P-247

EXPERIENCIA EDUCATIVA CON ALUMNOS DE BACHILLERATO EN PROGRAMAS DE EXCELENCIA: APRENDIZAJE BASADO EN PROYECTOS (ABP)

Sergio Peco – Miguel Adán – Rafael Ruiz y Elena Arroyo
sergio.peco89@gmail.com - madanoliver@gmail.com - rafaelruizpastor@gmail.com y elenaarroyoalug@gmail.com
Máster Prof. Secundaria, UCLM – Catedrático IES Sta Mª Alarcos (C. Real) – Alumnos IES Sta Mª Alarcos (C. Real), España

Núcleo temático: I Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos
Modalidad: P
Nivel educativo: Terciario o Bachillerato (16 a 18 años)
Palabras clave: ABP, Bachillerato de Excelencia, Educación Matemática

RESUMEN
El bachillerato de excelencia constituye una opción educativa dirigida a aquellos alumnos con mejor rendimiento académico e interesados en profundizar en áreas como las Matemáticas. Los alumnos cuentan con una hora semanal más de Matemáticas en la cual desarrollan actividades de profundización. Al mismo tiempo se comprometen a realizar un trabajo individual de cierta entidad. No se especifican contenidos, siendo habitual la extensión o profundización de los contenidos curriculares. En esta actividad, orientada según la metodología del aprendizaje basado en proyectos (ABP), se proponía al alumnado la elaboración de trabajos monográficos o de investigación en el que se muestren las conexiones de las matemáticas con diversos tópicos de la vida real de interés para los alumnos (arte, ciencia, deporte, internet, imagen, ciudad, manualidades…). Se puso especial interés en la participación del grupo en la selección, asignación, documentación y elaboración de los trabajos individuales siguiendo las claves de: interés para el alumno, riqueza formativa, significatividad, autonomía, cooperación, integración de competencias clave, investigación/innovación escolar, retroalimentación, evaluación y publicidad. Se explican las fases de la experiencia y algunos ejemplos realizados durante los cursos 2014/2016 en el IES Sta Mª Alarcos (C. Real) que reflejan los interesantes resultados que ofrecen este tipo de actividades.

INTRODUCCIÓN

El **bachillerato de excelencia** constituye una opción educativa dirigida a aquellos alumnos con mejor rendimiento académico e interesados en profundizar en algunas áreas, y entre ellas, la de Matemáticas.

Los alumnos matriculados en este programa cuentan con una hora semanal más de Matemáticas en la cual desarrollan actividades, cursos y seminarios de profundización en la materia. Al mismo

ISBN 978-84-945722-3-4

tiempo, los alumnos se comprometen a realizar un trabajo individual de cierta entidad sobre algún aspecto de las Matemáticas. En esta modalidad de bachillerato no se especifican contenidos concretos y la actividad queda abierta a la propuesta del profesor siendo lo más habitual la extensión o profundización de los contenidos curriculares del curso.

En el presente trabajo se recoge una actividad realizada por los alumnos del bachillerato de excelencia del IES Santa María de Alarcos (Ciudad Real) durante los cursos académicos 2014/2015 – 2015/2016 que refleja la riqueza y eficacia educativa que ofrecen este tipo de actividades para grupos de excelencia.

METODOLOGÍA: APRENDIZAJE BASADO EN PROYECTOS (ABP)

Como se ha mencionado, el acceso al bachillerato de excelencia supone el compromiso por parte del alumno de la elaboración de un trabajo individual en relación con las Matemáticas. Dicho trabajo lo desarrolla el alumno durante los dos cursos de bachillerato siguiendo la metodología del **Aprendizaje Basado en Proyectos**.

El aprendizaje basado en proyectos (ABP o PBL, Proyect-Based Learning) es una metodología que permite a los alumnos adquirir los conocimientos y competencias clave mediante la elaboración de proyectos en los que se dan respuestas a problemas de la vida real o se analiza un tema desde su propio punto de vista.

Se trata de un tipo de “aprendizaje activo” por el cual los **alumnos**, partiendo de una serie de cuestiones planteadas inicialmente, investigan, experimentan, buscan respuestas y llegan a conclusiones e ideas propias que les llevan a adquirir nuevos conocimientos.

