, implica que el docente observe al menos partes de la geometría elemental con una perspectiva novedosa para lo cual a menudo no está suficientemente preparado, de ahí la importancia del aporte de recursos que lo apoyen en su labor de aula.

## 2. Otra perspectiva para el estudio de temas tradicionales

Las transformaciones geométricas son interesantes para ser estudiadas en sí mismas, pero también sirven como una herramienta para el estudio de otros temas de la geometría euclidiana desde otra perspectiva. Al respecto en NCTM (2010) se subraya su importancia al señalar que las transformaciones geométricas representan una forma alternativa para el estudio de la congruencia, semejanza y simetría (p. 62). Agregamos que puede ser útil también para visualizar otras propiedades y conceptos tales como el cálculo de áreas, según veremos más adelante.

Se ilustra el uso de esta perspectiva mediante dos situaciones.

### Congruencia de triángulos

La congruencia se puede estudiar desde el punto de vista de la simetría. Para ello recordamos que la reflexión, traslación y rotación conservan las medidas de los ángulos y reciben el nombre de isometrías.

Se dice que dos triángulos $ABC$ y $A^{'}B^{'}C^{'}$ son **isométricos** si $A^{'}$ es la imagen de $A$, $B^{'}$ es la imagen de $B$ y $C^{'}$ es la imagen de $C$ mediante una misma isometría. La noción de triángulos isométricos es equivalente a la de triángulos congruentes.

A partir de aquí se pueden estudiar las congruencias a partir de las isometrías y sus propiedades.

Lo interesante de este enfoque es que algunos problemas sobre congruencias pueden ser resueltos de manera sencilla mediante el uso de isometrías o con una combinación de ambos enfoques.

**Un ejemplo**. En la figura 1 se tiene que $\Delta ABC$ y $\Delta ADE$ son isósceles, ambos con ápice en $A$. Además $AD = 2AB$.

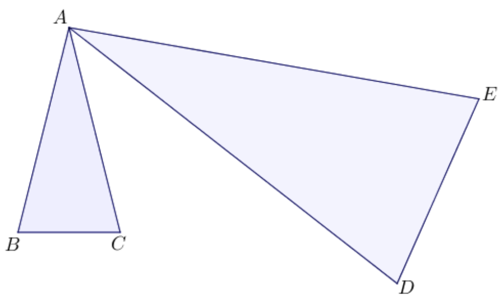


Figura 1: Dos triángulos isósceles.

Hay que demostrar dos cosas:

a) Los triángulos $BAD$ y $CAE$ son isométricos y, por lo tanto, $BD = EC$.

b) SI $I$ y $J$ son respectivamente los puntos medios de $CE$ y $BD$ entonces los triángulos $AIC$ y $AJB$ son isométricos y por lo tanto $\Delta AIJ$ es isósceles.

Para a), sea $\alpha = m\angle BAC = m\angle DAE$. Considere la rotación con centro en $A$ y amplitud $\alpha$ (considerada en dirección anti horario). Bajo esta rotación, $A$ lleva a $A$ pues $A$ es el centro de la misma y por lo tanto permanece invariante, $B$ lleva a $C$ y $D$ lleva a $E$. Se concluye que los triángulos $BAD$ y $CAE$ son isométricos. Como $B$ y $C$ son homólogos y $E$ y $C$ son homólogos mediante esta isometría, entonces $BD = EC$.

Para b) considere la misma isometría. $A$ lleva a $A$, $B$ lleva a $C$ y $J$ lleva a $I$. Observe que $I$ y $J$ son equidistantes de A y por lo tanto $\Delta AIJ$ es isósceles.

## El teorema de Viviani

Este teorema establece que dado un triángulo equilátero y un punto $P$ en su interior, entonces la suma de las distancias de P a los lados del triángulo es igual a la altura del triángulo.

Hay un prueba simple, elegante y muy visual de este teorema, la cual utiliza isometrías. Considere el triángulo equilátero dado en la figura 2 (a) y trace paralelas a los lados del triángulo que pasen por $P$ (figura 2 (b)).

