Enseñar matemáticas como una profesión. Características de las competencias docentes[1]

Salvador Llinares

Resumen

La enseñanza de las matemáticas se articula a través de diferentes tareas profesionales que ponen de relieve la influencia del contexto en cómo el profesor de matemáticas usa el conocimiento de matemáticas y de didáctica de las matemáticas. Esta situación introduce la idea de competencia docente del profesor entendida como el uso pertinente del conocimiento en el desarrollo de estas tareas profesionales. En este ámbito, la competencia docente "mirar de manera profesional" la enseñanza de las matemáticas se entiende como el proceso de interpretar las situaciones de enseñanza aprendizaje de las matemáticas para justificar las decisiones de acción según los objetivos de aprendizaje planteados. Esta perspectiva deriva desafíos para los formadores de profesores de matemáticas.

Palabras clave: enseñanza de las matemáticas, competencia docente, conocimiento de matemáticas para enseñar, formación de profesores de matemáticas.

Abstract[2]

Mathematics teaching is articulated through different professional tasks that highlight the influence of the context on how Mathematics teachers use the knowledge of Mathematics and Mathematics teaching. This situation introduces the idea of teacher pedagogical competence understood as the relevant use of knowledge in the development of these professional tasks. In this area, the teaching competence needed "to look professionally" at the teaching of Mathematics is understood as the process of interpreting the teaching situations in the learning of Mathematics to justify action decisions according to the learning objectives that have been set. This perspective presents challenges for Mathematics teacher educators.

Keywords: Mathematics teaching, teacher proficiency, Mathematics Knowledge for Teaching, Mathematics teacher education.

1. La enseñanza de las matemáticas como un sistema de actividades prácticas

Desde hace algunos años se insiste en la necesidad de que los profesores de matemáticas tengan en cuenta la forma de pensar matemáticamente de los niños para ayudarles

S. Llinares
Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante, España
sllinares@ua.es

[1] Este trabajo corresponde a una conferencia plenaria dictada por el autor en la XV CIAEM, celebrada en Medellín, Colombia, del 5 al 10 de mayo de 2019.
[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

Recibido por los editores el 1 de junio de 2019 y aceptado el 14 de julio de 2019.

en su aprendizaje de las matemáticas (Even y Tirosh, 2008). Ayudar a los estudiantes a razonar matemáticamente implica que los profesores deben elegir tareas matemáticamente relevantes para sus estudiantes e identificar oportunidades durante la enseñanza para que los estudiantes se impliquen en procesos matemáticos como particularizar y generalizar, conjeturar, argumentar/probar y comunicar. Desde esta perspectiva, la práctica de enseñar matemáticas se puede entender como un sistema de actividades del profesor que en un contexto de aula podemos identificar como (i) seleccionar y diseñar tareas matemáticamente relevantes para conseguir los objetivos de aprendizaje pretendidos, (ii) gestionar las diferentes fases de una lección y en particular la gestión de las discusiones matemáticas en el aula, e (iii) interpretar y analizar el pensamiento matemático de los estudiantes (Figura 1). Este sistema de actividades que articulan la práctica de enseñar matemáticas se puede concretar en actividades particulares. Por ejemplo, la selección o diseño de tareas matemáticamente relevantes implica la necesidad de anticipar respuestas probables de los estudiantes a dichas tareas. La gestión de las discusiones matemáticas en el aula implica la posibilidad de seleccionar estudiantes particulares para presentar sus respuestas e ideas durante la puesta en común, secuenciando con un propósito explícito el orden en el que los estudiantes se les da la oportunidad de discutir sus resoluciones y reconocer la posibilidad de hacer conexiones entre las respuestas de los diferentes estudiantes y entre estas y las ideas matemáticas clave que son el objetivo de la lección (Stein, Engle, Smith y Hughes, 2008).

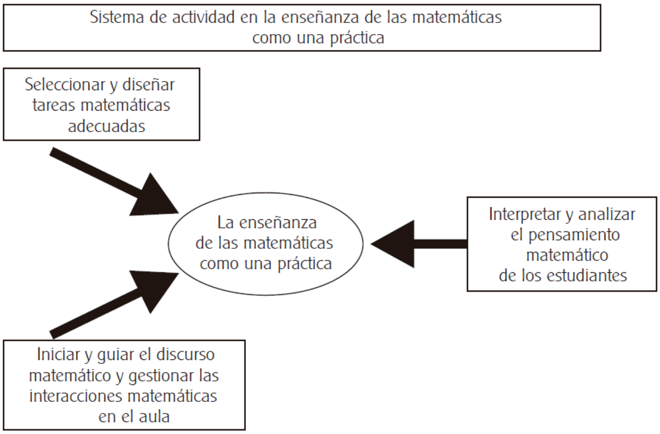


Figura 1. Sistema de actividad en la enseñanza de las matemáticas como una práctica en Llinares, Valls y Roig (2008 p. 34)