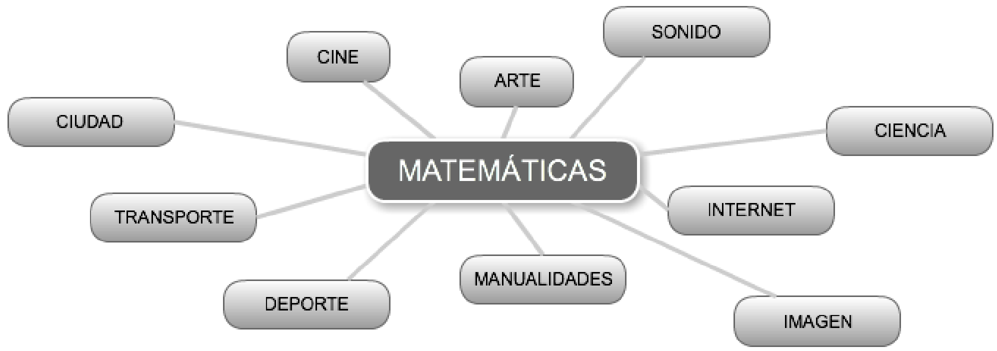
El **docente** actúa como mediador o guía y se encarga de resolver dificultades, controlar el ritmo de trabajo, facilitar el éxito del proyecto y evaluar el resultado. Mediante esta metodología, el aprendizaje de conocimientos tiene tanta importancia como la adquisición de habilidades y actitudes.

Como veremos en este trabajo, este tipo de enseñanza resulta más eficaz que la tradicional enseñanza directa caracterizada por un aprendizaje memorístico, de corta duración, reiterativo y acrítico.

DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD

ISBN 978-84-945722-3-4

Basándonos en la metodología del Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) se propone al alumnado la elaboración de trabajos monográficos o de investigación en los que se muestren las **conexiones de las matemáticas** con diversos tópicos de la vida real propuestos por el profesor.



Se puso especial interés en la participación del grupo en la selección, asignación, documentación y elaboración de los trabajos individuales atendiendo a los criterios de:

- **Interés para el alumno**. Es importante que el tema a desarrollar capte la atención del alumno, es decir, debe ser de su interés o acorde a sus aficiones.
- **Riqueza formativa**. Los trabajos deben ser ricos en contenidos curriculares.
- **Significatividad.** Debe tratarse de temas abarcadores, motivadores, que provoquen conexiones con anteriores aprendizajes y sobre todo cercano al entorno e intereses del alumno.
- **Autonomía**. Tienen que permitir algún grado de decisión a los alumnos y que les permita trabajar independientemente. Los alumnos son los que deben organizar su tiempo y reclamar la ayuda del profesor cuando la necesiten.
- **Cooperación**. Es importante fomentar el trabajo cooperativo en el grupo mediante debates, lluvias de ideas, intercambio de información…
- **Integración de competencias clave**. Los proyectos deben dar a los alumnos la posibilidad de practicar y aprender las competencias clave: expresión del pensamiento crítico, comunicación efectiva, uso de tecnologías…
- **Retroalimentación.** Deben ser trabajos que faciliten un continuo feedback o intercambio de información entre el docente y el alumno, lo cual requiere un cierto conocimiento del tema a tratar por parte del docente. Gracias a esta retroalimentación el profesor conoce en todo momento el avance del alumno, el cual es consciente de los aspectos destacables de su trabajo y aquellos en los que debe mejorar.

ISBN 978-84-945722-3-4

- **Investigación / Innovación escolar.** Los trabajos no deben limitarse exclusivamente a una recopilación de información, sino que deben partir de una investigación inicial y terminar aportando bien algo original o bien revisarlas desde su propio punto de vista.
- **Evaluación.** El proyecto incluirá un proceso de evaluación y reflexión sobre lo aprendido a lo largo del mismo, no solo al final. Esta evaluación continua permite detectar las posibles dificultades que pueden encontrar los estudiantes durante el desarrollo del proyecto y llevar a cabo planes de mejora para resolverlas.
- **Publicidad**. Es importante que el producto final del proyecto se comparta con una audiencia (profesores, compañeros y resto de la comunidad educativa). El hecho de proporcionar una audiencia al alumno para presentar su trabajo genera motivación y permite desarrollar sus habilidades orales en la argumentación del trabajo**.**

FASES

A continuación se enumeran las fases llevadas a cabo durante la experiencia, desde la propuesta inicial de tópicos hasta la entrega final de cada uno de los trabajos.

