

## LA INDETERMINADA $\infty-\infty$ EN ESPEJOS PARALELOS

Juan Antonio Prieto Sánchez - Catalina Fernández Escalona - Antonio Ángel Guerrero Bey -  
Francisco Manuel Moreno Pino

[juanantonio.prieto@uca.es](mailto:juanantonio.prieto@uca.es) - [cfernandez@uma.es](mailto:cfernandez@uma.es) - [antonio.bey@uca.es](mailto:antonio.bey@uca.es) -  
[franciscomanuel.moreno@uca.es](mailto:franciscomanuel.moreno@uca.es)

Universidad de Cádiz (UCA), Universidad de Málaga (UMA), España

Núcleo temático: Investigación

Modalidad: P

Nivel educativo: Nivel Medio o Secundario (12 a 15 años)

Palabras clave: Indeterminada, Infinito, Espejos, Entrevistas

### Resumen

*Entre Bolzano y Cantor, hay diferencias esenciales en tanto a las teorías de conjuntos que exponen para llegar a definir el concepto del infinito. Es esto último lo que fijamos la atención. Mientras que la comparación y correspondencia que hace Cantor (uno –a-uno) es de exclusión (compara el conjunto de números naturales que es infinito numerable con otros conjuntos), la relación en Bolzano es de inclusión enfatizando la relación parte-todo, estableciendo una comparación dentro del propio conjunto.*

*Para ello hemos realizado un modelo físico experimental como tarea para examinar el razonamiento en la cardinalidad de conjuntos infinitos. El fenómeno físico elegido es la reflexión de imágenes infinitas que producen un número finito de objetos situados en espejos paralelos dispuestos en una plataforma para poder indagar en ellos el cardinal infinito mediante la misma posición de Bolzano; donde el foco de estudio era la comparación dentro del mismo conjunto y mediante una relación de inclusión.*

*Se ha corroborado con esa experiencia física en un grupo de estudiantes de secundaria, lo que Waldegg (2005 citado en Fuenlabrada, 2008) argumentan sobre el criterio de Bolzano: que es más “intuitivo” porque es más cercano a experiencias concretas (finitas) y además “menos paradójico”.*

*El objeto de nuestro estudio, es introducir el método de comparación con la relación de inclusión, con la ayuda de la experiencia física, como iniciación al aprendizaje del infinito.*

### Introducción

En un estudio epistemológico que realizamos (Prieto, 2015) centramos nuestra atención en la noción del infinito actual en el periodo crítico de la fundamentación de las matemáticas que se origina con los trabajos de Bolzano, precursor de la actualización del infinito, y a partir de éste, los trabajos de Cantor y posteriormente los de Russell.

Entre Bolzano y Cantor, hay diferencias esenciales en tanto a las teorías de conjuntos que exponen para llegar a definir el concepto del infinito. Es esto último lo que fijamos la atención. Mientras que la comparación y correspondencia que hace Cantor (uno –a-uno) es de exclusión (compara el conjunto de números naturales que es infinito numerable con otros conjuntos), la relación en Bolzano es de inclusión enfatizando la relación parte-todo, estableciendo una comparación dentro del propio conjunto.

Se realizaron entrevistas semiestructuradas con alumnos de Educación Secundaria con los dos métodos. Pero fue con el criterio de Bolzano, utilizando para ello una experiencia física, donde muchos alumnos les surgieron la duda de la indeterminada  $\infty-\infty$  sin que ésta la tuviéramos en cuenta al comienzo del estudio.

### **Propósito inicial del estudio**

Se pretendían alcanzar los siguientes objetivos de los enunciados:

- O1.** Delimitar el conocimiento del infinito actual dentro del marco general de las matemáticas.
- O2.** Delimitar el infinito actual dentro de todos los posibles contextos: comparación de conjuntos.
- O3.** Delimitar el infinito actual en la transmisión escolar.

Junto a éstos también se pretenden conseguir el objetivo complementario siguiente:

- C1.** Introducir el método de comparación con la relación de inclusión, con la ayuda de la experiencia física, como iniciación al aprendizaje del infinito.
- C2.** Comprobar la utilidad del análisis didáctico para fundamentar y contextualizar investigaciones en Educación Matemática

Para alcanzar los objetivos anteriores se ha de comprobar la bondad de la hipótesis H3:

- H1.** Es posible tomar un modelo físico experimental como tarea para examinar el razonamiento en la cardinalidad de conjuntos infinitos.