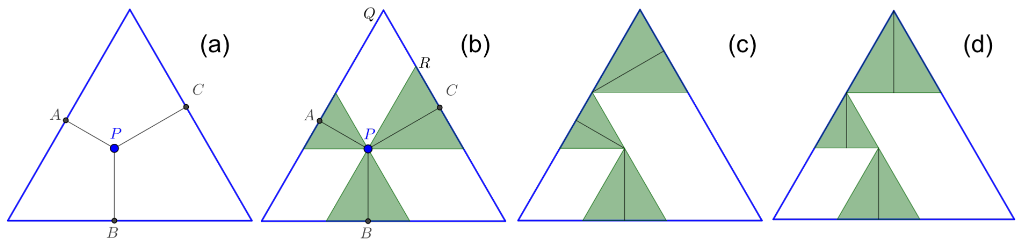


Figura 2: Según el teorema de Viviani $AP + BP + CP$ es igual a la altura del triángulo equilátero.

Los tres triángulos destacados en la figura 2 (b) son equiláteros y sus alturas son los segmentos $AP$, $BP$ y $CP$. Se traslada el triángulo verde a la derecha según el vector $\overrightarrow{RQ}$, se obtiene la figura 2 (c). Posteriormente se rota ese mismo triángulo alrededor de su centro un ángulo de 60º y finalmente el triángulo verde a la izquierda se rota 60º alrededor de su centro. Así se obtiene la figura 2 (d) en la cual se puede verificar que $AP + BP + CP$ es igual a la altura del triángulo equilátero dado.

## 3. Isometrías y áreas de figuras planas

Se enseña el cálculo de áreas de figuras planas básicas de diversas maneras. A menudo se enseñan las fórmulas sin más, pero en ocasiones se trata de que los estudiantes comprendan dichas fórmulas mediante, por ejemplo, el uso del tangrama o el doblado de papel. Otra forma útil puede ser el uso de transformaciones isométricas puesto que, dado que la imagen de un polígono mediante una isometría es congruente al polígono original entonces se preserva el área. Ilustramos esto a continuación.

**Área del paralelogramo**

Se supone conocido que el área de un rectángulo es igual al producto de la medida de su base por su altura.

Para determinar la forma en que se calcula el área del paralelogramo, consideramos uno de base $b$ y altura $a$.

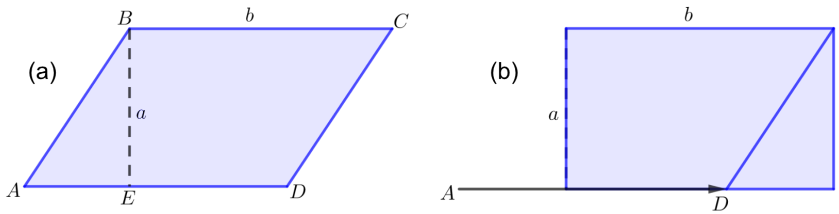


Figura 3: Cálculo del área del paralelogramo de base $b$ y altura $a$.

Con la notación de la figura 3 (a), consideremos el triángulo $ABE$ y trasladémoslo según el vector $\overrightarrow{AD}$, si luego eliminamos el $\Delta ABE$ obtenemos la figura 3 (b), que corresponde a un rectángulo de base $b$ y altura $a$.

El área del rectángulo es $b{\cdot}a$ y, puesto que en el proceso de trasladar y eliminar, el área se conserva, entonces el área del paralelogramo es $b{\cdot}a$.

Con el uso de un software de geometría dinámica, por ejemplo *Geogebra*, esto se puede visualizar mejor. Se define un deslizador que determine el segundo extremo del vector $\overrightarrow{u}$ que inicia en $A$ y mediante él se puede visualizar cómo el triángulo se va trasladando hasta ocupar su posición final cuando $\overrightarrow{u}$ sea igual a $\overrightarrow{AD}$.

