P-1.319

CÁLCULO DIFERENCIAL NO ENSINO MÉDIO:
Uma abordagem possível e interdisciplinar com auxílio da tecnologia

Morgana Petry – Alice Francisca Keiber – Juliana Fassbinder – Prof. Orientador Dr. Rodrigo Orsini Braga
mor.petry@hotmail.com – alicekeiber_sl@yahoo.com.br – julianafassbinder@hotmail.com – rodrigo.orsini.braga@gmail.com
Universidade do Vale do Rio dos Sinos – UNISINOS – Brasil

Núcleo temático: Recursos para o ensino e aprendizagem da Matemática
Modalidade: Pôster (P)
Nível educativo: Ensino Superior ou Ensino Médio
Palavras-chave: Cálculo Diferencial. Geogebra. Interdisciplinaridade.

Resumo

Este artigo tem como objetivo analisar a possibilidade de ensinar no Ensino Médio noções intuitivas de Cálculo Diferencial, mediante o estudo de taxa de variação de uma função, mais particularmente em seus intercruzamentos com a Física e por meio do software GeoGebra. A partir da aplicação de uma oficina realizada com 10 alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola estadual de Estância Velha (RS - Brasil), foram propostas atividades desenvolvidas por meio de quatro sequências didáticas e realizadas em quatro encontros presenciais. As três primeiras sequências didáticas embasaram os assuntos de função afim, função quadrática e limites de funções, respectivamente, e fundamentaram o estudo da derivada, foco central do último encontro e de análise deste trabalho. O estudo, de cunho qualitativo e motivado por uma experimentação com pesquisa documental, evidenciou que é possível inserir na Educação Básica noções de derivada, mas sem dar ênfase às nomenclaturas mais específicas e formais abordadas no Ensino Superior. Portanto, se interpretado de forma mais dinâmica, visual e experimental, como taxa de variação instantânea e como inclinação da reta tangente, o Cálculo Diferencial pode oportunizar aos alunos do Ensino Médio um contato significativo com conceitos que são tão importantes na Matemática.

1 Palavras Introdutórias

Falar em aprendizagem não é uma tarefa simples. Porém, “[...] o desafio maior da educação é articular, de forma interdisciplinar, os conteúdos das mais diversas disciplinas com o uso correto e pedagógico das tecnologias na sala de aula” (Sieben, 2015, p. 86).

Com base nessa perspectiva, propomos e buscamos, neste trabalho, analisar a possibilidade de inserir no Ensino Médio noções intuitivas de Cálculo Diferencial mediante atividades de visualização e experimentação, utilizando o *software* GeoGebra e acompanhadas, de forma interdisciplinar, por aplicações de Física.

ISBN 978-84-945722-3-4

2 O Cálculo Diferencial no Ensino Médio?

"Eu prefiro ser essa
Metamorfose ambulante
Do que ter aquela velha opinião formada sobre tudo".
Raul Seixas

Quando falamos em Cálculo Diferencial, ele está muito relacionado ao Ensino Superior e dificilmente é atrelado ao Ensino Básico. Segundo Ávila (2006), apesar de alguns livros do Ensino Médio incluírem limites e derivadas entre os tópicos tratados, esses assuntos são pouco ensinados, muitas vezes, sob o pretexto de que são muito difíceis.

Ao considerar-se o ensino do Cálculo com toda a sua linguagem formal, simbólica, seus teoremas, definições, demonstrações e rigor, os estudantes nessa fase talvez não tenham conhecimentos específicos para esses conteúdos (Molon, 2013). Porém, se considerado a partir de um enfoque intuitivo, é algo que pode estar ao alcance dos alunos nesse nível de escolaridade.

Talvez muitos não saibam, mas o Cálculo já fazia parte do programa da 3ª série do chamado curso científico. Porém, com o movimento denominado Matemática Moderna, o Cálculo, não foi incluído no novo sistema que criou o 2º grau. Isso porque os reformistas valorizavam mais outros tópicos e também porque não haveria espaço e tempo para tanta coisa a ser introduzida nos programas, devido ao rigor e estudo detalhado que o Cálculo exigia (Ávila, 1991).

Entretanto, parece ironia que os reformistas tenham descartado o Cálculo. Cometeram o "[...] erro de recusar a pedra angular, aquela que seria a mais importante na construção do edifício" (Ávila, 1991, p. 3). Ávila (2006) acrescenta que descartar o Cálculo "[...] no ensino é grave, porque deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual [...]" (p. 3).

Dessa maneira, não se trata de encontrar espaço no currículo de Matemática do Ensino Médio; o que é necessário é reorganizar o tempo e a forma como alguns conceitos e assuntos são apresentados.