- **Fase 1: Lluvia de ideas/cuestiones de interés a investigar en cada uno de los tópicos propuestos.**

  El grupo, coordinado por el profesor, genera ideas libremente sobre cada uno de los tópicos propuestos con el fin de recopilar todas aquellas cuestiones y sugerencias más relevantes que permitan enfocar los trabajos.

  En esta fase el profesor debe promover la aparición de cuestiones que creen interés y curiosidad en los alumnos.
- **Fase 2: Asignación de un tópico a cada uno de los alumnos.**

  De entre los tópicos propuestos inicialmente por el profesor, se asigna uno diferente a cada alumno.
- **Fase 3: Selección por parte de cada alumno de unas pocas cuestiones de entre las anteriores propuestas que serán objeto de estudio.**
- **Fase 4: Búsqueda de información sobre las cuestiones a estudiar.**

  Individualmente, cada alumno realizará una primera búsqueda de información sobre las cuestiones seleccionadas de entre las planteadas inicialmente por el grupo en relación con su tópico de estudio. Esta primera búsqueda permitirá a los alumnos conocer lo que otros han hecho sobre sus posibles temas de estudio e identificar nuevas cuestiones e ideas a

ISBN 978-84-945722-3-4

desarrollar. En definitiva, permitirá al alumno definir con claridad las cuestiones que quiere desarrollar y la manera cómo realizará su estudio.

- **Fase 5: Propuesta definitiva de tema de estudio para cada alumno.**
- **Fase 6: Desarrollo de trabajo individual.**
  De manera individual, cada estudiante desarrolla su trabajo durante los dos cursos de bachillerato. Dicho trabajo se va realizando bajo la guía y asesoramiento del profesor-tutor que se encarga de ir supervisando borradores, planes, comprobando fuentes utilizadas por los alumnos…
- **Fase 7: Propuestas intermedias y realimentación (feedback).**
  Los estudiantes van proporcionando propuestas intermedias al profesor, el cual informa al alumno de aquellos aspectos que deben ser revisados o susceptibles de mejorar y le proporciona sugerencias enfocadas a enriquecer el trabajo.
- **Fase 8: Defensa oral y puesta en común de los trabajos finales.**
  Finalmente, además de presentar por escrito sus trabajos, los alumnos exponen los resultados del proyecto al resto de compañeros en clase y se hace una posterior difusión de algunos trabajos entre la comunidad educativa (exposición de carteles en el centro).

Como podemos observar partimos de cuestiones muy generales y se sigue un proceso de refinamiento para determinar el trabajo concreto de cada alumno. Una vez asignados los trabajos, se profundiza hasta el nivel de detalle que el alumno desea.

3. EJEMPLOS

A continuación se recoge un resumen de dos proyectos elaborados por alumnos del bachillerato de excelencia del IES Santa María de Alarcos (C.Real) durante los cursos académicos 2014/2015 – 2015/2016.

3.1. CURVAS CONCOIDES EN LA FLORA DE CIUDAD REAL

En este trabajo realizado por **Rafael Ruiz Pastor** se estudia la ecuación polar de la curva que se ajusta a la geometría de diversas flores existentes en la provincia de Ciudad Real (Castilla La Mancha). Dicha curva recibe el nombre de **concoide**.

Las concoides de rosetón o rosáceas tienen como fórmula polar general:

$$r(t) = r_0\left[1 + a \cdot \cos\left(\frac{k \cdot t}{q} + t_0\right)\right], \qquad 0 \leq t_0 \leq 2\pi$$

ISBN 978-84-945722-3-4

En este estudio se presentan conjuntos de valores de los parámetros $\{r_0, a, k, q, t_0\}$ que permiten modelar geométricamente las flores. Para ello se ha empleado el software GeoGebra.
Además, el trabajo recoge fotografías de las flores, localización y descripción de las características de la planta.
En el Anexo I del presente documento se recoge el ajuste de algunas de las flores.