**Área del trapecio**

A partir del área del paralelogramo y mediante una isometría se puede obtener el área del trapecio.

Considere un trapecio de base mayor $c$, base menor $b$ y altura $a$.

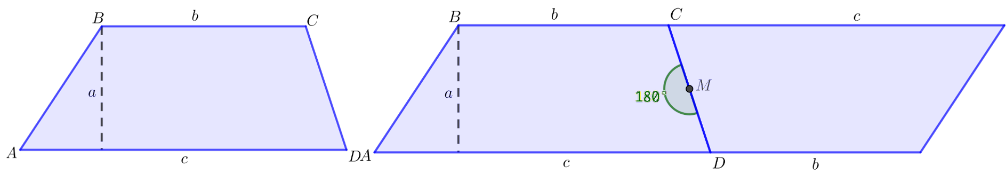


Figura 4: Cálculo del área del trapecio.

Con la notación de la figura 4 izquierda, marquemos el punto medio $M$ del lado $CD$ y luego apliquemos una rotación al trapecio de amplitud 180º en sentido horario con centro en $M$, se obtiene un paralelogramo como el de la figura 4 derecha, de base $b + c$ y altura $a$.

El área de este paralelogramo es $(b + c)\cdot a$ y puesto que está formado por dos trapecios congruentes, entonces el área del trapecio es igual a $\frac{1}{2}(b + c)\cdot a$.

Con *Geogebra* se visualiza esto de manera dinámica mediante un deslizador que defina el ángulo de la rotación con centro en $M$.

## Simetría y diseños

Siguiendo a Askew (2016) se puede decir que, en general, el término simetría evoca formas armoniosas y, particularmente, a la simetría axial en el contexto de la geometría euclidiana, pero a los matemáticos les gusta aplicar conceptos en un nuevo contexto. De tal modo, la palabra cotidiana "simetría" obtiene un significado matemático más amplio a través de la conexión con el reflejo y la rotación. Un objeto matemático es simétrico con respecto a una operación matemática particular si conserva ciertas propiedades, en este caso la apariencia, después de que se haya aplicado la operación. Las formas básicas de simetría -reflexión, rotación, cambio de escala, desplazamiento- y su combinación, forman la base del estudio de la geometría euclidiana, la consideración de tales simetrías es la geometría con la que tiene que ver la educación escolar pero también se pueden usar para deducir hechos menos conocidos, por ejemplo, el que enuncia que, en esencia, solo hay diecisiete patrones diferentes de "tapizados" (pp. 8-9).

En Kappraff (2015) se propone una serie de diversos diseños en el plano que siguen patrones. Tales diseños se pueden realizar con regla y compás o con un software como *Geogebra* que simule estos instrumentos. También se puede utilizar dicho software para reproducir estos diseños mediante recta y circunferencias y el uso de las transformaciones en el plano.

## Diseños en redes de triángulos equiláteros

Un red de triángulos equiláteros es una teselación del plano mediante triángulos rectángulos. Se puede construir usando regla y compás o simulándolos con *Geogebra* (por ejemplo). Para ello se construye una circunferencia de un radio $r$ dado, se selecciona un punto de esa circunferencia y con centro en ese punto se traza otra circunferencia del mismo radio $r$ que la primera. Estas circunferencias tienen dos puntos de intersección, con el mismo radio $r$, se dibujan dos circunferencias cuyos centros son esos puntos de intersección. Se continúa de esa forma dibujando circunferencias de radio $r$ con centros en los puntos de intersección que han resultado del paso previo. Luego se conectan mediante rectas los centros de las circunferencias y finalmente se borran estas para obtener la red.