3 Cálculo Diferencial: Uma Possibilidade por meio do *software* GeoGebra e da Física

"*[...] Ninguém caminha sem aprender a caminhar, sem aprender a fazer o caminho caminhando, refazendo e retocando o sonho pelo qual se pôs a caminhar [...] (Freire, 1997, p. 79).*

De acordo com a frase de Freire apresentada acima, cada indivíduo deve ter a oportunidade de *"aprender a fazer o caminho caminhando".* Nesse sentido, a proposta de pesquisa deste trabalho

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

tem como objetivo oportunizar aos alunos do Ensino Médio noções de Cálculo Diferencial, voltando-se mais para a visualização e formalização de conjecturas e menos para o seu formalismo e rigor.

Ávila (2006) atrela seu estudo a aplicações e afirma que a introdução da derivada deve ser considerada sob esse ponto de vista, como a Cinemática, por exemplo, permitindo “[...] uma saudável interação com o estudo do movimento que se faz em Física. Portanto, é um modo de promover a interdisciplinaridade, tão desejada no ensino [...]” (p. 1).

Diante desses apontamentos, podemos considerar a ideia de abordar noções de Cálculo no Ensino Médio a partir de uma abordagem interdisciplinar com a Física e aliada a um recurso tecnológico, o que pode proporcionar que os alunos façam interpretações e conexões segundo os conceitos estudados, estabeleçam relações e façam conjecturas a partir das construções realizadas.

4 Metodologia

O tema central da ação investigativa foi explorado por meio de pesquisa qualitativa, fundamentada em uma experimentação com pesquisa documental, realizada a partir das percepções e registros de 10 alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola estadual de Estância Velha (RS - Brasil), diante do desenvolvimento de atividades exploratórias propostas em uma oficina.

A oficina abordou atividades envolvendo o estudo de função afim e função quadrática, ideias intuitivas de limites de uma função e taxa de variação média e instantânea de uma função, exploradas em seus intercruzamentos com a Física e por meio de um recurso computacional, o *software* GeoGebra.

Os alunos inscritos formaram uma turma experimental, que se reuniu durante quatro encontros presenciais, em junho de 2016, com duração de quatro horas cada.

As três primeiras sequências basearam-se em atividades envolvendo o estudo de função afim, função quadrática e limites de funções, respectivamente, e embasaram o estudo de noções intuitivas da derivada, foco central do quarto encontro e de análise deste trabalho.

5 Análise e discussão dos resultados

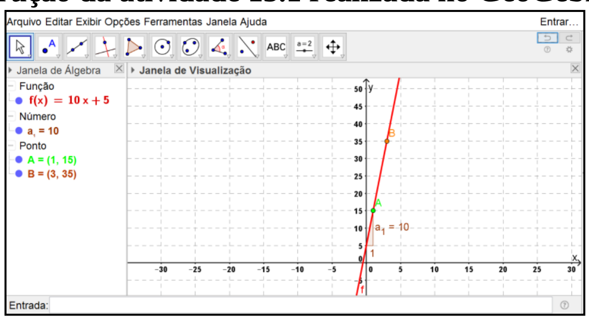
Como a finalidade principal deste trabalho é analisar a possibilidade de inserir no Ensino Médio noções de Cálculo Diferencial, demos destaque ao encontro 4, fazendo referência a algumas

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

atividades e enfatizando o que se esperava delas, as considerações e as dificuldades apresentadas pelos alunos durante a aplicação da proposta.

Considerando a atividade 13.1, descrita pelo deslocamento de um ciclista em função do tempo gasto para percorrer certo trajeto, tendo-se por finalidade relacionar o conceito de velocidade média com a inclinação da reta secante que passa pelos extremos de um intervalo, ao analisarmos as respostas dos alunos, percebemos que eles verificaram que a velocidade média, calculada a partir da fórmula $V_m = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$, corresponde ao coeficiente angular da reta secante no intervalo [1,3], que pôde ser interpretada geometricamente a partir da representação gráfica da função $f(x) = 10x + 5$, realizada no *software* (Figura 1).

Figura 1 – Construção da atividade 13.1 realizada no GeoGebra pelo aluno A_{10}



Fonte: Elaborada no GeoGebra pelo aluno A_{10}.

A atividade 14 tinha como finalidade aproximar o cálculo da velocidade instantânea por meio do cálculo de velocidades médias para intervalos cada vez menores. Para isso, o estudo iniciou com uma situação que tinha como propósito encontrar a velocidade média de um veículo popular ao fim de um teste de resistência em certos intervalos de tempo, cuja trajetória foi modelada pela função $f(t) = 3t^2 - 5t + 2$. Na atividade 14.1(a), os alunos conseguiram calcular corretamente a velocidade média do veículo no intervalo de tempo [2,3], utilizando a fórmula $V_m = \frac{\Delta_y}{\Delta_t}$ e aplicando o que já haviam estudado nas atividades anteriores. Na situação 14.1(b), eles precisaram determinar a velocidade média em intervalos de tempo cada vez menores, a fim de aproximar a velocidade média da velocidade instantânea do veículo em $t = 2$.