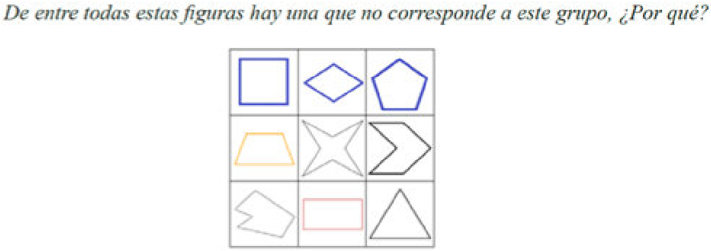
Estas actividades pueden contextualizarse desde los momentos de la planificación, hasta momentos imprevistos durante la enseñanza. Entre los primeros, están los momentos en los que el profesor tiene que pensar cómo secuenciar actividades con diferente demanda cognitiva teniendo en cuenta la diversidad de los alumnos en su clase. Entre las segundas, podemos encontrar el aprovechamiento de situaciones imprevistas durante el desarrollo de la lección que pueden ser usadas para apoyar el aprendizaje de los estudiantes. Por ejemplo, reconocer alguna cuestión planteada por los estudiantes y generada durante las discusiones matemáticas en el aula a partir de la cual el profesor puede decidir una determinada dirección de la clase para apoyar el aprendizaje de sus estudiantes.

Esta variedad amplia de situaciones en las que los profesores deben responder ha puesto de manifiesto la relevancia del *conocimiento de matemáticas para la enseñanza* (Ball & Bass, 2000; Ball, Thames, & Phelps, 2008; Davis, & Renert 2013; Rowland, et al. 2009). La falta de este conocimiento limita la competencia del profesor para elegir o diseñar tareas matemáticas con alta demanda cognitiva para los estudiantes, para reconocer oportunidades matemáticamente relevantes durante el desarrollo de la lección, para identificar aspectos relevantes del pensamiento matemático de sus estudiantes y para generar un discurso profesional sobre lo que sucede en el aula.

Diferentes estudios han estado caracterizando los dominios de conocimiento del profesor necesario para enseñar matemáticas y que resultan relevantes para la realización de estas actividades (Davis & Renert, 2013; Scheiner, Montes, Godino, Carrillo, Pino-Fan, 2019). Una de las características que han revelado estos estudios es la compleja relación entre el conocimiento de matemáticas y cómo es usado en las diferentes actividades que estructuran la enseñanza de las matemáticas. Relacionar la práctica de enseñar matemáticas con resolver problemas profesionales subraya la idea de la competencia del profesor. Por ejemplo, el reconocimiento por parte del profesor de oportunidades durante la enseñanza aprovechándolas para apoyar el aprendizaje de los estudiantes es una manifestación de la manera en la que el profesor usa diferentes dominios de conocimiento para realizar inferencias basadas en las evidencias para tomar decisiones de enseñanza (Stockero, van Zoest, 2013; van Zoest, Stockero, Leatham, Peterson Atanga y Ochieng, 2017). De esta manera, apoyar la enseñanza de las matemáticas en el pensamiento matemático de los estudiantes está vinculado a la competencia del profesor para realizar inferencias sobre el pensamiento de los estudiantes. En este sentido, para ayudar a los estudiantes a progresar en su aprendizaje, los profesores deben diseñar, adaptar o seleccionar tareas matemáticas relevantes e interpretar lo que dicen y hacen sus estudiantes al resolverlas, para poder decidir cómo continuar la enseñanza. Estas actividades (prácticas profesionales) – diseñar/adaptar/seleccionar, interpretar y tomar decisiones requieren conocimiento especializado. En particular en relación con los estudiantes como aprendices, sobre el currículo y sobre estrategias instruccionales (Even y Tirosh, 2008).

2. Competencia docente: uso del conocimiento para resolver actividades en la enseñanza

La especificidad del conocimiento del profesor en la realización de las actividades vinculadas a la práctica de enseñar matemáticas conlleva el reconocimiento del papel de diferentes dominios de conocimiento (Llinares, 2013-a, 2013-b). Por ejemplo, un contenido curricular en la educación primaria son las figuras geométricas y los polígonos. Este contenido define como objetivo desarrollar en los estudiantes formas de razonar con las figuras geométricas y sus atributos. Este objetivo implica ayudar a los estudiantes a comprender los procesos de clasificación de las figuras geométricas que se apoyan en el reconocimiento de atributos comunes a grupos de figuras. En este contexto ante una tarea como la que aparece en la Figura 2, cuando el profesor anticipa posibles respuestas de los estudiantes para justificar su introducción en la lección debe movilizar conocimiento desde diferentes dominios.



1a-cuadrado; 1b-rombo; 1c-pentágono regular

2a- trapecio isósceles; 2b- octógono cóncavo simétrico; 2c-hexágono cóncavo simétrico

3a- hexágono no simétrico cóncavo; 3b-rectángulo; 3c- triángulo equilátero

Figura 2. Actividad de reconocer semejanzas y diferencias entre figuras geométricas. (Bernabéu, Moreno y Llinares, 2018)

La selección de esta tarea (Figura 2) refleja el conocimiento del objetivo curricular (aprender a identificar y razonar con los atributos de las figuras). La tarea implica reconocer un atributo común a un grupo de figuras, lo que permite agruparlas en relación con otras, y poder justificar por qué una figura no tiene el atributo identificado. Además, la tarea tiene en cuenta que los estudiantes de educación primaria pueden desarrollar una comprensión amplia sobre las figuras geométricas si tienen la posibilidad de analizar múltiples ejemplos de figuras y discutir sobre sus semejanzas y diferencias. Desde este punto vista, resulta clave introducir ejemplos de figuras que cumplan ciertos requisitos junto con figuras que no los cumplan. Esta tarea refleja aspectos del currículo (tipo de figuras y atributos) y de los procesos cognitivos que se tiene que desarrollar en los estudiantes (reconocer atributos, y semejanzas y diferencias entre las figuras). En este sentido, preguntas que pueden ayudar a movilizar el conocimiento del profesor sobre estos aspectos son

- ¿las tareas previstas en el plan de la lección presentan variedad de ejemplos y contra-ejemplos?