3.2. EL INFINITO EN MATEMÁTICAS

En este trabajo realizado por **Elena Arroyo Álvarez-Ugena** se recoge una reflexión acerca del infinito en matemáticas.
El trabajo, además de incluir una descripción del origen y significado del infinito, incorpora una serie de situaciones, paradojas y un estudio inicial de la aritmética transfinita. Además, el estudio se complementa con una serie de construcciones elaboradas con el software GeoGebra que simulan algunas características estudiadas.
En el Anexo II del presente documento se describen algunas de estas situaciones y paradojas.

CONCLUSIONES

Con el desarrollo de esta actividad hemos sido testigos de las ventajas que supone la realización de este tipo de actividades con alumnos de excelencia. Algunas de las conclusiones extraídas de la misma son:

- Los alumnos adquieren **nuevos conocimientos,** tanto de los trabajos realizados por cada alumno como de los realizados por el resto de compañeros. En concreto en este caso sobre aplicaciones de las matemáticas en la vida real.
- Estas actividades **contribuyen al desarrollo de las competencias básicas**. Los estudiantes tienen la oportunidad de tomar decisiones (autonomía e iniciativa personal), usar las TIC de manera autónoma, crítica y creativa (competencia digital y tratamiento de la información) y debatir y poner en común sus trabajos (competencia social y ciudadana).
- Al no imponer restricciones, estos trabajos permiten a estos alumnos más avanzados **desarrollar plenamente sus capacidades**.
- El alumnado no se limita exclusivamente a buscar información, sino que la analiza, la critica y **pone en práctica los conocimientos adquiridos**.
- Nos permite iniciar a los alumnos participantes en el proceso **de elaboración de trabajos monográficos y de investigación**, muy habituales en el ámbito universitario.

ISBN 978-84-945722-3-4

VIII CIBEM Congreso Iberoamericano de Educación Matemática — Madrid 2017

EXPERIENCIA EDUCATIVA CON ALUMNOS DE BACHILLERATO EN PROGRAMAS DE EXCELENCIA: APRENDIZAJE BASADO EN PROYECTOS (ABP)

Sergio Peco - Miguel Adán- Rafael Ruiz y Elena Arroyo
sergio.peco89@gmail.com - madanoliver@gmail.com - rafaelruizpastor@gmail.com y elenaarroyoalug@gmail.com
Máster Prof. Secundaria, UCLM - Catedrático IES Sta Mª Alarcos (C.Real) - Alumnos IES Sta Mª Alarcos (C.Real), España

introducción

El **Bachillerato de excelencia** constituye una opción educativa dirigida a aquellos alumnos con mejor rendimiento académico e interesados en profundizar en algunas áreas, y entre ellas, la de Matemáticas. Los alumnos matriculados en este programa cuentan con una hora semanal más de Matemáticas en la cual desarrollan actividades, cursos y seminarios de profundización en la materia. Al mismo tiempo, los alumnos se comprometen a realizar un trabajo individual de cierta entidad sobre algún aspecto de las Matemáticas. No se especifican contenidos concretos y la actividad queda abierta a la propuesta del profesor siendo lo más habitual la extensión o profundización de los contenidos curriculares del curso.

En esta actividad, realizada por los alumnos del IES Santa Maria de Alarcos (Ciudad Real) durante los cursos 2014/15-2015/16 y orientada según la metodología del **aprendizaje basado en proyectos (ABP)**, se proponía al alumnado la elaboración individual de trabajos monográficos o de investigación en el que se muestren las conexiones de las matemáticas con diversos tópicos de la vida real que puedan resultar de interés para los alumnos (arte, ciencia, deporte, internet, imagen, ciudad, manualidades...).

Se puso especial interés en la participación del grupo en la selección, asignación, documentación y elaboración de los trabajos individuales siguiendo las claves de:

- **Interés para el alumno**
- **Riqueza formativa**
- **Significatividad**
- **Autonomía**
- **Cooperación**
- **Integración de competencias clave**
- **Retroalimentación**
- **Investigación/innovación escolar**
- **Evaluación**
- **Publicidad**

De esta forma, con este trabajo se pretende reflejar la riqueza que ofrecen este tipo de actividades para grupos de excelencia.