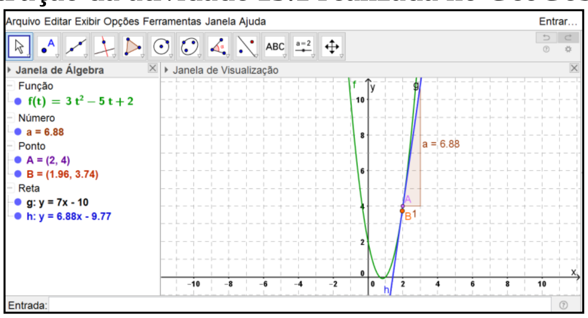
A partir dos resultados preenchidos na tabela presente na atividade, os estudantes perceberam que os valores da velocidade média V_m do veículo se aproximaram cada vez mais de 7 m/s, à medida que os intervalos de tempo apresentaram duração cada vez menor, ou seja, os valores de Δ_t tenderam a 0. Assim, compreenderam intuitivamente que, quanto menor o intervalo de tempo

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

considerado, mais próxima a velocidade média fica da velocidade instantânea. Dessa forma, a introdução da notação adequada e mais formal, ou seja, $\lim_{\Delta_t \to 0} V_m = \lim_{\Delta_t \to 0} \frac{\Delta_y}{\Delta_t} = 7$, pôde ser apresentada aos alunos a partir de uma ideia intuitiva realizada por aproximações.

Após a interpretação da taxa de variação instantânea, o objetivo foi verificar que, à medida que o intervalo Δ_t diminui tendendo a zero, os pontos que definem a reta secante se aproximam cada vez mais um do outro, de forma que a reta tenda a tangenciar a representação gráfica da função $f(t)$. Para perceber isso, propomos, na atividade 15.1, uma construção no GeoGebra (Figura 2), tomando como base a situação-problema da atividade anterior.

Figura 2 – Construção da atividade 15.1 realizada no GeoGebra pelo aluno A_1



Fonte: Elaborada no GeoGebra pelo aluno A_1.

Nessa construção, a intenção estava voltada a movimentar o ponto B, aproximando-o do ponto A. Analisando as considerações da turma, verificamos que a maioria dos alunos percebeu que, quanto mais o ponto B se aproximava do ponto A, o intervalo de tempo Δ_t se aproximava cada vez mais de zero.

Além disso, o grupo percebeu também, ao ser questionado na situação 15.1(i), que aproximando o ponto B o máximo possível do ponto A, os valores do coeficiente angular a, se aproximaram cada vez mais de 7.

A partir da interpretação geométrica realizada no GeoGebra, os alunos perceberam também que, para uma função $f(x)$ qualquer, o valor da taxa de variação instantânea de $f(x)$ em relação a x em um ponto qualquer de seu domínio corresponde ao coeficiente angular da reta $y = ax + b$, tangente ao gráfico da função $f(x)$ nesse ponto.

Dessa forma, podemos concluir que o estudo da derivada pode ser apresentado aos alunos do Ensino Médio mediante uma interpretação mais intuitiva e visual, permitindo compreender seu significado como taxa de variação instantânea e como declividade da reta tangente.

Segundo os apontamentos dos alunos, as aprendizagens produzidas durante o último encontro possibilitaram um contato com uma Matemática em que a visualização e experimentação foram fundamentais para a elaboração de conjecturas.

Borba, Silva e Gadanidis (2015) afirmam que mídias como o GeoGebra, que exploram aspectos virtuais, “[...] participam de um coletivo que produz conhecimento, a partir das possibilidades de que experimentações sejam feitas com feedback visual quase instantâneo” (p. 54).

6 Considerações finais

“A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original” (Einstein apud Molon, 2013).

Quando problematizamos a possibilidade de ensinar noções de Cálculo Diferencial no Ensino Médio, direcionamos tal estudo com um enfoque intuitivo, visual e experimental, embasando-nos no uso do GeoGebra e de aplicações da Física, a fim de tornar esse estudo uma experiência significativa.

As situações apresentadas no último encontro favoreceram a compreensão do conceito intuitivo da derivada de uma função em um ponto mediante a interpretação de reta tangente ao gráfico de uma função e a análise da declividade ou coeficiente angular dessa reta. O entendimento do conceito de velocidade instantânea, interpretada a partir do cálculo de velocidades médias em intervalos cada vez menores, oportunizou os alunos compreender a derivada por meio de uma aplicação que é comumente estudada na disciplina de Física.

Diante dessas considerações e a partir dos registros e construções realizadas no GeoGebra, podemos concluir que é possível ensinar noções de Cálculo Diferencial no Ensino Médio, desde que contextualizadas de acordo com o nível de escolaridade dos alunos. Conforme a frase de Einsten apresentada no início deste capítulo, proporcionamos aos alunos abrir a mente a novas ideias e a novas concepções, o que é, para nós, educadores, um passo relevante para uma aprendizagem significativa.