La tarea de la figura 2 tiene como objetivo que los niños/as reconozcan atributos de las figuras geométricas y que sean capaces de establecer listas de estos atributos vinculados a diferentes figuras para poder establecer diferencias entre las figuras (regularidad, cóncavo /convexo, numero de lados, simetría, paralelismo, diagonales, etc.). En esta tarea, los atributos que permiten diferenciar una figura de las otras pueden ser (i) la simetría que permite diferenciar hexágono cóncavo que no tiene ejes de simetría del resto de figuras, (ii) el tener más de un ángulo mayor de 180º, que permite diferenciar el octógono cóncavo (la estrella) del resto de las figuras, y (iii) no tener diagonales, que permite diferenciar al triángulo equilátero del resto de las figuras.

Desde el punto de vista del conocimiento del profesor sobre los estudiantes y el aprendizaje matemático, el profesor debería reconocer que cuando se da la oportunidad a los estudiantes de pensar en diferentes aproximaciones a la resolución de las tareas pueden generarse diferentes soluciones. En este tipo de situaciones los profesores deben anticipar posibles respuestas de los estudiantes, aunque algunas veces se tiene que asumir que las respuestas de los estudiantes pueden ser imprevisibles. Es, en este contexto, en el que la capacidad del profesor de pensar sobre su enseñanza a lo largo del tiempo genera la posibilidad de incrementar su conocimiento sobre cómo los estudiantes aprenden, además del conocimiento reunido por las investigaciones en Didáctica de la Matemática. Por ejemplo, en relación con la tarea anterior (Figura 2), una referencia puede ser las características de los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico proporcionada por el modelo de van Hiele relativos a la capacidad de reconocer atributos de las figuras (Figura 3). Esta situación genera la complementariedad entre los procesos de transferencia del conocimiento (de la teoría a la práctica) y la generación procesos de desarrollo profesional del profesor (de la práctica a la teoría). Durante muchos años la investigación en Didáctica de las Matemáticas ha estado proporcionando información sobre características de cómo los estudiantes aprenden contenidos matemáticos y desarrollan procesos matemáticos. Esta información es la que los profesores pueden usar para realizar inferencias sobre qué y cómo los estudiantes están aprendiendo desde lo que los estudiantes dicen o hacen cuando resuelven problemas y justificar, como consecuencia, las direcciones de la enseñanza generadas.

NIVEL	RECONOCER
1. Los estudiantes reconocen las figuras **como un todo**.	• Asocian las figuras a objetos conocidos. "*Esta se parece a un reloj de arena*". • Hacen uso de artículos demostrativos para indicar las diferencias de las figuras. Usan los demostrativos "eso" o "esto" para indicar las diferencias de las figuras. • Tienen dificultades para reconocer los atributos de las figuras. • Usan términos perceptuales para nombrar algunos atributos aunque estén descontextualizados (no conocen los términos o no los usan adecuadamente)

2. Los estudiantes escriben **las partes y los atributos** de las figuras.	• Los estudiantes reconocen de manera progresiva los atributos de las figuras: Figuras cerradas/abiertas. Lados rectos/curvos. Lados no-cruzados/cruzados. Aunque inicialmente pueden tener dificultades en reconocer algunos atributos. (Cóncavo/convexo, Número de lados elevado, Altura triángulos, ...) finalmente los reconocen de manera sistemática.
	• Empiezan a incorporar los nombres de las figuras para diferenciarlas (rombo, cuadrado, triángulo rectángulo, cuadriláteros, ...
	• Finalmente, reconocen os atributos de las figuras, y los usan para diferenciarlas entre sí.
	  – Diagonales (tamaño, perpendicularidad).
	  – Ejes de simetría.
	  – Paralelismo, perpendicularidad de los aldos (ángulos rectos).
	• Usan un vocabulario adecuado, incorporando los términos adecuados de los atributos para explicar las diferencias entre las figuras (figuras cerradas/abiertas, lados curvos/rectos, triángulos rectángulos/acutángulos/obtusángulos, ...).

Figura 3. Características de los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico en relación con la actividad de Reconocer (Bernabéu, Moreno, y Llinares, 2018, Pag. 63)

En relación con el conocimiento del profesor de las estrategias instruccionales, el profesor puede ayudar a los estudiantes a realizar comparaciones y conexiones. Por ejemplo, en la tarea de la Figura 2 indicando a los estudiantes que generen listas de atributos que cumplan las diferentes figuras y comparen las diferencias y semejanzas entre ellas. Facilitar la discusión en clase sobre los atributos reconocidos en las figuras y sobre las diferencias y semejanzas es una estrategia instruccional que facilita la generación de nuevas ideas. Otra estrategia instruccional es permitir a los estudiantes comparar las respuestas de sus compañeros con las suyas propias para generar la oportunidad de justificar y explicar sus propias resoluciones. La implementación de todas estas estrategias instruccionales en el aula por parte del profesor está relacionada con el conocimiento movilizado en relación con el currículum (¿qué deben conocer los estudiantes?) y en relación con el aprendizaje (¿cómo aprenden los estudiantes?) lo que subraya las fuertes relaciones entre los diferentes dominios de conocimiento relevante para la enseñanza de las matemáticas.

