

JUGANDO CON LA CICLOIDE

Juan Núñez Valdés,
Universidad de Sevilla
María Luisa Rodríguez Arévalo,
Universidad de Sevilla

RESUMEN.

En esta comunicación se describe una experiencia pedagógica realizada por los autores en una clase de Matemáticas de 3º de Secundaria, con el objetivo de hacerles algo más interesantes y motivadores los conceptos geométricos que normalmente los alumnos estudian desde un punto de vista exclusivamente teórico, presentándoles dos propiedades notables de una curva plana, de la que tal como se observó, ellos no habían oído hablar antes, pero que puede resultar muy familiar para todos aquéllos que se tiran por un tobogán o simplemente montan en bicicleta. Se hace un análisis cuali y cuantitativo de la experiencia y se muestran finalmente algunas conclusiones.

Nivel educativo: Secundaria.

1. INTRODUCCIÓN.

Aunque tú, amigo lector probablemente no lo sepas, la *cicloide* es una de las curvas planas que te deberían resultar más familiares y que tienen mayor incidencia en la vida real, sobre todo si te has tirado alguna vez por un tobogán o sabes montar en bicicleta.

Imaginemos que sí sabemos montar en bicicleta y que señalamos sobre una rueda de nuestra bicicleta un punto luminoso y después la hacemos rodar. La trayectoria que sigue dicho punto es precisamente la curva llamada *cicloide*. Se la define como el lugar geométrico de los puntos del plano generado por un punto de una circunferencia al rodar, sin deslizamiento, sobre una línea recta.

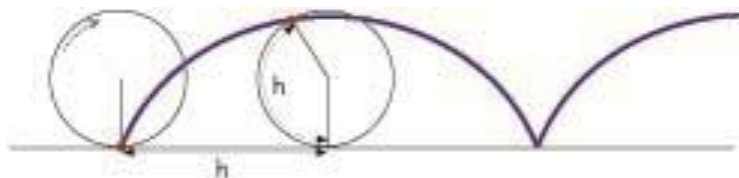


Figura 1. Construcción de la curva cicloide.

Como se verá a lo largo de esta comunicación, esta curva, estudiada por primera vez por Nicolás de Cusa y cuyo nombre se le debe a Galileo, tiene varias propiedades, entre ellas dos que resultan sorprendentes. Se trata de las propiedades *braquistócrona* y *tautócrona* (esta última también llamada *isócrona*). El poner de manifiesto estas dos propiedades a los alumnos de un curso de 3º de Secundaria, a través de una experiencia realizada con maquetas, es precisamente el objetivo principal de esta comunicación.



Figura 2. Maqueta en la que se muestra la propiedad braquistócrona.

La historia de la introducción de esta curva es ciertamente apasionante y de no ser por razones de extensión de esta comunicación debería estar incluida en estas líneas. No obstante, nos vamos a limitar en ellas a comentar la experiencia anteriormente indicada y a extraer de ella algunas conclusiones que puedan servir de aprovechamiento para los docentes de la asignatura de Matemáticas de este curso y nivel. Para los lectores interesados, una lectura amena y bastante exenta de tecnicismos sobre la historia de esta curva y sus propiedades más interesantes puede encontrarse en (Benjumea y Núñez, 2010 y en web2).



Figura 3. Experimentando la propiedad isócrona.

2. LA EXPERIENCIA REALIZADA

Se comenta en esta sección la experiencia realizada, con indicación de sus características y datos más importantes.

2.1. DATOS TÉCNICOS DE LA EXPERIENCIA.

- Lugar: I.E.S. Ramón Carande, de Sevilla capital.
- Curso y Grupo: 3º E.S.O., grupo A.
- Día de realización: Miércoles, 29 de febrero de 2012.
- Horario. De 14 a 15 horas, durante la clase de Matemáticas.
- Profesor del I.E.S.: D. Eduardo Algaba Seco, Catedrático de Matemáticas de Bachillerato.
- Número de Alumnos: 25, de los cuales 15 son varones (60%) y 10 mujeres (40%).
- Material utilizado en la experiencia:

- a) Cuestionario de 10 preguntas sobre curvas en general, algunas de las cuales, con casi toda seguridad, no podían ser conocidas por los alumnos.
- b) Maqueta de madera de formación de una cicloide de dimensiones 70x12x7 cm. en la que los alumnos podían observar la construcción de esta curva haciendo girar una rueda con un punto fijado por un bolígrafo sobre una recta.
- c) Maqueta de madera de la curva braquistócrona, de 60x30x30 cm, en la que se podía observar esta propiedad característica de la cicloide dejando caer dos canicas, una sobre una trayectoria recta y otra sobre esta curva.
- d) Maqueta de madera de la curva isócrona, de 100x30 cm, representando diferentes monumentos famosos de distintas ciudades, en la que se podía observar esta propiedad también característica de la cicloide dejando caer dos canicas situadas a diferentes alturas sobre la curva.
- e) Dos pósters rectangulares de 120x85 cm representando uno de ellos distintos tipos de curvas y superficies y el otro dedicado a la curva cicloide y sus propiedades.



