



## CÁLCULO SIMBÓLICO Y GRÁFICO CON CALCULADORA

**Agustín Carrillo de Albornoz Torres,**  
*IES Sierra Morena, Andujar (Jaén)*

**José M<sup>a</sup>. Chacón Iñigo,**  
*IES Llanes, Sevilla*

**Encarnación Amaro Parrado,**  
*IES Virgen de la Cabeza, Marmolejo (Jaén)*

Este taller se realiza con la colaboración de



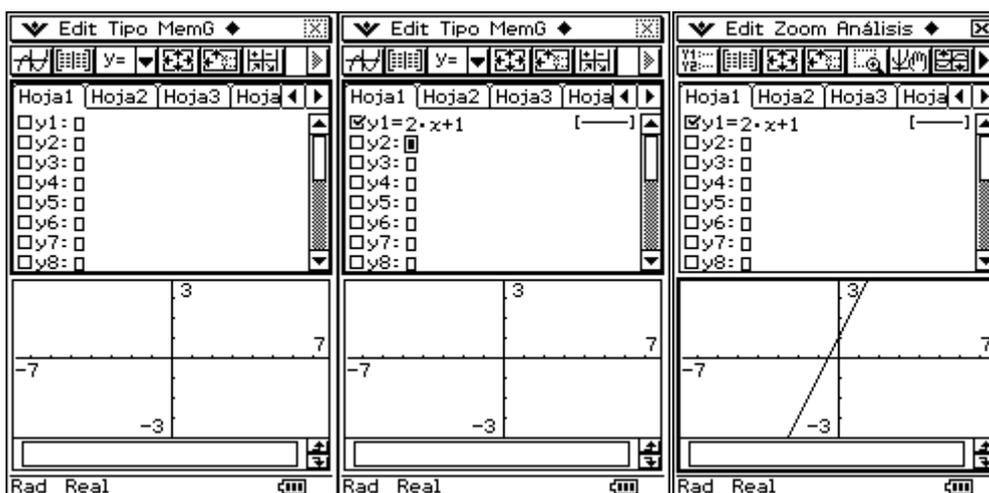
### LA FUNCIÓN LINEAL

Una función lineal está expresada en la forma  $y = a x + b$ .

Es esta actividad estudiarás los cambios que producen los valores  $a$  y  $b$  en su representación gráfica.

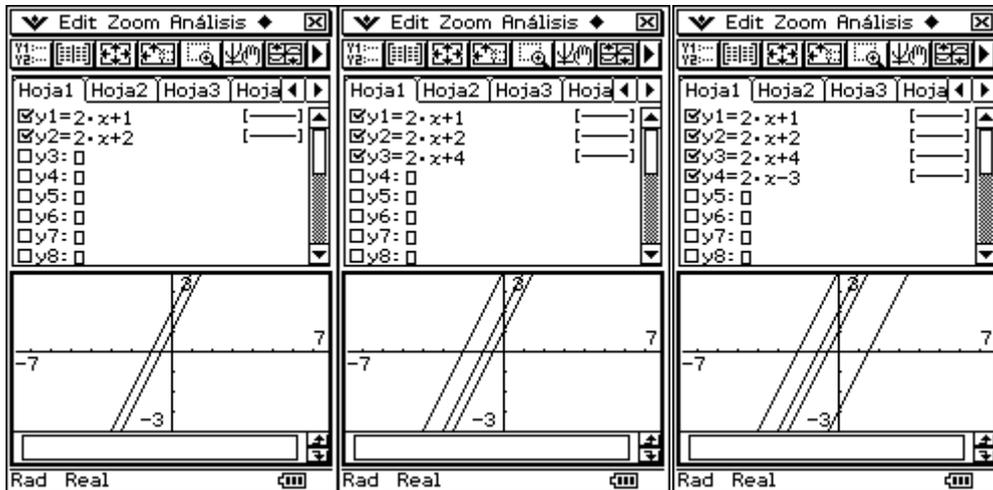
#### ACTIVIDAD 1

Comienza la actividad dibujando una función lineal, por ejemplo  $y = 2x + 1$ .