3. Desarrollo de competencias docentes para aprender una profesión

La identificación de diferentes tareas profesionales pone de relieve la influencia del contexto en cómo el profesor de matemáticas usa el conocimiento de matemáticas y de didáctica de las matemáticas. A través de esta identificación hemos introducido la idea de competencia docente del profesor como usar el conocimiento de manera pertinente en el desarrollo de las actividades profesionales vinculadas a la enseñanza de las matemáticas. La idea de competencia docente como un proceso basado en el conocimiento lo hemos caracterizado mediante un ejemplo vinculado a la elección por parte del profesor de tareas matemáticas con alta demanda cognitiva, que nos ha permitido ejemplificar los contextos de uso de diferentes dominios de conocimiento. Esta caracterización de la enseñanza de las matemáticas como una práctica en la que se movilizan diferentes dominios de conocimiento (competencia docente) tiene reflejos en las propuestas de formación de profesores (Llinares, 2012).

En particular, en propuestas de formación de profesores que inciden en maximizar la relación entre la teoría y la práctica en contextos que favorezcan el uso del conocimiento teórico en el análisis de las situaciones prácticas (Fernández, Callejo & Márquez, 2014; Oonk, Verloop, Gravemeijer, 2015), proporcionando a los estudiantes para profesor oportunidades de analizar ejemplos de la práctica de enseñar matemáticas como un contexto para el desarrollo de competencias docentes. Uno de los objetivos en esta aproximación a la formación de profesores es ayudar a los estudiantes para profesor a desarrollar un discurso profesional vinculado a la práctica (Ivars, Fernández y Llinares, & Choy, 2018). Es decir, favorecer el desarrollo de argumentos prácticos como una elaboración formal de formas de razonar sobre la práctica. En el desarrollo de los argumentos prácticos de los estudiantes para profesor se pretende que estos establezcan razones de sus decisiones vinculando las evidencias proporcionadas por los registros de la práctica con principios más generales procedentes de la teoría (Fenstermacher y Richardson, 1993; Roig, Llinares, & Penalva, 2011).

En este contexto se generan cuestiones relativas a cómo apoyar el desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" las situaciones de enseñanza (Llinares, 2013-a, 2015; Seibert y Groenwald, 2013). Asi, "mirar de manera estructurada" las situaciones de enseñanza para generar información sobre lo que está sucediendo y proponer nuevas tareas se considera un proceso basado en el conocimiento (Mason, 2002; Llinares, Ivars, Buforn y Groenwald, 2019). Desde la perspectiva de la formación de profesores se plantea la necesidad de:

* comprender el desarrollo de esta competencia, e

* identificar contextos de aprendizaje que apoyen dicho desarrollo.

Estos dos aspectos generan desafíos a los formadores de profesores en dos ámbitos:

* en cómo conceptualizar modelos de desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" (Sánchez-Matamoros, Moreno, Perez-Tyteca & Callejo, 2018) y

* en generar maneras de pensar sobre el diseño de intervenciones en los programas de formación (Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls, & Callejo, 2018; Ivars, Buforn, & Llinares, 2017; Llinares, 2016; Llinares, Valls, &, Roig, 2008).

Una línea de actuación que intenta aportar información a estas cuestiones enfatiza el uso de diferentes tipos de *registros de la práctica* para crear los contextos de desarrollo de la competencia docente. Un registro de la práctica puede ser un video de una lección en una clase, las respuestas escritas de los estudiantes a uno o varios problemas, una planificación de una lección o grupos de planificaciones de una lección. A partir de estos registros de la práctica es posible generar tareas para los estudiantes para profesor en el sentido de ayudarles a estructurar su mirada: qué aspectos mirar del registro de la práctica, que conocimiento es pertinente para analizar estos aspectos, cómo justificar las decisiones de enseñanza considerando las interpretaciones realizadas, etc. En el apéndice de este texto se muestra un ejemplo de este tipo de tareas en un programa de formación de maestros (Educación Primaria).

Las tareas diseñadas mantienen una estructura similar. En primer lugar, se contextualiza el registro de la práctica y luego se introducen las evidencias. En este ejemplo, el texto escrito de la interacción entre una maestra y un alumno motivada por la resolución de una actividad dirigida a desarrollar la comprensión de los números de tres cifras. Finalmente, se presentan una serie de cuestiones para el estudiante para profesor para organizar su aproximación al análisis de la situación y ayudarle a generar un argumento práctico sobre la situación. Esta estructura del diseño de las tareas en el programa de formación permite tener la oportunidad de desarrollar diferentes aspectos de lo que constituye la competencia docente "mirar profesionalmente" las situaciones de enseñanza de las matemáticas. Mason (2002) concreta estos aspectos en: (i) desarrollar la sensibilidad y mirar con sentido que se vincula a la identificación de lo que puede ser considerado relevante, teniendo en cuenta un cierto objetivo que guía la observación (*intentional noticing*), (ii) describir los aspectos observados manteniendo registros de lo observado, separando la descripción de los juicios (*marking and recording*), (iii) reconocer posibles alternativas de acción (*recognizing choices*), y (iv) validar lo observado intentando que los otros reconozcan lo que ha sido descrito o sugerido (*validating with others*).