Figura 4. Material utilizado en la experiencia.

- **Incidencias:** A esta experiencia asiste, invitado expresamente por el profesor de la asignatura y los autores de la misma, Don Manuel Pérez Espina, profesor ya jubilado de este centro, responsable de haber concertado esta visita y otro compañero del departamento de matemáticas del mismo, también jubilado, Don José Luis Messía Márquez.



2.2. LUGAR DE LA EXPERIENCIA.

El centro elegido para desarrollar la experiencia fue, como ya se ha indicado, el I.E.S. Ramón Carande, de Sevilla capital.

Este Instituto está ubicado en el Sur de Sevilla, entre las barriadas de las Tres Mil Viviendas y el Tiro de Línea. Las Tres Mil Viviendas es un barrio deprimido, con problemas de droga y delincuencia, lo que influye en el comportamiento y otras características de los alumnos que proceden de él (un 60%). El Tiro de Línea es un barrio de gente trabajadora, no pudiéndose calificar como de clase media-alta por su nivel de estudios y poder adquisitivo, sino inferior. De este último procede un 40% de los alumnos del centro.

En la actualidad el Instituto escolariza alumnos con un perfil psicológico que refleja un bajo nivel de autoestima, participando en una escala de valores en la que no aparece de forma definida la importancia del conocimiento ni de la educación como algo crucial para su futuro.

Los alumnos tienen una tasa de fracaso escolar media-alta debido a sus condiciones socioculturales (familias gitanas desestructuradas con escaso interés por los estudios de sus hijos, en muchos casos) y económicas; el nivel de competencia curricular del alumnado de nuevo ingreso en el centro es medio-bajo, existiendo en 1º de ESO un porcentaje significativo de alumnos con necesidades específicas no diagnosticadas.

Por todo ello, en este centro son bastante comunes las siguientes características del alumnado:

- Abandono del estudio por incapacidad de seguir la marcha de la clase.
- Pérdida del interés por la asistencia al centro, al no poder integrarse en el trabajo cotidiano.
- Aparición de conflictos con el profesorado y con sus compañeros.
- Aparición del absentismo a partir de los 14 años como forma habitual de reaccionar a un modelo que no satisface las necesidades y expectativas del alumno, cada vez más alejado de la marcha del grupo.
- Alejamiento del alumno de las normas que regulan la vida del centro.

Finalmente, indicar que el número de alumnos del centro se acerca ligeramente a los 600, con un número de grupos de 21, y 28 alumnos de ratio media. El criterio de agrupamiento de los alumnos es por nivel de conocimientos, siendo los grupos A los de nivel más alto, y los D los de nivel más bajo (nuestra experiencia tuvo lugar en el curso 3º de la ESO, grupo A, aunque esta circunstancia se debió más a ventajas de horario por parte del profesor y de los propios autores que a otras razones).

2.3. EL CUESTIONARIO.

29 de febrero de 2012. NOMBRE:

Por favor, responde a las siguientes preguntas. Muchas gracias por tu colaboración.

- 1.- Dibuja un objeto geométrico, el que tú quieras.
- 2.- ¿Crees que una línea recta es una curva?
- 3.- Razona tu respuesta anterior: Porque...
- 4.- Escribe el nombre de cuatro curvas que conozcas.



- 5.- Escribe el nombre de cuatro cuerpos geométricos que conozcas.
 6.- ¿Has oído hablar antes de la "cicloide"?
 7.- Tanto si has oído antes hablar de la cicloide como si no, ¿con qué objeto de la vida real la relacionarías?
 8.- ¿Con qué medio de transporte relacionarías una curva llamada "catenaria"?
 9.- Aunque no la conozcas, ¿qué forma crees que tiene una "cardioide"?
 10.- Imagina que tienes un capirote de nazareno y lo cortas con un cuchillo muy grande. ¿Cuántas curvas distintas (de forma, no de tamaño) te podrán salir dándole distintas posiciones al cuchillo? Indica sus nombres, si los sabes.