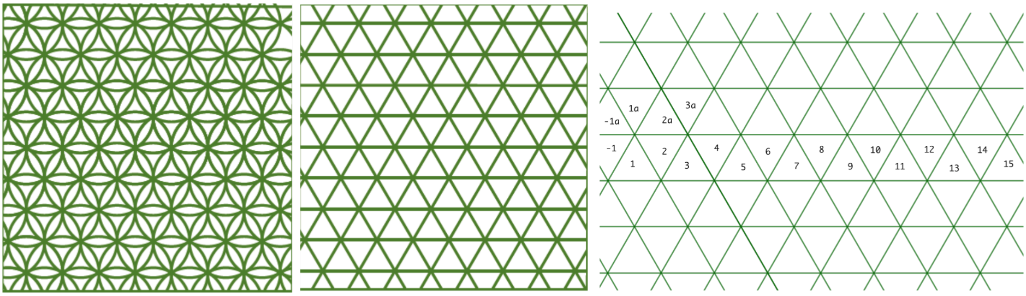


Figura 5: Proceso para la creación de una red de triángulos equiláteros utilizando regla y compás o reflexiones.

También se puede crear esta red mediante reflexiones a partir de un triángulo equilátero base (vea la figura 5 derecha).

Se traza el triángulo 1, éste se refleja sobre su lado derecho para obtener el 2 y así sucesivamente hacia la derecha. El triángulo 1 se refleja sobre su lado izquierdo para obtener el -1 y así hacia la izquierda y sucesivamente para obtener una hilera de triángulos. El 2 se refleja sobre su base para obtener el 2a y luego se procede como antes para obtener otra hilera. El proceso se repite hacia arriba y hacia abajo.

Utilizando esta red se pueden crear diseños artísticos muy interesantes. Por ejemplo, marque los vértices de uno de los triángulos de la red y denótelos por $P$, $Q$ y $R$. Luego marque otros puntos como se ve en la figura 6 (a). Con centro en cada uno de esos puntos y radio igual al lado del triángulo trace las seis circunferencias que se observan en la figura 6 (b). Borre las circunferencias con excepción de los arcos indicados por la figura 6 (c). Se obtiene una figura básica que podemos denominar como triángulo volador.

Se marca uno de los vértices del triángulo volador y se aplica al mismo una rotación de 60º con centro en dicho punto (S en la figura 6 (d)), se obtiene un triángulo volador 2, este se rota 60º alrededor de S, y así sucesivamente hasta obtener los primero 6 triángulos voladores. Rotaciones de 60º con centros apropiados producen en diseño completo. Finalmente se elimina la red de triángulos para obtener la figura 8. Diseños más intrincados se pueden obtener de esta manera.

Además de la propia belleza de los diseños que se pueden obtener, este tipo de construcciones permiten visualizar, repasar o introducir conceptos y propiedades. Por ejemplo, pueden surgir preguntas tales como ¿por qué en cada vértice confluyen exactamente seis figuras (que equivale al número de triángulos que comparten cada vértice)?, ¿cuánto mide cada uno de los arcos que constituye cada triángulo volador?, entre otras que permiten ver más profundamente en el diseño elaborado.

## Diseños en redes de cuadrados

Un red de cuadrados es una teselación del plano mediante cuadrados. La construcción de esta red es más sencilla que la de triángulos equiláteros.