### **Marco Teórico: El infinito actual con la comparación de conjuntos en Bolzano**

La forma de abordar el concepto de infinito en Bolzano, tal como lo hace también Cantor, es con la noción de conjunto. Diferencia los siguientes términos de *agregado*, *conjunto* y *multitud*, antes de definir conjuntos finitos. A partir de éstos, definirá el conjunto infinito para que, posteriormente, ver la posibilidad de recapacitar al infinito actual como calificativo y no como sustantivo de algunas colecciones.

Utiliza el método inductivo para la construcción de conjuntos infinitos. Establece una comparación biunívoca entre tal conjunto infinito y el conjunto de números enteros y de ahí demuestra que el conjunto así construido es infinito

Bolzano concluye que el conjunto de los números enteros es infinito y por tanto la existencia de éstos:

Considero suficiente la exposición y defensa que aquí se ha hecho de que existen los conjuntos infinitos; por lo menos los de objetos que no tienen realidad; en particular, el conjunto de todas las verdaderas absolutas es infinito. (...) podemos aceptar que el conjunto de *todos los números* (de los llamados naturales o enteros (...)) es también infinito. (Bolzano, 1851/1991, p.57)

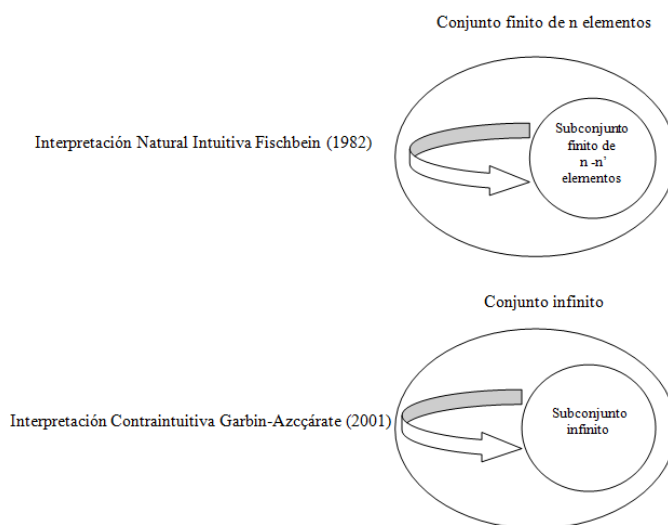


Figura1. Esquema comparación de conjuntos mediante el método de inclusión de Bolzano

## Tareas

Realizamos entrevistas semiestructuradas y por ello fue necesario especificar en el diseño previo tanto el contenido como los procedimientos (Cohen, 1990 citado en Fernández, 2001). Por tanto exponemos a continuación el objetivo pretendido, el desarrollo de la entrevista, así como los aspectos a observar en el conjunto de la prueba.

Realizamos tareas asociadas tanto al cardinal finito como el infinito. Obviamente es en la segunda donde apareció la idea de la indeterminada en los alumnos entrevistados, tema objeto del presente trabajo.

Con los dos espejos ya enfrentados y paralelos, se le coloca un número determinado de bolas que se le pedirá que las cuente, éstas y las reflejadas en los dos espejos.

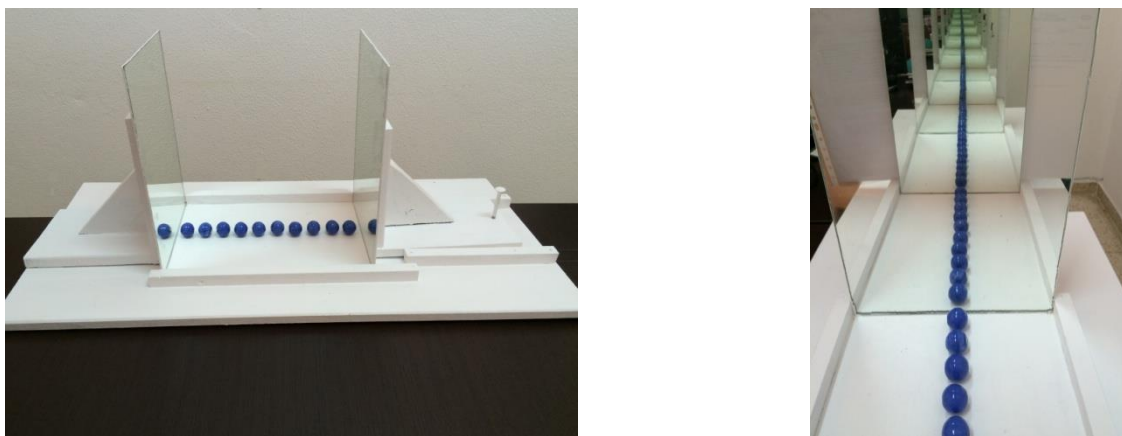


Figura 2. Cardinal Infinito

Se le pedirá que quite una bola y que las vuelva a contar. Finalmente se le hace la pregunta si tienen la misma cantidad de bolas antes y después de quitar esa bola.