ISBN 978-84-945722-3-4

VIII CIBEM CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
Madrid 2017

CÁLCULO DIFERENCIAL NO ENSINO MÉDIO:
Uma abordagem possível e interdisciplinar com auxílio da tecnologia

Morgana Petry[1] – mor.petry@hotmail.com
Alice Francisca Keiber[1] – alicekeiber_sl@yahoo.com.br
Juliana Fassbinder[1] – julianafassbinder@hotmail.com
Professor orientador: Rodrigo Orsini Braga[2] – rodrigob@unisinos.br

[1] Licenciada em Matemática pela Universidade do Vale do Rio dos Sinos (Rio Grande do Sul – Brasil) e pós-graduada em nível de especialização em Educação Matemática pela mesma instituição.
[2] Doutor em Matemática Aplicada pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS (Rio Grande do Sul – Brasil).

INTRODUÇÃO

Propomos e buscamos, neste trabalho, analisar a possibilidade de inserir no Ensino Médio noções intuitivas de Cálculo Diferencial mediante atividades de visualização e experimentação, utilizando o *software* GeoGebra e acompanhadas, de forma interdisciplinar, por aplicações de Física.

O CÁLCULO DIFERENCIAL NO ENSINO MÉDIO?

"Eu prefiro ser essa
Metamorfose ambulante
Do que ter aquela velha opinião formada sobre tudo". Raul Seixas

Quando falamos em Cálculo Diferencial, ele está muito relacionado ao Ensino Superior e dificilmente é atrelado ao Ensino Básico. Segundo Ávila (2006), apesar de alguns livros do Ensino Médio incluírem limites e derivadas entre os tópicos tratados, esses assuntos são pouco ensinados, muitas vezes, sob o pretexto de que são muito difíceis.

Ao considerar-se o ensino do Cálculo com toda a sua linguagem formal, simbólica, seus teoremas, definições, demonstrações e rigor, os estudantes nessa fase talvez não tenham conhecimentos específicos para esses conteúdos, repletos de detalhes e formalismo (Molon, 2013). Porém, se considerado a partir de um enfoque intuitivo, é algo que pode estar ao alcance dos alunos nesse nível de escolaridade.

A ideia de abordar noções de Cálculo no Ensino Médio a partir de uma abordagem interdisciplinar com a Física e aliada a um recurso tecnológico, pode proporcionar que os alunos façam interpretações e conexões segundo os conceitos estudados, estabeleçam relações e façam conjecturas a partir das construções realizadas por meio de um recurso tecnológico.

METODOLOGIA

A pesquisa, de cunho qualitativo, fundamentada em uma experimentação com pesquisa documental, é o resultado de um estudo realizado por meio da aplicação de uma oficina com 10 alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola estadual de Estância Velha (RS - Brasil); as atividades foram desenvolvidas por meio de quatro sequências didáticas e realizadas em quatro encontros presenciais.

As três primeiras sequências basearam-se em atividades envolvendo o estudo de função afim, função quadrática e limites de funções, respectivamente, e embasaram o estudo de noções intuitivas da derivada, foco central do quarto encontro e de análise deste trabalho.

ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

A partir da análise dos dados coletados na oficina, verificamos que o estudo da derivada pode ser apresentado aos alunos do Ensino Médio mediante uma interpretação mais intuitiva e visual, permitindo compreender seu significado como taxa de variação instantânea e como declividade da reta tangente.

Segundo os apontamentos dos alunos quanto às suas impressões da atividade experimental, podemos dar destaque às aprendizagens produzidas durante o último encontro, que possibilitou um contato com uma Matemática em que a visualização e experimentação foram fundamentais para a elaboração de conjecturas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

"A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original" (Einstein apud Molon, 2013).

Ao falar-se em Cálculo Diferencial, temos a impressão de que esse assunto não está ao alcance dos alunos do Ensino Médio, já que é abordado, geralmente, no Ensino Superior. No entanto, quando problematizamos a possibilidade de ensinar noções de Cálculo Diferencial no Ensino Médio, direcionamos tal estudo com um enfoque intuitivo, visual e experimental, na perspectiva de oportunizar aos alunos um contato com a derivada sem o formalismo e rigor apresentados no Ensino Superior, embasando-nos no uso do GeoGebra e de aplicações da Física, a fim de tornar esse estudo uma experiência significativa.

Diante dessas considerações e a partir dos registros dos alunos no material impresso e construções realizadas no GeoGebra, podemos concluir que é possível ensinar noções de Cálculo Diferencial no Ensino Médio, desde que contextualizadas de acordo com o nível de escolaridade dos alunos.

REFERÊNCIAS

Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2014). *Cálculo* (10ª ed., v. 1). (C. I. Doering, trad.). Porto Alegre: Bookman.

Ávila, G. (1991). O Ensino do Cálculo no 2º Grau. *Revista do Professor de Matemática*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), n. 18, 1-9.

Ávila, G. (2006). Limites e Derivadas no Ensino Médio? *Revista do Professor de Matemática*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), n. 60, 30-38.

Ávila, G. (2006). Derivadas e Cinemática. *Revista do Professor de Matemática*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), n. 61, 1-9.