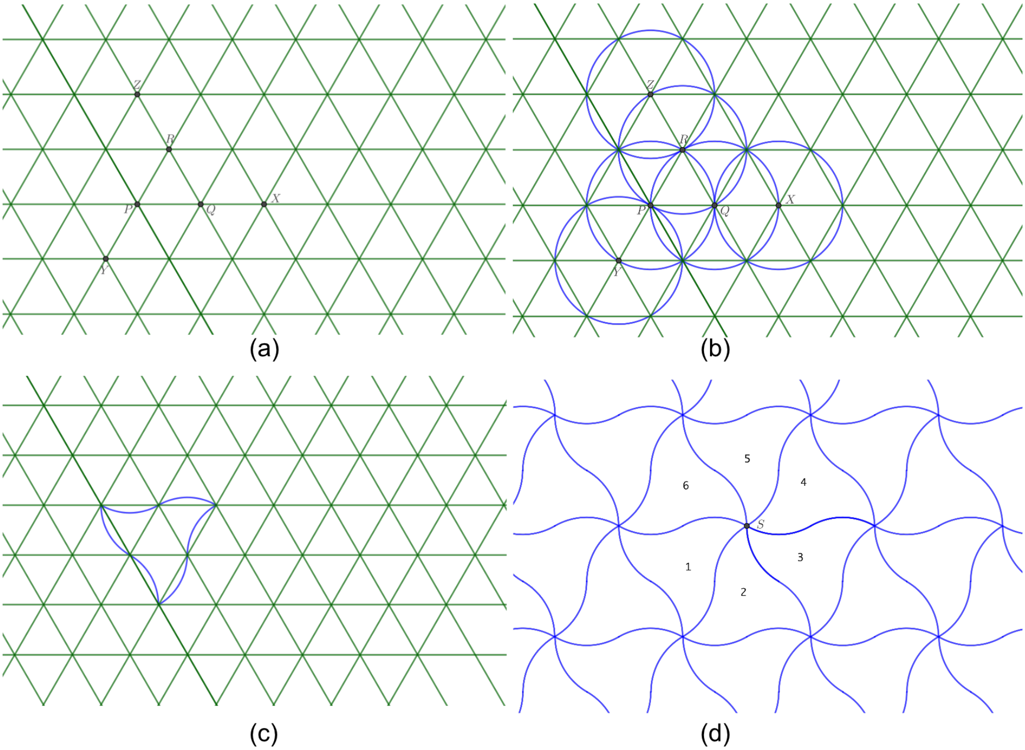


Figura 6: Proceso para la creación de un triángulo volador.

Utilizando regla y compás se puede construir a partir de dos rectas perpendiculares entre sí. Se dibuja una circunferencia con centro en el punto de intersección de estas rectas. Luego se dibujan cuatro circunferencias con el mismo radio que la primera y cuyos centros son los puntos de intersección entre ambas rectas y el círculo original. Finalmente, se dibujan circunferencias con el mismo radio y centros en los puntos de intersección de las circunferencias que van resultando, en todas direcciones.

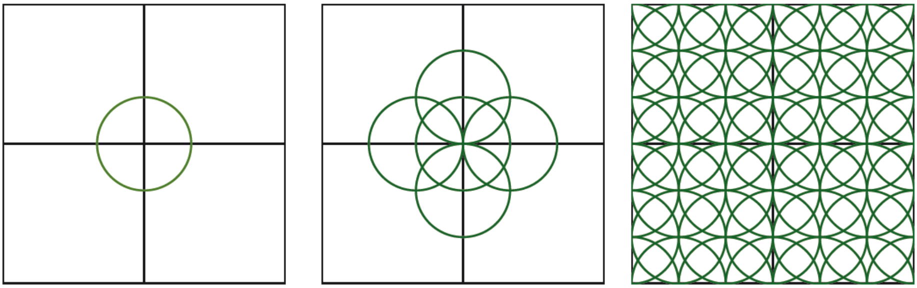

Figura 7: Base para la elaboración de una red de cuadrados.

Conectando mediante rectas los centros de las circunferencias que son tangentes se obtiene una red de cuadrados en el plano. Desde luego, esta red se también puede obtener a partir de un cuadrado base mediante traslaciones en diferentes direcciones.

Con esta red de cuadrados y las circunferencias que la originaron se pueden crear diseños interesantes como el de la figura 8 izquierda.