La secuencia de este tipo de actividades en el programa de formación (Figura, 4) crea el contexto para favorecer el desarrollo de un discurso profesional vinculado a la acción sobre la enseñanza de las matemáticas de los estudiantes para profesor (Ivars et al., 2018). El desarrollo de este discurso profesional es el que puede evidenciar la relación entre (i) identificar los aspectos relevantes en una situación de enseñanza, (ii) usar el conocimiento sobre el contexto para razonar sobre las evidencias proporcionadas, y (iii) realizar conexiones entre los sucesos específicos del aula y principios e ideas más generales sobre la enseñanza-aprendizaje (Van Es y Sherin 2002).

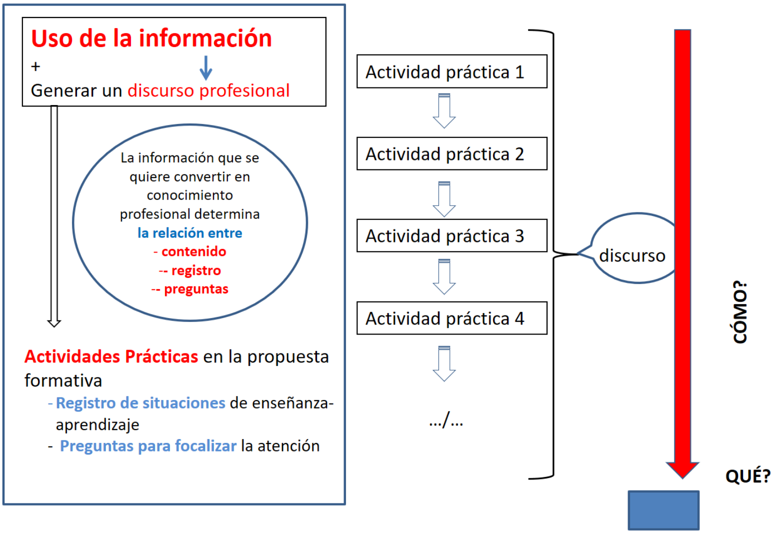


Figura 4. Interacción del análisis de la práctica y conocimiento teórico en el desarrollo de un discurso profesional vinculado a la competencia docente "mirar profesionalmente" (Ivars, Buforn, y Llinares, 2017; p. 77).

4. Consideraciones finales: Desafíos en aprender la práctica de enseñar matemáticas

Desde la perspectiva de la formación de profesores de matemáticas, reconocer que el proceso de llegar a ser profesor significa aprender una práctica basada en el conocimiento, genera desafíos para los formadores de profesores. En primer lugar, por la necesidad de identificar sistemas de actividad que articulan la práctica de enseñar matemáticas (Lampert, 2001). La descomposición de la práctica en sus aspectos constituyentes permite a los estudiantes para profesor tener la oportunidad de estudiar componentes separados pero relevantes de la práctica (Figura 1). En segundo lugar, por la posibilidad de asumir diferentes representaciones de la práctica de enseñar que puedan ayudar a determinar qué tipo de registros de la práctica y qué tipo de actividades con ellos deben insertarse en los programas de formación *(core practices*) de manera que los estudiantes para profesor puedan aprenderlas (Grossman, 2018). En este aprendizaje resulta relevante la manera en la que los estudiantes para profesor se apropian de instrumentos conceptuales para guiar sus decisiones sobre la enseñanza (Ivars, Buforn y Llinares, 2016). En tercer lugar, la necesidad de hacer explícito cómo los formadores de profesores conceptualizan el desarrollo de las competencias docentes (Sánchez-Matamoros et al, 2018). Los diferentes modelos a través de los cuales los formadores caracterizan el aprendizaje de los estudiantes para profesor permiten justificar las decisiones sobre cómo organizar los entornos de aprendizaje en el programa de formación.

Las ideas y principios que ayudan a dar respuesta a estos desafíos (identificar sistemas de actividad relevantes, determinar diferentes registros de la práctica, y el modelo de desarrollo de las competencias adoptado) se están considerando como referentes para articular los programas de formación reconociendo la dificultad de aprender la práctica de enseñar matemáticas.