### Desarrollo de la entrevista

Para el caso de Ma.14,09(*Pp*):

**Ma.14,09(*Pp*):** “**A:** Porque al quitar una pelotita, quito infinitas pelotitas. **E:** ¿Quito infinitas pelotitas? **A:** Sí. **E:** ¿Por qué? **A:** Porque al quitar una pelotita sigue habiendo infinitas pero hay una menos **E:** ¿Las puedes contar? **A:** No las puedo contar, pero...sigue habiendo infinitas. **E:** Entonces, ¿hay más, menos ó son iguales? **A:** Son iguales.”

Para él, el haber quitado una bola significa que sustrae no una cantidad finita, sino una cantidad infinita ya que no sólo tiene en cuenta la bola sustraída sino todas las que se refleja esta misma en los espejos paralelos que serían infinitas. Frente a esa indeterminación de las infinitas bolas reflejadas por el conjunto de bolas reales menos las infinitas bolas reflejadas causada por la bola sustraída, la respuesta de ello es que son iguales.



Para la alumna Fa.15,03(Pp) da una respuesta correcta pero con condicionante:

**Fa.15,03(Pp):**”A: Antes había más. E: ¿Por qué? A: Porque estaba más pegado y se veía más cantidad. E: ¿Más cantidad? Si yo acerco un poco esto... (*Acerca el espejo móvil*)A: Ahora, está igual que antes. E: ¿Hay más cantidad antes, ahora ó son iguales? A: Así son iguales. E: Son iguales, ¿aún quitando uno? A: Sí, si quitamos uno hay menos. E: Entonces dime, ¿son iguales ó antes había más? A: Ahora está igual, antes al quitarle uno, estaba diferente y ahora lo que se ve en el reflejo está igual.”

Su razonamiento se basa en el hueco que crea tras la sustracción de la bola así como los huecos reflejados en los espejos. De esa forma afirma que no son las mismas cantidades. En cambio especifica que si se mueve el espejo para que no haya huecos, las cantidades son las mismas.



## Conclusión

Dos fueron los propósitos del estudio, por un lado introducir el método de investigación de comparación con la relación de inclusión de Bolzano con la ayuda de una experiencia física y por otro lado, dar significado a los comportamientos generales encontrados, así como a los procedimientos, destrezas y estrategias en tanto reconocer las cardinalidades de esos conjuntos y finalmente la aceptación o no del infinito actual. No sólo pudimos categorizar a los alumnos entrevistados en diferentes estadios (finitistas elemental y complejo, in-finitistas, potencialistas y actualistas) sino que además hubo un grupo de alumnos recurriendo en su explicación a la idea de la indeterminada  $\infty-\infty$  y que. Posteriormente, se declinaban a la aceptación o no del infinito actual.

### Referencias bibliográficas

Bolzano, B. (1851). *Paradoxien Des Unendlichen*, Leipzig (publicación póstuma). Las paradojas del infinito (trad. L.F. Segura), 1991, México: Mathema.

Cantor, G. (1883). *Fundamentos de una teoría general de las multiplicidades: una investigación matemática filosófica en la teoría del infinito* (J. Bares y J. Climent, trad.). (1895). Recuperado de internet <http://www.uv.es/jkliment/Documentos/Cantor83.pc.pdf>.

Fishbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics*, 3(2), 9-19.

Fuenlabrada I., & Armella L. (2008). Homenaje a una trayectoria: Guillermina Waldegg. Departamento de investigaciones educativas. México.

Garbin, S., & Azcárate, C. (2001). El concepto de infinito actual. Una investigación acerca de las incoherencias que se evidencian en alumnos de bachillerato. *SUMA*, 38, 53-67.

Prieto, J.A. (2015). *Estudio del infinito actual como identidad cardinal en estudiantes de educación secundaria de 13 a 16 años*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales. Universidad de Málaga. España.

Waldegg, G. (1996). Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*. 1(1)