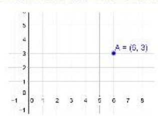
fases

- fase 1 — Lluvia de ideas/cuestiones de interés a investigar en cada uno de los tópicos propuestos.
- fase 2 — Asignación de un tópico a cada uno de los alumnos.
- fase 3 — Selección por parte de cada alumno de unas pocas cuestiones de entre las anteriores propuestas que serán objeto de estudio.
- fase 4 — Búsqueda de información sobre las cuestiones a estudiar.
- fase 5 — Propuesta definitiva de tema de estudio para cada alumno.
- fase 6 — Desarrollo de trabajo individual.
- fase 7 — Propuestas intermedias y realimentación (feedback)
- fase 8 — Defensa oral y puesta en común de los trabajos finales.

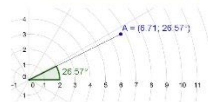
curvas concoides en la flora de Ciudad Real

En este trabajo realizado por **Rafael Ruiz Pastor** se estudia la ecuación polar de la curva que se ajusta a la geometría de diversas flores existentes en la provincia de Ciudad Real.
Cada punto de la curva (denominada concoide) queda determinado por un valor de *t* (ángulo entre el semieje positivo de abscisas y el vector de posición del punto) y un valor de *r* (distancia entre el punto y el origen de coordenadas).

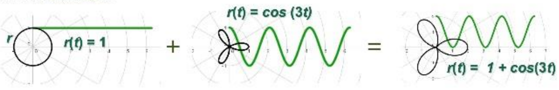
COORDENADAS CARTESIANAS



COORDENADAS POLARES



De la suma de las dos curvas siguientes, expresadas mediante su ecuación polar, obtenemos curvas llamadas **concoides**.



Las concoides de rosetón o rosáceas tienen como fórmula polar general:

$$r(t) = r_0\left[1 + a\cdot\cos\left(\frac{k\cdot t}{q} + t_0\right)\right], \qquad 0 \le t_0 \le 2\pi$$

En este estudio se presentan conjuntos de valores de los parámetros $\{r_0, a, k, q, t_0\}$ que permiten modelar geométricamente las flores. Para ello se ha empleado el software GeoGebra.
Además, el trabajo recoge fotografías de las flores, localización y descripción de las características de la planta.

Esparraguera de monte (Asparagus acutifolius)

$$r(t) = 0.22\left[1 + 0.54\cdot\cos\left(\frac{6}{1}\cdot t + 6\right)\right]$$

Almendro (Prunus dulcis)

$$r(t) = 1.91\left[1 + 1\cdot\cos\left(\frac{5}{2}\cdot t + 1.7\right)\right]$$

Granado (Punica granatum)

$$r(t) = 1.62\left[1 + 0.4\cdot\cos\left(\frac{36}{5}\cdot t + 1.4\right)\right]$$

Labiérnago o lentisco (Phillyrea angustifolia)

$$r(t) = 0.8\left[1 + 1.04\cdot\cos\left(\frac{4}{3}\cdot t + 2.8\right)\right]$$

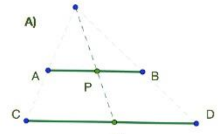
el infinito en matemáticas

En este trabajo realizado por **Elena Arroyo Álvarez-Ugena** se recoge una reflexión acerca del **infinito** en matemáticas.
El trabajo, además de incluir una descripción del origen y significado del infinito, incorpora una serie de situaciones, paradojas y un estudio inicial de la aritmética transfinita. Además, el estudio se complementa con una serie de construcciones elaboradas con el software GeoGebra que simulan algunas características.
A continuación se describen algunas de estas situaciones y paradojas:

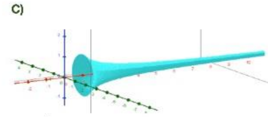
A) **CARDINAL DE DOS SEGMENTOS: Dos segmentos cualesquiera tienen el mismo cardinal**. Para comprobarlo, basta con establecer una homotecia entre los segmentos AB y CD, como se indica en la figura A.
Como se puede observar en dicha figura, a cada punto del segmento AB le corresponde un punto del segmento CD y viceversa.

B) **CARDINAL DE UN CUADRADO / CUBO Y UNO DE SUS LADOS:** Podemos establecer una biyección entre los puntos de un cuadrado de lado 1 y uno de sus lados como se indica a continuación. Para ello, se elige un punto P cualquiera del cuadrado y le hacemos corresponder el punto P' del lado rojo del siguiente modo: su primera coordenada tendría 0 por parte entera y la parte decimal resultaría de tomar alternativamente los decimales de la primera y la segunda coordenada de P, siendo su segunda coordenada 0.
Por tanto, se deduce que **cualquier cuadrado tiene el mismo cardinal que un segmento cualquiera.**
La misma biyección se puede establecer entre los puntos de un cubo de lado 1 y uno de sus lados.