La posibilidad de descomponer la práctica de enseñar matemáticas en actividades relevantes puede verse como una simplificación de la práctica, pero permite a los formadores de profesores generar entornos de aprendizaje en el programa de formación centrados sobre aspectos específicos sin perder de vista la mayor complejidad que se genera en situaciones reales de clase. Por ejemplo, el poder analizar aspectos particulares de la interacción entre un alumno y su maestra (ver un ejemplo en el anexo) puede ayudar a los estudiantes para maestro a detenerse e interpretar aspectos particulares de la interacción que sería más complicado en una situación de clase real. En el desarrollo de este tipo de actividades de análisis de registros de la práctica los estudiantes para profesor pueden empezar a identificar aspectos relevantes, nombrarlos de manera que facilite la comunicación con otros y a interpretarlos. En este proceso resulta clave los instrumentos conceptuales que el formador de profesores puede ponerle a su alcance de manera que puedan ser usados para identificar, nombrar e interpretar los aspectos de la práctica que centran su atención. Estos instrumentos conceptuales, como esquemas para analizar la interacción en el aula o trayectorias de aprendizaje de las nociones matemáticas, proporcionan a los estudiantes para profesor el lenguaje para describir e interpretar los aspectos de la práctica y formas de ver y comprender la práctica de enseñar matemáticas (Llinares,).

Finalmente se puede indicar que, la identificación de desafíos en la formación de profesores de matemáticas al adoptar la perspectiva de que llegar a ser profesor implica aprender una práctica, se apoya en el trabajo, reflexión sobre la práctica e investigación de los formadores de profesores en sus intentos de mejorar su propia práctica.

Reconocimiento. La investigación mencionada en este trabajo ha sido realizada con el apoyo del Ministerio de Economía y Competitividad –MINECO - a través de la Agencia Estatal de Investigación- AEI, España mediante el proyecto EDU2017-87411-R; y de la Generalitat Valenciana- GVA- a través del grupo de Excelencia PROMETEO2017/135.

Referencias y bibliografía

Ball, D., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics* (pp. 83–104). Westport: Ablex.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*, 389–407.

Bernabéu, M., Moreno, M., & Llinares, S. (2018). ¿Cómo estudiantes para maestro/a anticipan posibles respuestas de niños/as en actividades de reconocimiento de figuras geométrica? En Roig-Vila, R. (ed.), *El compromiso académico y social a través de la investigación e innovación educativas en la Enseñanza superior.* Barcelona: Octaedro.

Davis, B. & Renert M. (2013). *The Math Teachers Know. Profound Understanding of Emergent Mathematics*. London: Routledge.

Even, R. y Tirosh, D. (2008). Teacher Knowledge and understanding of students' mathematical learning and thinking. En L. English (ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education. 2nd edition* (p. 202-222). London: Routledge.

Fernández, C., Callejo, M.L., & Márquez, M. (2014). Conocimiento de los estudiantes para maestro cuando interpretan respuestas de estudiantes de primaria a problemas de división medida. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(3), 407-424.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J., & Callejo, M.L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: Characterization, development and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 13*, 39-61.

Fenstermacher, G. & Richardson, V. (1993). The elicitation and reconstruction of practical arguments in teaching. *Journal of Curriculum Studies, 25*(2), 101-114.

Grossman, P. (2018). *Teaching core practices in teacher education*. Cambridge, MA: Harvard Education Press.

Ivars, P., Buforn, A. & Llinares, S. (2016). Características del aprendizaje de estudiantes para maestro de una trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones para apoyar el desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente. *Acta Scientiae, 18*(4), 48-66.

Ivars, P., Buforn, A., & Llinares, S. (2017). Diseño de tareas y desarrollo de una Mirada profesional sobre la enseñanza de las matemáticas de estudiantes para maestro. En A. Salcedo (ed). *Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI* (p. 65-88). Caracas: CIES.

Ivars, P., Fernández, C., Llinares, S. & Choy, B.H. (2018). Enhancing Noticing: Using a Hypothetical Learning Trajectory to Improve Pre-service Primary Teachers' Professional Discourse. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(11), em1599.

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. New York: Yale University Press

Llinares, S. (2012). Formación de profesores de matemáticas. Caracterización y desarrollo de competencias docentes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 7*(10), 53-62.

Llinares, S. (2013-a). El desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Educar em Revista, Curitiba, 50,* 117-133

Llinares, S. (2013-b). Professional noticing: A component of Mathematics Teacher's professional practice. *SISYPHUS. Journal of Education, 1*(3), 76-93.

Llinares, S. (2015). El desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente el aprendizaje de las matemáticas". Algunas características en la formación inicial de profesores de matemáticas. En B. D'Amore & M.I. Fandiño (Comp.), *Didáctica de la matemática. Una mirada internacional, empírica y teórica*. Bogotá: Ediciones Universidad de la Sabana

Llinares, S. (2016). Enseñar matemáticas y aprender a mirar de forma profesional la enseñanza (Del análisis del conocimiento y práctica del profesor al desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente. En G.A. Perafan, E. Badillo, & A. Aduriz (eds.), *Conocimiento y emociones del profesorado para su desarrollo e implicaciones didácticas* (pp. 211-236). Bogotá: Editorial Aula de Humanidades.

Llinares, S., Ivars, P., Buforn, A. & Groenwald, C. (2019). "Mirar Profesionalmente" las situaciones de enseñanza: Una competencia basada en el conocimiento. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández & M.T. González (eds.), *Investigación sobre el profesor de Matemáticas: Formación, Práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 177-192). Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Llinares, S., Valls, J. &, Roig, A.I. (2008). Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas. *Educación Matemática, 20*(3), 31-54

Mason, J. (2002). Researching your own practice. The discipline of noticing. London: Routledge-Falmer.