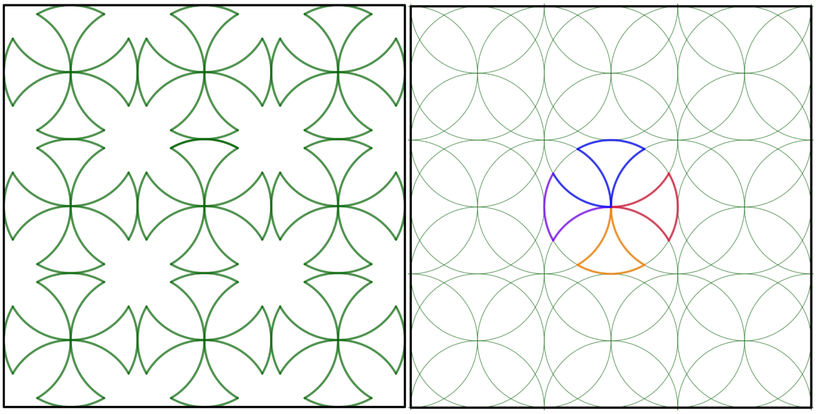

Figura 8: Diseño a partir de una red de circunferencias.

Se identifican tres arcos que formen el triángulo curvo (en azul en la figura 10). Luego se rota este triángulo 90º en el sentido horario con centro en el vértice inferior para obtener el rojo. Alrededor del mismo punto se rota el rojo 90º en sentido horario para obtener el anaranjado y este se rota 90º alrededor del mismo punto para obtener el violeta. Esto produce un figura básica que se puede trasladar en diferentes direcciones para obtener el diseño completo. Al eliminar las circunferencias de la red se obtiene el diseño de la figura 8 derecha.

## Frisos

Los frisos son cierto tipo patrones simétricos según ciertas transformaciones a lo largo de una cinta. Matemáticamente un friso es una cinta o banda infinita y un patrón básico que se extiende indefinidamente en ambas direcciones. En la práctica se usan solo segmentos de una cinta. Existen siete clases diferentes de patrones de frisos (Meyer, 2006).

Los patrones de frisos involucran traslaciones, rotaciones de medio giro, reflexiones y reflexiones con deslizamiento. Cada uno de los siete tipo de patrones de frisos se genera mediante una o varias de estas transformaciones. A continuación se proporciona un ejemplo de cada uno de ellos, se utiliza la forma que se da en la figura 9 como forma básica que genera el diseño completo mediante transformaciones.

Figura 9: Forma básica que genera los siete patrones de frisos que se dan a continuación.

El patrón denominado $F_1$ es generado solamente por traslaciones. La forma básica se traslada a la derecha según un vector $\overrightarrow{u}$, la que se obtiene se traslada hacia la derecha según el mismo vector y así sucesivamente.

Figura 10: Patrón de friso $F_1$.

En el patrón $F_1^3$ la forma básica es reflejada con deslizamiento con respecto a la línea central de la cinta. Una segunda reflexión con deslizamiento nos regresa a la forma básica. El patrón completo es generado por una reflexión con deslizamiento.

Figura 11: Patrón de friso $F_1^3$.

En el patrón $F_1^2$ se tienen dos ejes verticales, la forma básica se refleja según uno de ellos y luego, el par de formas se traslada dos veces la distancia entre los ejes.

Figura 12: Patrón de friso $F_1^2$.

El patrón $F_2$ es generado por medios giros en dos puntos fijos dados A y B. La forma básica es rotada según el primer punto A y el resultado se rota medio giro alrededor de B para obtener el par. Aplicando rotaciones en los dos puntos fijos se genera una traslación.

Figura 13: Patrón de friso $F_2$.

$F_2^2$ es un patrón generado por una reflexión según un eje vertical seguido por una rotación de medio giro alrededor de un punto fijo. Dado que el eje vertical también es rotado 180$^o$ se traslada la forma básica hasta dos veces la distancia entre los dos ejes hasta la siguiente imagen.

Figura 14: Patrón de friso $F_2^2$.

$F_1^1$ es un patrón generado por una traslación entre formas básicas sucesivas y una reflexión respecto a un eje en la línea central.