	Varones	Hembras		
P1	Dado	1	Dado	2
	Triángulo	1	Triángulo	2
	Cuadrado	3	Cuadrado	1
	Cilindro	6	TV	1
	Exágono	1	Cilindro	3
	Octógono	1	Mesa	1
P2	Sí	1	Sí	2
	No	14	No	8
P3	Relativamente Correcta			
P4	NC	8	NC	5
	Catenaria	4	Catenaria	3
	2 curvas	0	2 curvas	0
	3 curvas	0	3 curvas	0
	4 curvas	1	4 curvas	0
	Errores	2	Errores	2
P5	0	1	0	1
	1	0	1	0
	2	2	2	0
	3	0	3	2
	4	1	4	7
	Error	0	Error	0
P6	Sí	1	Sí	0
	No	14	No	10
P7	Círculo	2	Círculo	1
	Motocicleta	1	Motocicleta	2
	Bicicleta	5	Bicicleta	4
	Autobús	0	Autobús	1
	Absurdos	2	Absurdos	2
P8	NC	4	NC	0
	Bicicleta	1	Autobús	2
	Moto	2	Coche F1	2
	Coche	5	Tren	2
	Camión	1	Avión	2
	Tren	5	Moto	0
	NC	5	NC	2
P9			Redonda	1
			Corazón	1
			Cuadrada	1
			Curva	1
			Ovalada	1
		Absurdo	3	
		NC	2	
P10	1	0	1	0
	2	4	2	0
	3	0	3	0
	4	1	4	1
	Varios	1	Varios	1
	NC	9	NC	7

La tabla anterior refleja las respuestas dadas por los alumnos a las preguntas del cuestionario anterior. A los autores nos ha parecido oportuno separar estas respuestas por sexo, indicando además en cada una de ellas la totalidad de respuestas escritas por los alumnos, así como el número de cada una de ellas.

2.4 DESARROLLO DE LA EXPERIENCIA

La experiencia se realizó de la siguiente forma: en primer lugar el autor se autopresentó a los alumnos y les presentó después a sus compañeras, la autora y una prima de ésta que iba a desempeñar la misión de reportera gráfica y les explicó brevemente en qué iba a consistir la experiencia.

Como anécdota al respecto, indicar que uno de los alumnos de la clase, Cristian, le preguntó al autor que cuánto duraría esta experiencia. Éste le dijo que cuánto creía él que iba a durar, a lo que el alumno le contestó que *un ratillo*. Entonces, el autor le preguntó al alumno que cuánto era para él un ratillo, a lo que éste respondió que 10 minutos. Luego, el profesor le comentó al alumno que la experiencia iba a durar *un rato en vez de un ratillo* a lo que el alumno volvió a preguntar que cuánto era para el profesor un rato. Éste aprovechó para contestarle que en matemáticas se podía seguir con ese proceso hasta el infinito, y que como además no tenían infinitos minutos, lo más procedente era cortar ya aquel intercambio de preguntas, aunque le hizo ver al alumno lo acertada de su intervención.

Seguidamente, los autores repartieron a los alumnos el cuestionario que llevaban preparado y les comentaron que no hacía falta que pusiesen su nombre y apellidos, sólo el nombre, y que contestaran las preguntas que supiesen, advirtiéndoles que no considerasen aquello como un examen y que únicamente pretendían conocer qué tipo de conocimientos geométricos de tipo general sabían los alumnos, independientemente de que los hubiesen estudiado en clase o no.



Figura 5. Repartiendo el cuestionario.

Mientras los alumnos contestaban, una de ellas, Janelly, le comentó al profesor (en adelante nos referiremos indistintamente a los autores de esta comunicación como autores o como profesores) que no sabía lo que era un capirote, palabra que aparecía en la última de las preguntas del cuestionario. Algo extrañado, éste se lo explicó y le preguntó a su vez si ella no había presenciado nunca la Semana Santa, a lo que ella contestó que no porque era sudamericana recién llegada a nuestro país.

Una vez recogido los cuestionarios, aproximadamente entre 10 y 15 minutos después de repartidos, el profesor les hizo a los alumnos algunas preguntas orales sobre el mismo. Así, preguntó a la clase en general que quién había contestado la segunda pregunta respondiendo que una línea recta sí era una curva. Sólo levantaron la mano un chico (Jesús) y dos chicas (M^a Ángeles y Janelly), aunque los razonamientos de estas dos, el que *las rectas tienen varias formas* y el que *una calle recta puede ser curva*, eran erróneos. Jesús, sin

embargo, se aproximó algo más al contestar que: *sí, porque, por ejemplo, la tierra nosotros la vemos recta pero es redonda vista desde el espacio*. Algunas de las respuestas de los que respondieron que no eran también incorrectas ya que por ejemplo, Felipe dijo que *no, porque las líneas rectas pueden ser paralelas (sic) pero las curvas no son paralelas*.