Oonk, W.; Verloop, N., & Gravemeijer, K. (2015). Enriching Practical Knowledge: Exploring Student Teachers' Competence in Integrating Theory and Practice of Mathematics Teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(5), 559-598.

Roig, A.I., Llinares, S. & Penalva, M.C. (2011). Estructuras argumentativas de estudiantes para profesores de matemáticas en un entorno en línea. *Educación Matemática, 23*(3), 39-65.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A. y Huckstep, P. (2009). Developing primary mathematics teaching. Reflecting on practice with the Knowledge Quartet. Londres: SAGE

Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., Perez-Tyteca, P., Callejo, M.L. (2018). Trayectorias de aprendizaje de la longitud y su medida como instrumento conceptual usado por futuros maestros de educación infantil. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21*(2), 203-228.

Scheiner, Th., Montes, M., Godino, J.D., Carrillo, J., & Pino-Fan, L. (2018). What makes mathematics Teachers Knowledge Specialized? Offering Alternative Views. *International Journal of Science and Mathematics, 17*(1), 153-172.

Seibert, L.G., Groenwald, Cl. (2013). Observar com Sentido: una competência importante na vida professional do professor de Matemática. *Acta Scientiae, 15*(1), 133-152.

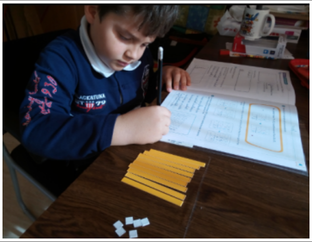
Stein, M.K., Engle, R.A.; Smith, M.S.; Hughes, E.K. (2008). Orchestrating Productive mathematical Discussions: five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340.

Stockero, S. L., & Van Zoest, L. R. (2013). Characterizing pivotal teaching moments in beginning mathematics teachers' practice. *Journal of Mathematics Teacher Educators, 16(2)*, 125–147.

Van Zoest, L., Stockero, Sh., Leatham, K., Peterson, B., Atanga, N. & Ochieng, M. (2017). Attributes of Instances of Student Mathematical Thinking that Are Worth Building on in Whole-Class Discussion. *Mathematical Thinking and Learning, 19(1)*, 33-54.

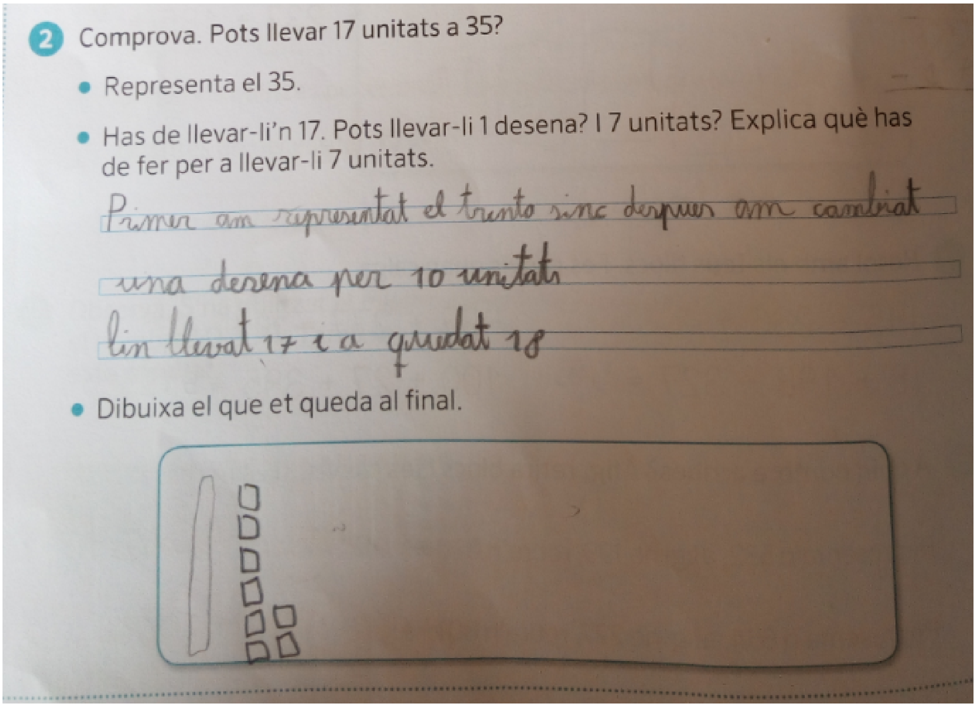
Van Es, E. & Sherin, M. (2002). Learning to Notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions.*Journal of Information Technology for Teacher Education, 10*(4), 571-596.

Apéndice- El caso de Mikel y el significado de los números de tres cifras

Mikel tiene 7 años y 7 meses. Está en 2º Educación primaria. Estamos en enero. Texto: *Taller de Matemàtiques Manipulatives. Matemàtiques 2º de Primaria.* Edt. SM-arrels	

Contexto: Mikel está en el tema de la resta llevando con números de dos cifras. Él usa bloques multibase en cartulina (los lleva en una bolsita a clase) para realizar las actividades. Representa los números con los bloques, dibuja los bloques en el cuaderno/libro y escribe los números –símbolos- que representan las cantidades que tiene con los bloques multibase.