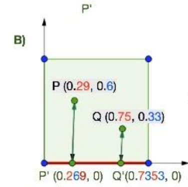
A)

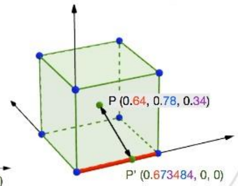


C)



B)





bibliografía

VALORACIÓN FINAL

El presente trabajo ha sido desarrollado por **Sergio Peco Parente**, profesor en prácticas en el IES Santa María de Alarcos (Ciudad Real) durante el curso 2015/2016 dentro del Máster Universitario en Profesor de ESO y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas (UCLM) y **Miguel Adán Oliver**, catedrático de Matemáticas en Educación Secundaria del IES Santa María de Alarcos. Además se ha contado con la colaboración de los alumnos del bachillerato de excelencia **Rafael Ruiz Pastor** y **Elena Arroyo Álvarez-Ugena**.

Para finalizar, se recoge una **valoración final** del presente trabajo realizada por uno de los alumnos mencionados anteriormente y participante en la experiencia educativa descrita en el presente documento:

"Este trabajo me ha gustado mucho, porque me parece que refleja lo que hicimos en las clases de excelencia y cómo se aprovecharon en Matemáticas. Además, creo que las descripción y las fases que se exponen se corresponden con la manera de trabajar que teníamos, y me parece que es una buena manera de presentar el programa de excelencia y de mostrar sus posibilidades"

(Rafael Ruiz Pastor)

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Larmer, J. & Mergendoller, J.R. (2010). The main course, not dessert, how are students reaching 21st century goals?. Novato, CA: Buck Institute for Education (BIE). Recuperado de http://www.bie.org/images/uploads/useful_stuff/Main_Course.pdf

Trujillo, F. (2016). Aprendizaje Basado en Proyectos. Infantil, Primaria y Secundaria. Madrid: Secretaría General Técnica del Ministerio de Educación

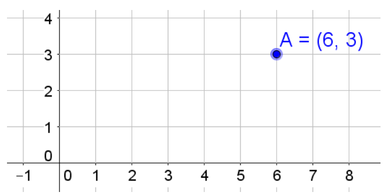
ISBN 978-84-945722-3-4

ANEXO I: CURVAS CONCOIDES EN LA FLORA DE CIUDAD REAL

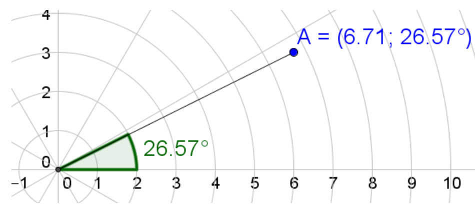
Alumno: Rafael Ruiz Pastor

FÓRMULA POLAR GENERAL DE LA CONCOIDE

Cada punto de la curva queda determinado por un valor de t (ángulo entre el semieje positivo de abscisas y el vector de posición del punto) y un valor de r (distancia entre el punto y el origen de coordenadas).

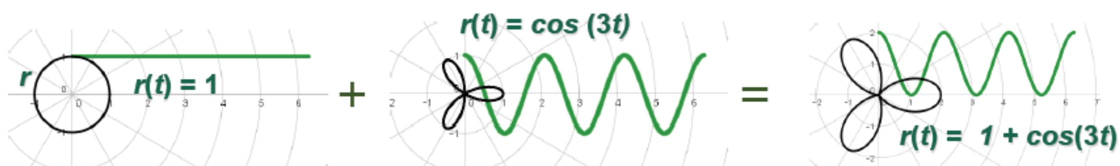


Coordenadas Cartesianas



Coordenadas Polares

De la suma de las dos curvas siguientes, expresadas mediante su ecuación polar, obtenemos curvas llamadas **concoides**.