En este momento el profesor aprovechó para mostrarles a los alumnos uno de los dos pósters que llevaban en el que aparecían las gráficas de una serie de curvas planas, la mayoría no conocidas de los alumnos. Entre ellas, la cicloide, la catenaria, la espiral, la rosa de cuatro pétalos y algunas otras más. A preguntas del profesor, la mayoría de los alumnos comentaron que no habían oído hablar antes de ninguna de ellas. Entonces el profesor les indicó que el resto de la charla lo iban a dedicar a conocer una de estas curvas en profundidad, concretamente la cicloide.

A continuación la autora de esta comunicación les mostró a los alumnos la maqueta de construcción de la cicloide y les preguntó que si se hacía girar la rueda sobre la horizontal, qué figura dibujaría el bolígrafo de la maqueta. Algunos alumnos, como Dani y Manuel, respondieron que *una espiral*, mientras que Cristian dijo que *una especie de cable telefónico*. La profesora pasó a mostrar a continuación el experimento y les comentó a los alumnos que la figura dibujada era la curva que en geometría se llama una *cicloide*, nombre que les había aparecido en el cuestionario en las preguntas 6 y 7.



Figura 6. Explicando cómo se forma la cicloide.

Seguidamente, les preguntó qué ocurriría si la curva se empezase a dibujar por el lado contrario y los alumnos dieron las mismas respuestas que al principio. Unos decían, como Ana, que *se ponga como se ponga el lápiz, la figura siempre sería la misma*. Paola también decía que *la misma curva*, mientras que otros, como Óscar, Pedro y Laura, que *saldría para abajo*. La profesora le pidió a Paola que volviese a repetir el experimento y contra lo que algunos de sus compañeros pensaban, todos vieron que volvía a salir dibujada la misma curva.

El profesor tomó la palabra para preguntarles a los alumnos que *cuál era para ellos la curva que daba la menor distancia entre dos puntos*. La mayoría de ellos respondió que *la recta*, e incluso Felipe se permitió hacer un chiste comentando que *sí, que era la recta, pero siempre que no hubiese mesas por medio*.

La autora pasó entonces a realizar un segundo experimento utilizando la maqueta de la *propiedad braquistócrona* de la cicloide. La pregunta ahora era que *si se dejaban caer a la vez una canica por la recta y otra por la cicloide cuál*

llegaría antes. La respuesta estuvo bastante dividida ya que aproximadamente una mitad de la clase se inclinaba por la recta y la otra (probablemente por pensar que la respuesta no debía ser la más elemental) por la cicloide. Para responder experimentalmente a esta cuestión, la autora tiró las canicas y mostró que llegaba antes la que se desplazaba por la cicloide. Los alumnos quedaron totalmente convencidos y la profesora aprovechó para explicarles que ésta era una propiedad característica de esta curva, que se denominaba braquistócrona, porque "braquis" significa en griego "lo mismo" y "cronos", "tiempo".

El profesor tomó entonces la palabra y manteniendo un bolígrafo en cada mano a distinta altura uno de otro le preguntó a los alumnos que *cuál creían ellos que llegaría antes al suelo si los dejaba caer*. Cristian contestó que *cuanto más alto estuviese el bolígrafo, antes llegaría al suelo* y Felipe dijo que *dependía del peso del bolígrafo*, aunque el profesor le contestó que en este caso los bolígrafos pesaban más o menos lo mismo. Después de dejar caer los dos bolígrafos, los alumnos observaron que llegaba antes el situado a menor altura y entonces la profesora les preguntó que si dejaba caer dos canicas situadas a diferente altura en una cicloide cuál de ellas llegaría antes a la horizontal.



Figura 7. Maqueta braquistócrona.



Figura 8. Maqueta isócrona.

Seguidamente la profesora tomó otra maqueta en la que iba a mostrar la *propiedad isócrona* de la cicloide, y colocó sin dejarlas caer dos canicas a diferentes alturas sobre la curva y les preguntó a los alumnos cuál pensaban ellos que llegaría antes a la horizontal. Ana contestó que *la que está más alta, por tener más inclinación*. Felipe dijo que *las dos llegarán al mismo tiempo porque aunque una está situada a menor altura, la de mayor altura cogerá mayor velocidad* y Cristian indicó que *la que está más baja porque está más cerca*. A este razonamiento se opuso María Ángeles diciendo que *la de arriba llegaría antes por estar más inclinada*. La profesora pasó entonces a realizar la experiencia y todos los alumnos vieron que curiosamente las dos bolas llegaban a la horizontal al mismo tiempo. La profesora les explicó entonces que esta era una propiedad característica de la cicloide que no tenían otras curvas y que por supuesto tampoco tenía la recta.