Borba, M. C., Silva, R. S. R., & Gadanidis, G. (2015). *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento*. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Freire, P. (1997). *Pedagogia da Esperança: um reencontro com a Pedagogia do Oprimido* (4ª ed.). São Paulo: Paz e Terra.

Molon, J. (2013). *Cálculo no Ensino Médio: Uma abordagem possível e necessária com o auxílio do software GeoGebra*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), Santa Maria, RS, Brasil.

Seixas, R. *Metamorfose Ambulante*. Disponível em https://www.vagalume.com.br/raul-seixas/metamorfose-albulante.html. Acesso em 25 jul. 2016.

Sieben, L. (2015). A educação, tecnologias e a mobilidade. In M. C. Melchior, L. Hoppe, A. Kroeff, L. Sieben. *Educação por competências: planejamento – ludicidade – tecnologia*, Capítulo 3, pp. 85-100. Porto Alegre: CirKula.

Silva, E. R., & Silva, M. J. F. (2015). *Da taxa de variação média à taxa de variação instantânea: uma proposta no âmbito do Ensino Médio*. Trabalho apresentado na XIV Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM, Chiapas, México. Disponível em http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/757/652. Acesso em 27 jul. 2016.

Stewart, J. (2008). *Cálculo*. (5ª ed., v. 1). São Paulo: Thomson Learning.

Referências

Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2014). *Cálculo* (10ª ed., v. 1). (C. I. Doering, trad.). Porto Alegre: Bookman.

Ávila, G. (1991). O Ensino do Cálculo no 2º Grau. *Revista do Professor de Matemática.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), n. 18, 1-9.

Ávila, G. (2006). Limites e Derivadas no Ensino Médio? *Revista do Professor de Matemática*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), n. 60, 30-38.

Ávila, G. (2006). Derivadas e Cinemática. *Revista do Professor de Matemática*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), n. 61, 1-9.

Borba, M. C., Silva, R. S. R., & Gadanidis, G. (2015). *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento*. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Freire, P. (1997). *Pedagogia da Esperança*: u*m reencontro com a Pedagogia do Oprimido* (4ª ed.). São Paulo: Paz e Terra.

Molon, J. (2013). *Cálculo no Ensino Médio: Uma abordagem possível e necessária com o auxílio do software GeoGebra*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), Santa Maria, RS, Brasil.

Seixas, R. *Metamorfose Ambulante*. Disponível em https://www.vagalume.com.br/raul-seixas/metamorfose-albulante.html. Acesso em 25 jul. 2016.

Sieben, L. (2015). A educação, tecnologias e a mobilidade. In M. C. Melchior, L. Hoppe, A. Kroeff, L. Sieben. *Educação por competências*: *planejamento – ludicidade – tecnología*, Capítulo 3, pp. 85-100. Porto Alegre: CirKula.

Silva, E. R., & Silva, M. J. F. (2015). *Da taxa de variação média à taxa de variação instantânea: uma proposta no âmbito do Ensino Médio.* Trabalho apresentado na XIV Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM, Chiapas, México. Disponível em http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/757/652. Acesso em 27 jul. 2016.

Stewart, J. (2008). *Cálculo.* (5ª ed., v. 1). São Paulo: Thomson Learning.

Anexo – Sequência Didática: Encontro 4

Aluno: ____________________________________ Data: ____/____/2016

Com as atividades propostas nesse encontro, o aluno será capaz de:

- Revisar o conceito de velocidade média em um intervalo de tempo;

ISBN 978-84-945722-3-4

- Aproximar o cálculo da velocidade instantânea por meio do cálculo de velocidades médias para intervalos cada vez menores;
- Compreender e interpretar o significado de taxa de variação média em um intervalo do domínio da função como a inclinação da reta secante que passa pelos extremos de cada intervalo considerado;
- Compreender e interpretar o significado de taxa de variação instantânea como a inclinação da reta tangente em um ponto específico (interpretação da derivada como taxa de variação e como inclinação da reta tangente);
- Determinar a equação da reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto dado.

Nesse encontro trabalharemos com a ideia intuitiva de derivada a partir do estudo da taxa segundo a qual varia uma quantidade em relação a outra.

Nas atividades seguintes, iremos relembrar o conceito de velocidade média em um intervalo de tempo, relacionando-o com a inclinação da reta secante que passa pelos extremos de cada intervalo considerado.

Atividade 13 – Velocidade média e taxa de variação média

Pense inicialmente na situação apresentada abaixo.

- Um motociclista percorreu 90 km em 2 horas. Ele percorreu, em média, __________ em 1 hora, isto é, __________.