Dibuja otras funciones lineales:

$$y = 2x+2 \quad y = 2x+4 \quad y = 2x - 3$$



Contesta las siguientes cuestiones:

- ¿Cómo son las distintas rectas que has obtenido?
- ¿Qué cambio se produce en la representación al variar el valor del coeficiente **b**?
- Observa el punto en el que cada una de las rectas corta al eje de ordenadas (Y). ¿Existe alguna relación con el valor de **b**?
- El valor b recibe el nombre de \_\_\_\_\_.
- Podrías decir, sin representarla, las características de la función  $y = 2x - 1$ .

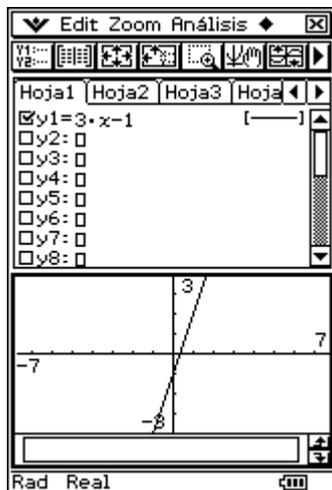
Ahora estudiarás que cambios produce en una función lineal el valor **a**.

Borra las funciones anteriores utilizando **Borrar todo**.



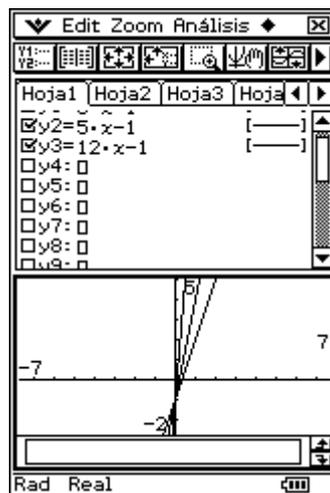
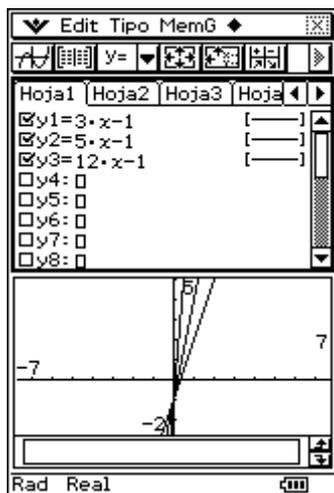
## ACTIVIDAD 2

Dibuja la función  $y = 3x - 1$ .



Ahora dibuja las siguientes funciones:

$$y = 5x - 1 \quad y = 12x - 1$$



Responde a las cuestiones siguientes:

- Indica qué observas en las distintas rectas que has obtenido.
- ¿Hay alguna característica común a todas las rectas dibujadas?
- Expresa cómo afecta el valor de **a** la representación gráfica de la función lineal.

### ACTIVIDAD 3

Representa la función  $y = x - 1$  e intenta determinar cual será la representación de las funciones  $y = 2x - 1$  e  $y = \frac{1}{2}x - 1$ .

¿Qué ocurre cuando el valor de  $a$  aumenta o disminuye?

Hay alguna relación entre los valores que toma  $a$  para determinar cómo será la representación gráfica.

A continuación, deja la primera función  $y = 3x - 1$  y dibuja las dos funciones lineales siguientes:

$$y = -3x - 1 \quad y = -x - 1$$

¿Qué observas?

¿Qué cambios produce en la gráfica que  $a$  sea positivo o negativo?

A partir de las gráficas anteriores entenderás la razón por la que  $a$  recibe el nombre de pendiente de la recta.

### ACTIVIDAD 4

Relaciona las expresiones de las funciones lineales con su correspondiente representación gráfica.

|              |  |  |
|--------------|--|--|
| $y = x - 2$  |  |  |
| $y = -4x$    |  |  |
| $y = -x - 3$ |  |  |



|              |  |  |
|--------------|--|--|
| $y = x + 1$  |  |  |
| $y = 4x - 2$ |  |  |

### ACTIVIDAD 5

Responde las cuestiones siguientes:

- ¿En que punto cortará la recta  $y = 5x - 6$  al eje Y?
- De las rectas  $y = 4x - 3$  e  $y = x + 2$ , ¿Cuál está más inclinada?
- ¿Qué rectas son paralelas a  $y = 5x + 2$ ?

$$y = x + 2 \quad y = 5x \quad y = -5x + 2 \quad y = 5x + 4$$

### ACTIVIDAD 6

- Escribe la expresión de una recta que pase por el punto  $(0, -5)$ .
- Escribe la ecuación de una recta que sea paralela a  $y = -x$  que pase por el punto  $(0, 1)$ .

## FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

### • Factorización de un polinomio

#### ACTIVIDAD 1.

Descompón en factores los polinomios

$$P(x) = x^2 - 6x + 5 \quad P(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$$

$$P(x) = x^4 + 2x^2 + 1 \quad P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6.$$

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + x + 2$$

Anota el número de factores que has obtenido y determina alguna relación entre ese valor y el grado del polinomio.



## ACTIVIDAD 2.

Resuelve las ecuaciones siguientes:

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \quad -x^4 + 2x^2 + 3 = 0$$

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 0$$

Aprovechando las opciones que ofrece la calculadora para resolver ecuaciones (comando **Solve**), resuelve las dos ecuaciones siguientes:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \quad x^3 + 3x^2 + x + 2 = 0$$

En la actividad 1 has obtenido los factores de un polinomio y en esta actividad has resuelto una ecuación polinómica para obtener las soluciones, ¿hay alguna relación entre ambos procesos?

Contesta las cuestiones siguientes:

2.a. Si  $x=2$  es una solución de la ecuación  $P(x)=0$ , cómo podemos expresar el polinomio  $P(x)$ .

2.b. Si  $-1$ ,  $-3$  y  $2$  son las soluciones de la ecuación  $P(x)=0$ , ¿Puedes obtener la expresión del polinomio  $P(x)$ ?

2.c. Indica si la expresión del polinomio  $P(x)$  del apartado anterior es única y en qué condiciones sería única.

## ACTIVIDAD 3.

Representa las siguientes funciones:

$$f(x) = x^2 - 6x + 5 \quad f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$$

$$f(x) = x^4 + 2x^2 + 1 \quad f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 2$$

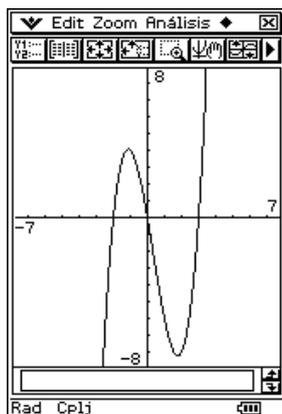
¿Qué observas?

Hay alguna relación entre los puntos de corte de la función con el eje de abscisas y los valores obtenidos en el ejercicio anterior.

Indica la relación entre corte con los ejes de una función polinómica, solución o raíz de una ecuación polinómica y factor de un polinomio.

## ACTIVIDAD 4.

En la gráfica siguiente está representada una función polinómica de grado 3.



Determina su expresión.

### ACTIVIDAD 5.

Como sabes, para descomponer en factores un polinomio se utiliza la regla de Ruffini en la que el para obtener el primer factor hay que probar con los divisores del término independiente, pero si ves la gráfica de una función polinómica en una calculadora ¿podrías determinar cual es el primer valor que tienes que utilizar para comenzar a desarrollar Ruffini?

## RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

- Resolución de ecuaciones lineales.
- Resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

### ACTIVIDAD 1.

Resuelve las ecuaciones  $6x - 2 = 1$        $6x = 3$

¿Cómo son las dos ecuaciones anteriores?

### ACTIVIDAD 2.

Representa las funciones  $f(x) = 6x - 2$  y  $g(x) = 1$ .

¿Qué observas?

### ACTIVIDAD 3.

Resuelve la ecuación  $3(3x - 5) - x = 2x - 3$ .

¿Qué proceso seguirías para encontrar la solución de la ecuación anterior utilizando un proceso similar al expuesto en la actividad 2?



#### ACTIVIDAD 4.

Utilizando un método gráfico indica las soluciones de las ecuaciones siguientes:

a.  $2(3x - 1) = 6x - 4$ .      b.  $-3(x - 2) = 6 - 3x$

#### ACTIVIDAD 5.

Resuelve el sistema de ecuaciones lineales  $\left. \begin{array}{l} 3x + y = -1 \\ 2x - y = -4 \end{array} \right\}$ .

Representa las funciones anteriores para obtener de manera gráfica la solución del sistema de ecuaciones.

#### ACTIVIDAD 6.

Resuelve de manera gráfica los sistemas de ecuaciones lineales siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y = 3 \\ -4x + 2y = 1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 3x + y = 2 \\ 6x + 2y = 4 \end{array} \right\}.$$

¿Qué deduces de los resultados anteriores?