Tomó ahora la palabra la profesora para mostrarles a los alumnos el segundo de los pósters que habían llevado a la clase, el titulado "*la Helena de las curvas*". Para empezar les preguntó a los alumnos si ellos sabían quién era Helena de Troya, a lo que algunos de ellos respondieron afirmativamente porque habían visto la película "Troya". La profesora les contó que Helena era una princesa griega bellísima y que en aquella época los príncipes e hijos de reyes se disputaban su amor, llegando incluso a la guerra por ella. Pues bien, haciendo una similitud con este hecho histórico, los matemáticos llegaron a pelearse entre

sí por encontrar las principales propiedades de esta curva, a la que por esta razón se la denominó *la Helena de las curvas*.

En el póster se mostraban las propiedades braquistócrona e isócrona de esta curva antes citadas y se indicaban algunas aplicaciones de estas propiedades en la vida real, como pueden ser la forma de los toboganes en los parques de atracciones (aunque para evitar accidentes la mayoría de estos toboganes suelen tener una forma casi rectilínea). También quedaba indicado cómo la segunda de estas propiedades es muy útil en los relojes de péndulo y en navegación.

Dado que faltaban cuatro o cinco minutos para terminar la clase, el profesor no quiso acabar esta experiencia sin hacerles un pequeño truco matemático a los alumnos, para divertirlos con las Matemáticas, basado en las propiedades de las congruencias módulo 9, aunque obviamente no comentó para nada estas últimas palabras. Se trataba de escribir los números desde el uno al nueve, uno a continuación del otro y con excepción del número ocho y preguntarle al profesor invitado (que se tomó como conejillo de indias) cuál de todos aquellos números le había salido peor escrito, para obligarle a repetirlo varias veces sin más que realizar una sencilla multiplicación.

Para que quedara recuerdo de la realización de esta experiencia la reportera gráfica tomó una foto del grupo de alumnos acompañados por los profesores, que se muestra a continuación.



Figura 9. Alumnos y profesores.

Finalmente el profesor autor de la experiencia pasó a agradecerles a todos los alumnos, al igual que a su profesor de la asignatura, la colaboración prestada, al tiempo que ensalzaba el buen comportamiento y actitud de todos ellos en la realización de la misma.

3. CONCLUSIONES.

A raíz de la experiencia comentada, los autores desean indicar a continuación algunas conclusiones que han obtenido de su realización. Obviamente, no se pretende generalizar, dado que la muestra no es en absoluto significativa, pero sí



es cierto que lo observado puede ser interesante como objeto de debate entre el profesorado. Estas conclusiones son las siguientes:

1. Los alumnos se mostraron especialmente interesados en seguir las explicaciones de los profesores y en contestar sin ningún tipo de temor las preguntas de los mismos. Es posible que el hecho de que estos profesores no fuesen los que ellos tienen habitualmente les supusiese menos problemas para adoptar esta conducta.
2. Es indudable que el hecho de llevar a clase maquetas, póster y otro tipo de herramientas favorece ampliamente las explicaciones del profesor y contribuye a mejorar el interés y la motivación de los alumnos.
3. A nivel de 3º de Secundaria los alumnos poseen un gran desconocimiento de los conceptos geométricos en general. Han oído hablar de rectas, circunferencias y polígonos, pero poco más.
4. El nivel de comprensión de los alumnos de estos niveles es relativamente bajo. Esto se puede comprobar en el hecho de que en el cuestionario que se les presentó aparecían varios nombres de curvas que luego ellos fueron incapaces de considerar como tales cuando se les preguntaba por ellas en el cuestionario.
5. A la pregunta oral realizada a los alumnos por los profesores de si les gustaría repetir este tipo de clase con otra experiencia distinta la respuesta afirmativa fue abrumadora, lo cual significa que podría ser interesante para el profesor de la asignatura tener previstas dos o tres experiencias similares a realizar por otros compañeros, para ir mostrándolas a lo largo de la misma.

REFERENCIAS.

[1] BENJUMEA, J. C. y NÚÑEZ, J. (2010), Caminando sobre las curvas. Capítulo 6 del Libro de Divulgación de las Matemáticas "Prisma. Un paseo entre las Matemáticas y la Realidad". Servicio de Publicaciones de la Universidad de Sevilla. 93-116.

[web2] <http://almargendefermat.wordpress.com/2009/02/22/la-cicloide-i-braquistocrona-y-tautocrona/>
(Blog de WordPress.com sobre la cicloide).