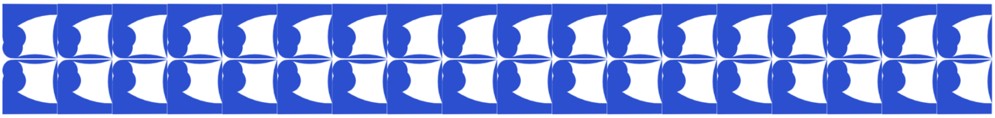

Figura 15: Patrón de friso $F_1^1$.

El patrón $F_2^1$ es generado por dos ejes verticales y uno. Se coloca una forma básica abajo del eje horizontal entre dos ejes verticales, se refleja se refleja según el un eje vertical, luego la combinación de las dos formas se refleja sobre el eje horizontal. Finalmente la configuración de cuatro formas es trasladada sucesivamente hasta dos veces la distancia entre los ejes verticales.

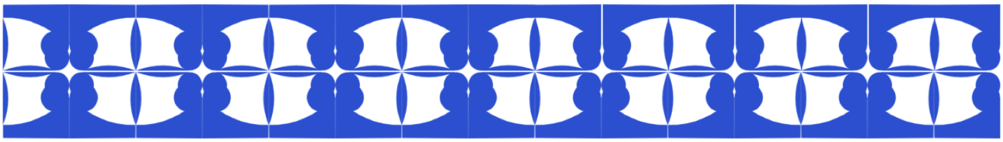

Figura 16: Patrón de friso $F_2^1$.

Desde el punto de vista didáctico, la identificación del patrón que aparece en un tipo de friso o construir frisos según un determinado patrón, puede servir como ejemplos muy interesantes en el estudio de las transformaciones.

## 5. Conclusión

La introducción en el currículo de nociones relativas a transformaciones en el plano –isometrías y homotecias– obedece, en general, a diferentes aspectos. Por una parte está el afán por modernizar el currículo en cuanto a geometría se refiere pero esta modernización conlleva la necesidad de incursionar en temas o herramientas que permitan un abordaje de la geometría más ameno pero también más útil en la comprensión conceptual y que permita al final un mayor desarrollo en la consecución de competencias y capacidades matemáticas en los estudiantes.

El abordaje de estos temas, y su uso para el estudio de temas más clásicos desde otra perspectiva, requiere también nuevas capacidades por parte de los docentes y exige, necesariamente, que se tengan recursos que puedan ayudarle en su labor.

Lo expuesto en este trabajo pretende dar algunas nociones de lo que se puede realizar mediante el uso de las transformaciones.

## Referencias y bibliografía

Askew, M. (2016). *Geometrie. Von Pi bis Pythagoras*. Berlin: Librero IBP.

Kappraff, J. (2015). *A participatory Approach to Modern Geometry*. New Jersey: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Meyer, W. (2006). *Roads to Geometry*. San Diego: Academic Press.

Ministerio de Educación, Chile (2011). *Matemática, Programa de Estudio para Primer Año Medio Unidad de Currículum y Evaluación*. Chile: autor. Descargado de **https://educrea.cl/wp-content/uploads/2015/04/programa-de-estudio-1-medio-matematica-191115.pdf**

Ministerio de Educación Nacional, Colombia (1998). *Lineamientos curriculares, Matemáticas.* Colombia: autor. Descargado de **https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf**

Ministerio de Educación Pública, Costa Rica (2012). *Programas de estudio Matemáticas. Educación General Básica y Ciclo Diversificado.* Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación, Perú. (2016). *Programa curricular de Educación Secundaria*. Perú: autor. Descargado de **http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-curricular-educacion-secundaria.pdf**

NCTM (2010). *Focus in High School Mathematics. Reasoning and sense making*. (2nd ed) Reston: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Ruiz, A. (2018). *Evaluación y pruebas nacionales para un currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores.* Ciudad de México: Comité Interamericano de Educación Matemática.

Yanik, H. B. y Flores, A. (2009). Understanding rigid geometric transformations: Jeff's learning path for translation. *The Journal of Mathematical Behavior, 28, 41-57*. doi:10.1016/j.jmathb.2009.04.003