A ideia utilizada na situação acima leva em consideração a razão entre a distância percorrida (deslocamento) pelo motociclista e o tempo gasto por ele nesse deslocamento, o que denomina-se de **velocidade média**.

$$\boldsymbol{V_m = \frac{variação\ da\ distância}{variação\ do\ tempo} = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}}$$

Atividade 13.1 – Um ciclista não profissional percorre uma pista reta. Na primeira hora ele percorreu 15 km, e depois de três horas do início do trajeto ele se deslocou 35 km, conforme a função $f(x) = 10x + 5$, onde $f(x)$ representa a distância percorrida em quilômetros e x o tempo, em horas.

a) Abra o GeoGebra e digite na **"Entrada de comandos"** a função $\boldsymbol{f(x) = 10x + 5}$ e clique **"Enter"**.

b) Marque os pontos indicados no problema, ou seja, $\boldsymbol{A = (1, f(1))}$ e $\boldsymbol{B = (3, f(3))}$. Para isso, digite os pontos na **"Entrada de comandos"**. Para melhor visualização, clique no "botão 12", selecione **"Reduzir"** e clique sobre a **janela gráfica**.

c) Analise o movimento do ciclista no intervalo de 1 a 3 quilômetros. Em seguida, calcule a velocidade média (V_m) do ciclista no intervalo de tempo [1,3].

Tabela 1.10 – Cálculo da velocidade média do ciclista segundo a função $f(x) = 10x + 5$, no intervalo de tempo [1,3]

$\Delta_x = x_2 - x_1$	$\Delta_y = f(x_2) - f(x_1)$	$V_m = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$

Fonte: Elaborada pelos autores.

d) Agora, volte para o GeoGebra, clique sobre o **"botão 8"** na barra de ferramentas e selecione **"Inclinação"**. Clique sobre a reta definida pelos pontos **A** e **B**.

e) O coeficiente angular (ou inclinação) da reta que representa o deslocamento do ciclista no intervalo de tempo [1,3] é __________.

f) O que você pode concluir analisando o coeficiente angular da reta que representa o deslocamento do ciclista e sua velocidade média no intervalo de tempo [1,3]?

Salve a atividade realizada no GeoGebra: clique em **"Arquivo"**, selecione **"Gravar como"**, digite seu nome, encontro 4 e *material 15,* salvando esse material na pasta **"GeoGebra"**.

Atividade 13.2 – (Stewart, 2008 adaptado) Um objeto cai de uma altura de 20 m, e sua altura $f(t)$ no instante t é dada pela função posição $f(t) = -4{,}9t^2 + 20$, onde $f(t)$ é medido em metros e t em segundos.

a) Abra uma nova janela do GeoGebra (clique em **"Arquivo"** e em **"Nova janela"**). Em seguida, digite na **"Entrada de comandos"** a função $\boldsymbol{f(t) = -4{,}9t^2 + 20}$ e clique **"Enter"**.

b) Considere o intervalo de tempo [1,2]. Calcule $f(1)$ e $f(2)$.

Tabela 1.11 – Altura do objeto no intervalo de tempo [1,2]

t	1	2
$f(t) = y$		

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Fonte: Elaborada pelos autores.

c) Determine a velocidade média deste objeto no intervalo de tempo [1,2].

Tabela 1.12 – Cálculo da velocidade média do objeto segundo a função $f(x) = -4{,}9t^2 + 20$, no intervalo de tempo [1,2]

$\Delta_t = t_2 - t_1$	$\Delta_y = f(t_2) - f(t_1)$	$V_m = \frac{\Delta_y}{\Delta_t}$

Fonte: Elaborada pelos autores.

d) Porque a velocidade média calculada anteriormente é negativa?
e) Em sequência, volte para o GeoGebra e digite na **“Entrada de comandos”** o ponto **A** $= (\mathbf{1}, \boldsymbol{f}(\mathbf{1}))$ e clique **“Enter”**. Depois, faça o mesmo para o ponto **B** $= (\mathbf{2}, \boldsymbol{f}(\mathbf{2}))$.
f) Agora, clique no **“botão 3”** na barra de ferramentas, selecione a opção **“Reta”** e clique sobre os pontos **A** e **B**. Para melhor visualização da reta definida pelos pontos, clique no **“botão 12”**, selecione **“Reduzir”** e clique sobre a **janela gráfica**.
g) Clique sobre o **“botão 8”** na barra de ferramentas, selecione **“Inclinação”** e clique sobre a reta definida pelos pontos **A** e **B**.
h) A equação da reta definida pelos pontos A e B, que aparece na aba **Reta,** na **janela de álgebra** é __________.
i) O coeficiente angular ou inclinação dessa reta é __________.
j) O que você pode concluir analisando o coeficiente angular da reta definida pelos pontos A e B e a velocidade média do objeto no intervalo [1,2]?

Salve a atividade realizada no GeoGebra: clique em **“Arquivo”**, selecione **“Gravar como”**, digite seu nome, encontro 4 e *material 16*, salvando esse material na pasta **“GeoGebra”**.

Atividade 14 – Velocidade instantânea e taxa de variação instantânea

Nas atividades apresentadas a seguir, iremos aproximar o cálculo da velocidade instantânea por meio do cálculo de velocidades médias para intervalos cada vez menores e assim, relacionar esse estudo com a inclinação da reta tangente em um ponto específico.

Para isso, vamos iniciar o estudo a fim de determinar a velocidade de um objeto em movimento, em determinado instante de tempo, o que corresponde determinar a velocidade instantânea desse objeto.