Lo que sigue es una de las actividades que ha realizado en su libro unos días antes[3]:


2 Comprova. Pots llevar 17 unitats a 35?

- Representa el 35.
- Has de llevar-li'n 17. Pots llevar-li 1 desena? I 7 unitats? Explica què has de fer per a llevar-li 7 unitats.

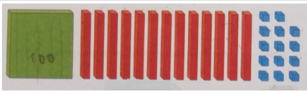
Primer am representat el trenta sinc despues am cambiat
una desena per 10 unitats
lin llevat 17 i a quedat 18

- Dibuixa el que et queda al final.

Unos días después se plantea la siguiente tarea.

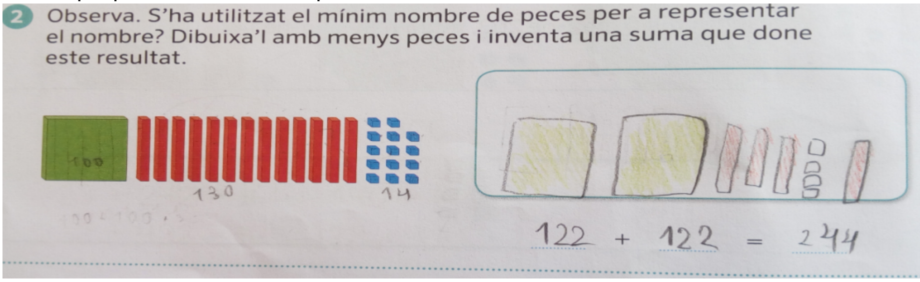
[1] El idioma del texto usado y las respuestas de Mikel es el valenciano, lengua vernácula del contexto de donde procede el registro de la práctica

La tarea

Observa, s'ha utilitzat el mínim nombre de peces per a representar el nombre? *Dibuixa'l amb menys peces i inventa una suma que done este resultat.*	

La respuesta de Mikel y la interacción con la maestra

Mikel proporciona como respuesta 122 +122



La maestra al ver la respuesta de Mikel, comprueba que está bien, pero le gustaría averiguar cómo está pensando y qué **comprensión tiene de los números de tres cifras y de la relación entre las diferentes unidades**. Para ello le pide a ver si puede darle otra solución

Maestra: *¿puedes encontrar otros números que sumados den 244?*

Mikel: *Sí.* [Piensa un momento, levanta una mano con sus dedos extendidos, y escribe]

113 + 131

Maestra: *¿Cómo lo sabes?*

Mikel: *Porque, tres y uno son cuatro* (señalando el 4 de las unidades). *Uno y tres son cuatro* (señalando el 4 de las decenas), *y uno y uno son dos* (señalando el dos de las centenas).

Maestra: *¿puedes encontrar otros números?*

Mikel: [Piensa un momento]. *Sí,* (y escribe)

121 + 123

Maestra: *Muy bien Mikel!*

Aunque Mikel ha resuelto bien las tres tareas, la maestra se da cuenta de que ella no tiene evidencias de la comprensión de Mikel de las relaciones entre las diferentes unidades en el número de tres cifras, y por tanto de su comprensión del número. Es decir, ella cree que la resolución correcta de la tarea del libro de texto y de las tareas adicionales que le había pedido, no le dan información sobre la comprensión de Mikel de los números de tres cifras que es el objetivo de la tarea. Por ello, le plantea la siguiente tarea

Maestra: *Bien Mikel, vamos a hacer otro problema igual. ¿Puedes encontrar dos números que sumados den 210?*

Mikel se pone a pensar un rato más largo que en las actividades anteriores. Aunque tiene los bloques multibase encima de la mesa, no los utiliza. Después de un rato escribe lo siguiente, pero dudando

15 + 15 = 210

Maestra: *¿cómo lo has hecho?*

Mikel: *Pues, ..., como cinco y cinco son diez (señalando al 10 del número), y uno y uno son dos (señalando al 2).*

[Mikel mira dudando lo que ha escrito]

Maestra: *¿Estás seguro?*

Mikel: *No.*

CUESTIONES

a) **Sobre la tarea. Características**

¿Qué elementos matemáticos deben usarse para resolver la actividad? Tras la respuesta de Mikel, la maestra le pide que encuentre la suma de otros dos números ¿qué pretendía conseguir la maestra? ¿Por qué finalmente le plantea una tarea similar pero cambiando el número a 210? ¿Cuál era el objetivo de esta nueva tarea?

b) **Sobre la comprensión de Mikel**

¿Qué elemento matemático debe mejorar en su comprensión? ¿Por qué la tarea del libro de texto no era suficiente para determinar la comprensión de Mikel de los números de tres cifras?

c)Sobre lo que hacer a continuación

¿Cómo ayudarías a Mikel? ¿Qué tarea (y qué números usarías) para ello?

Lo que sigue es una actividad que propone el libro de texto. Diseña una actividad anterior y una posterior a la dada que podrías utilizar para apoyar a Mikel en la comprensión de los números de tres cifras. Justifica tu decisión en función del elemento matemático que debe consolidar y los números que usas en las tareas.

Com lleves 4 unitats a una placa de 100? Comprova i explica pas a pas el procés seguit. Dibuixa el que queda al final.