Las concoides de rosetón o rosáceas tienen como fórmula polar general:

$$r(t) = r_0\left[1 + a \cdot \cos\left(\frac{k \cdot t}{q} + t_0\right)\right], \qquad 0 \leq t_0 \leq 2\pi$$

Parámetros para ajustar las flores:

- r_0 y a: Los valores de estas variables se relacionan con la forma que adquiere la curva en cuanto a lo abierto o cerrado de los bucles, al tamaño en general de la gráfica y en cuanto a la presencia o no de una fila de pétalos internos y a la existencia o no de un punto de corte en la misma posición del centro de la curva.

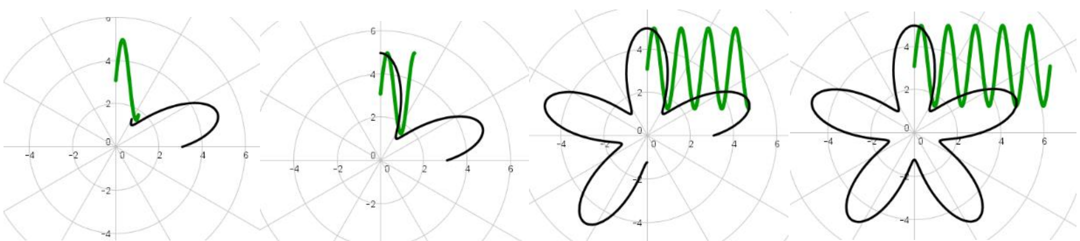
VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

- k y q: La relación entre estas dos variables se refiere a la forma y distribución de los pétalos. El valor que toma k determina el número de pétalos mayores que describe la curva; mientras que el de q determina la mitad del número de puntos de corte que tiene un pétalo grande con otros pétalos mayores mas uno, sin entrar en este número de intersecciones con pétalos menores e incluyéndose intersecciones con el mismo pétalo que tomamos como referencia.
- t_0: Esta variable se corresponde con el ángulo que se rota la gráfica desde una posición inicial.

EJEMPLO AJUSTE DE LA FLOR DEL HINOJO

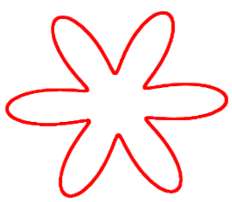
$$r(t) = 3.14\left[1 + 0.63 \cdot \cos\left(\frac{5}{1} \cdot t + 4.71\right)\right]$$

En negro se muestra la representación polar (r, t) y en verde la representación cartesiana con los ejes $X = t, Y = r$).



$t = 60°$ $t = 90°$ $t = 270°$ $t = 360°$

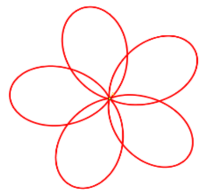
ESPARRAGUERA DE MONTE (ASPARAGUS ACUTIFOLIUS)



$$r(t) = 0.22\left[1 + 0.54 \cdot \cos\left(\frac{6}{1} \cdot t + 6\right)\right]$$

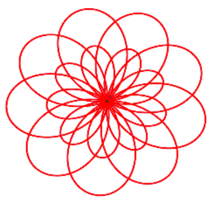
ISBN 978-84-945722-3-4

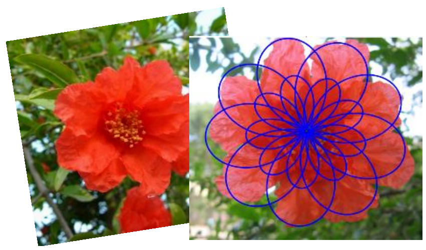
ALMENDRO (PRUNUS DULCIS)



$$r(t) = 1.91\left[1 + 1 \cdot \cos\left(\frac{5}{2} \cdot t + 1.7\right)\right]$$

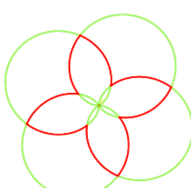
GRANADO (PUNICA GRANATUM)





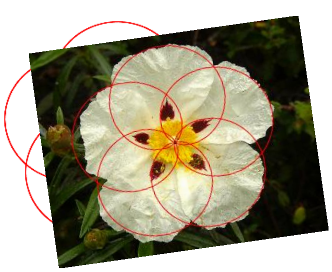
$$r(t) = 1.92\left[1 + 4 \cdot \cos\left(\frac{9}{5} \cdot t + 3\right)\right]$$

LABIÉRNAGO O LENTISCO (PHILLYREA ANGUSTIFOLIA)



$$r(t) = 0.8\left[1 + 1.04 \cdot \cos\left(\frac{4}{3} \cdot t + 2.8\right)\right]$$