Atividade 14.1 (Silva & Silva, 2015 adaptado) – Ao fim de um teste de resistência de um veículo popular, sua trajetória foi modelada de acordo com a função $f(t) = 3t^2 - 5t + 2$, onde $f(t)$ está em metros, t está em segundos.
a) Considere o intervalo de tempo [2,3]. Determine a velocidade média do veículo nesse intervalo de tempo.

Tabela 1.13 – Deslocamento do veículo no intervalo de tempo [2,3]

$\boldsymbol{t}$	**2**	**3**
$\boldsymbol{f(t) = y}$		

Fonte: Elaborada pelos autores.

Tabela 1.14 – Cálculo da velocidade média do veículo segundo a função $f(t) = 3t^2 - 5t + 2$, no intervalo de tempo [2,3]

$\Delta_t = t_2 - t_1$	$\Delta_y = f(t_2) - f(t_1)$	$V_m = \frac{\Delta_y}{\Delta_t}$

Fonte: Elaborada pelos autores.

b) Determine, agora, a velocidade média do veículo em intervalos de tempo cada vez menores, a fim de aproximar a velocidade média da velocidade instantânea do veículo em $t = 2\ s$. Para isso, preencha a tabela abaixo, utilizando 5 casas decimais.

Intervalo de tempo $[t_1, t_2]$	**Intervalo de deslocamento** $[y_1, y_2]$	$\Delta_t = t_2 - t_1$	$\Delta_y = y_2 - y_1$	$V_m = \frac{\Delta_y}{\Delta_t}$

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

$[\mathbf{2}; \mathbf{2,1}]$				
$[\mathbf{2}; \mathbf{2,01}]$				
$[\mathbf{2}; \mathbf{2,001}]$				
$[\mathbf{2}; \mathbf{2,0001}]$				

Tabela 1.15 – Cálculo da velocidade média do veículo em intervalos de tempo cada vez menores a fim de aproximar a velocidade média da velocidade instantânea em $t = 2\ s$

Fonte: Elaborada pelos autores.

c) Observando a tabela, é possível verificar que os valores de Δ_t estão se aproximando de ______, à medida que os valores da velocidade média V_m se aproximam cada vez mais de ______.

CONCLUSÃO

Intuitivamente, pode-se dizer que **quanto menor o intervalo de tempo considerado, mais próxima a velocidade média fica da velocidade instantânea**. Dessa forma, a velocidade do veículo no instante $t = 2\ s$ é __________.

Sendo assim, nesse caso, podemos escrever que

$$\lim_{\Delta_t \to 0} \boldsymbol{V_m} = \lim_{\Delta_t \to 0} \frac{\Delta_y}{\Delta_t} = \_\_\_\_\_\_\_\_.$$

Atividade 15 – Reta tangente ao gráfico de uma função quadrática

As atividades seguintes propõem compreender e interpretar o significado da reta tangente ao gráfico de uma função quadrática.

Atividade 15.1 Interpretando o significado de reta tangente ao gráfico de uma função quadrática

Vimos anteriormente que a velocidade média de $f(t)$ em relação a t em um intervalo qualquer, corresponde ao coeficiente angular (ou inclinação) da reta secante definida por dois pontos da forma $(t, f(t))$, extremos desse intervalo. Verificamos também que à medida que o intervalo Δ_t se aproxima de zero, mais próxima a velocidade média fica da velocidade instantânea.

Agora, utilizando a mesma situação da atividade 15.1 vamos verificar que à medida que o intervalo Δ_t diminui tendendo a zero, os pontos que definem a reta secante aproximam-se cada vez mais um do outro, de forma que a reta tenda a tangenciar a representação gráfica da função $f(t)$. Para verificar isso, siga os passos a seguir:

a) Abra uma nova janela do GeoGebra (clique em **"Arquivo"** e em **"Nova janela"**). Em seguida, digite na **"Entrada de comandos"** a função $\boldsymbol{f(t) = 3t^2 - 5t + 2}$ e clique **"Enter"**.

b) Digite na **"Entrada de comandos"** o ponto $\mathbf{A} = (\mathbf{2}, \boldsymbol{f}(\mathbf{2}))$.

c) Clique no **"botão 4"** e selecione **"Reta tangente"**. Então, clique sobre o ponto **A** e sobre a função $\boldsymbol{f(t)}$.

d) Em seguida, marque um ponto **B** qualquer sobre o gráfico da função $\boldsymbol{f(t)}$. Para isso, clique no **"botão 2"**, selecione **"Ponto"** e clique sobre a parábola, que é a representação gráfica da função $f(t)$.

e) Clique no **"botão 3"** e selecione a opção **"Reta"**. Então, clique no ponto **A** e no ponto **B**, traçando assim, a reta definida por esses dois pontos. Clique com o botão direito do mouse sobre a reta, selecione **"Propriedades"** e altere a cor da reta para **azul**.

f) Agora, clique no **"botão 8"**, selecione **"Inclinação"** e clique sobre a reta definida pelos pontos A e B.

g) Clique no **"botão 1"** e selecione a opção **"Mover"**. Então, movimente o **ponto B**.

h) À medida que o ponto B se aproxima do ponto A, o intervalo de tempo Δ_t se aproxima de ________.

i) Aproximando o ponto B o máximo possível do ponto A, os valores do coeficiente angular a, que é possível observar tanto na janela de álgebra na aba número ou na equação da reta definida pelos pontos A e B, quanto no triângulo formado pela ferramenta "Inclinação", se aproximam cada vez mais de ________.

Salve a atividade realizada no GeoGebra: clique em **"Arquivo"**, selecione **"Gravar como"**, digite seu nome, encontro 4 e *material 17*, salvando esse material na pasta **"GeoGebra"**.

CONCLUSÃO

Podemos concluir, geometricamente, que quando o intervalo de tempo tende a ________, ou seja, quando o ponto B se aproxima o máximo possível do ponto A, a velocidade média do veículo tende à sua velocidade instantânea, que é igual a ________, como já havíamos concluído na algebricamente na atividade anterior.

ISBN 978-84-945722-3-4

Podemos concluir também que, para uma função $f(x)$ qualquer, o valor da taxa de variação instantânea de $f(x)$ em relação a x em um ponto qualquer de seu domínio corresponde ao coeficiente angular da reta $y = ax + b$, tangente à representação gráfica da função $f(x)$ nesse ponto.

Atividade 15.2 – Equação da reta tangente

Na atividade anterior trabalhamos com a ideia da reta tangente ao gráfico de uma função. Agora, iremos escrever a equação dessa reta conhecendo seu coeficiente angular e o seu ponto de tangência.

a) Abra uma nova janela no GeoGebra. Então digite na **"Entrada de comandos"** a função $\boldsymbol{f(x) = -2x^2 + 5x + 1}$ e aperte **"Enter".**

b) Digite na **"Entrada de comandos"** o ponto **A** $= \boldsymbol{(2, f(2))}$ e clique **"Enter".**

c) Clique no **"botão 4"** na barra de ferramentas, selecione a opção **"Reta tangente"**, clique no ponto **A** e na **representação gráfica** da função.

d) Clique no **"botão 2"** e selecione a opção **"Ponto"**. Agora marque um ponto **B** qualquer sobre a **reta tangente**.

e) Compete a tabela abaixo para encontrar o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = -2x^2 + 5x + 1$ no ponto A.

Tabela 1.16 – Cálculo do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = -2x^2 + 5x + 1$ no ponto A
Fonte: Elaborada pelos autores.

Ponto A (x, y)	**Ponto B** (x, y)	$\Delta_x = x_2 - x_1$	$\Delta_y = y_2 - y_1$	**Coeficiente angular da reta** $a = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$
(____, ____)	(____, ____)			

f) Agora, clique sobre o **"botão 8"** na barra de ferramentas do GeoGebra e selecione **"Inclinação"**. Clique sobre a reta e verifique se o valor do coeficiente angular (ou inclinação) da reta tangente é o mesmo que você encontrou no item anterior.

g) Use o valor do coeficiente angular que você calculou anteriormente e o ponto A = (____,____), onde $x =$ _____ e $y =$ _____, substitua esses valores na equação da reta tangente $y = ax + b$ e encontre o valor de b.

h) A equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = -2x^2 + 5x + 1$ no ponto A é __________________.

i) Verifique na janela de álgebra do GeoGebra se a equação da reta tangente é a mesma que você encontrou.

Salve a atividade realizada no GeoGebra: clique em **"Arquivo"**, selecione **"Gravar como"**, digite seu nome, encontro 4 e *material 18*, salvando esse material na pasta **"GeoGebra"**.

Resolva a situação a seguir, baseando-se na atividade 15.2.

Atividade 15.3 (Anton, Bivens, & Davis, 2014 adaptado) – Suponha que $f(x) = -2x^2 + 5x + 1$ seja a função posição de uma partícula, onde $f(x)$ está em metros e x está em segundos. Encontre a velocidade instantânea da partícula no instante $x = 2\ s$.

Para resolver essa situação você pode levar em consideração que, para uma função $f(x)$ qualquer, o valor da taxa de variação instantânea de $f(x)$ em relação a x em um ponto qualquer de seu domínio corresponde ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $f(x)$ nesse ponto, e assim, é possível concluir que a velocidade instantânea da partícula no instante $x = 2\ s$ é __________.

CONCLUSÃO

A partir do estudo realizado, podemos concluir que o **coeficiente angular** da reta tangente no ponto P é a **taxa de variação** ___________________ neste ponto.

Responda detalhadamente o questionário a seguir:

1. O que você aprendeu nesse encontro?
2. Você teve dificuldade em realizar alguma atividade? O que você não entendeu?
3. O que você mais gostou de fazer?
4. O que você não gostou de fazer?
5. Espaço para comentár

ISBN 978-84-945722-3-4