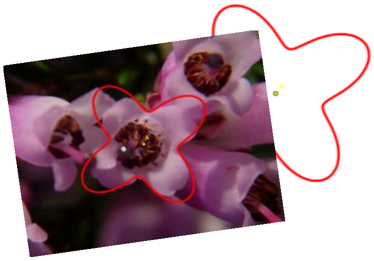
JARA (CISTUS LADANIFER)



ISBN 978-84-945722-3-4

$$r(t) = 1\left[1 + 1.12 \cdot \cos\left(\frac{5}{4} \cdot t + 2.7\right)\right]$$

TOMILLO (ERICA AUSTRALIS)



$$r(t) = 0.79\left[1 + 0.36 \cdot \cos\left(\frac{4}{1} \cdot t + 4.24\right)\right]$$

JAZMÍN SILVESTRE (JASMINUM FRUTICANS)

$$r(t) = 1.36\left[1 + 0.96 \cdot \cos\left(\frac{13}{4} \cdot t + 0.63\right)\right]$$

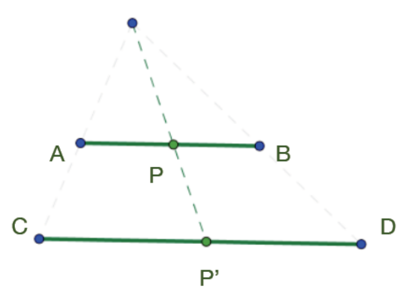
ANEXO II: EL INFINITO EN MATEMÁTICAS

Alumna: Elena Arroyo Álvarez-Ugena

CARDINAL DE DOS SEGMENTOS

Dos segmentos cualesquiera tienen el mismo cardinal. Para comprobarlo, basta con establecer una homotecia entre los segmentos AB y CD.

Como se puede observar, a cada punto del segmento AB le corresponde un punto del segmento CD y viceversa.

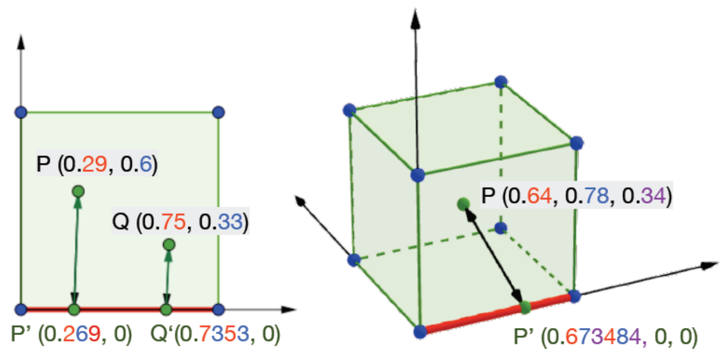


ISBN 978-84-945722-3-4

CARDINAL DE UN CUADRADO / CUBO Y UNO DE SUS LADOS

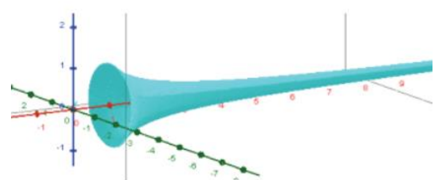
Podemos establecer una biyección entre los puntos de un cuadrado de lado 1 y uno de sus lados como se indica a continuación. Para ello, se elige un punto P cualesquiera del cuadrado y le hacemos corresponder el punto P' del lado rojo del siguiente modo: su primera coordenada tendría 0 por parte entera y la parte decimal resultaría de tomar alternativamente los decimales de la primera y la segunda coordenada de P, siendo su segunda coordenada 0. Por tanto, se deduce que cualquier cuadrado tiene el mismo cardinal que un segmento cualquiera.

La misma biyección se puede establecer entre los puntos de un cubo de lado 1 y uno de sus lados.



PARADOJA DE LA TROMPETA DE GABRIEL

La trompeta del ángel Gabriel o la trompeta de Torricelli es una superficie en forma de embudo (o de trompeta). Empieza ancha y se estrecha rápidamente, pero nunca se cierra; es decir, tiene una altura de longitud infinita. La superficie de la trompeta es infinita, pero el volumen que envuelve no (de ahí surge la paradoja).



ISBN 978-84-945722-3-4