#### ACTIVIDAD 7.

Completa el sistema de ecuaciones para que se cumpla la condición indicada y comprueba los resultados utilizando las opciones gráficas que ofrece la calculadora.

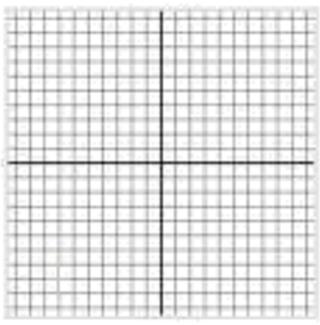
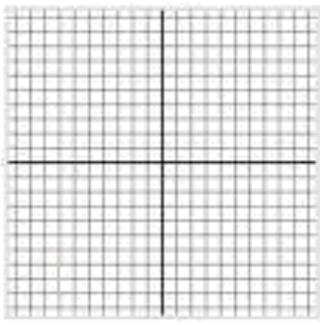
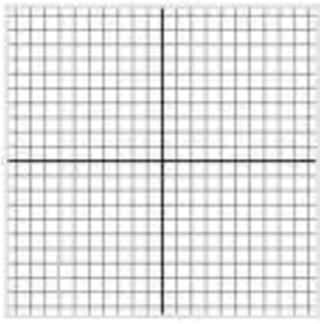
$$\left. \begin{array}{l} 4x - 3y = 1 \\ \_x + \_y = \_ \end{array} \right\} \quad \text{El sistema tiene solución única}$$

$$\left. \begin{array}{l} \_x + \_y = \_ \\ x - y = 0 \end{array} \right\} \quad \text{El sistema tiene infinitas soluciones}$$

$$\left. \begin{array}{l} \_x + \_y = \_ \\ \_x + \_y = \_ \end{array} \right\} \quad \text{El sistema no tiene solución.}$$

#### ACTIVIDAD 8.

Relaciona el número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales con la posición de las rectas que representa a cada una de las ecuaciones del sistema.

|  |  |
|--|--|
| <p>El sistema tiene<br/>solución única</p>       |    |
| <p>El sistema tiene<br/>infinitas soluciones</p> |    |
| <p>El sistema no tiene<br/>solución.</p>         |  |

## CÁLCULO DE LÍMITES

### • Límite de una función en un punto

#### ACTIVIDAD 1.

Sea la función  $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 1}$ .

Representa la función.

Vamos a estudiar la función en un entorno del punto  $x = 2$ .

Construye una tabla de valores en el entorno de  $x = 2$ .

Puedes determinar cuál es el valor de  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .



Repite los procesos anteriores para  $x = 1$ .

¿Qué ocurre con  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ?

Intenta aproximar la tabla de valores a  $x = 1$  por la izquierda y por la derecha.

¿Podemos decir que existe el  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ? ¿Cuál es su valor?

Intenta calcular el valor de  $f(1)$ . ¿Qué conclusiones puedes deducir de los resultados anteriores?

### ACTIVIDAD 2.

Sea la función  $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x < 2 \\ -x^2 & x \geq 2 \end{cases}$ .

Representa la función.

Observando la representación ¿puedes determinar si existe  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ?

Construye la tabla de valores para un entorno de  $x = 2$ .

Determina los valores de los límites laterales en  $x = 2$  utilizando la tabla de valores, comprobando después a través de la opción correspondiente en el menú principal.

### ACTIVIDAD 3.

Sea la función  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^3 - 3x - 2}$ .

Representa la función.

Calcula los siguientes límites intentando aproximar el valor a partir de la gráfica y después comprobando con las opciones correspondientes disponibles en la calculadora.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

Dibuja las rectas  $x = -1$  y  $x = 2$ .

¿Qué relación existe entre  $f(x)$  y las rectas anteriores?



Repite los procesos anteriores para los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

Dibuja la rectas  $y =$  valor que has obtenido en el límite anterior.

¿Qué relación existe entre  $f(x)$  y esta nueva recta?

## **FUNCIONES Y DERIVADAS**

- **Representación de funciones. Calculo de derivadas.**

### **ACTIVIDAD 1.**

Representa y estudia la función  $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x + 2$ .

### **ACTIVIDAD 2.**

Calcula  $f'(x)$ .

Representa la función  $f'(x)$ .

Determina si existe alguna relación entre los extremos de la función  $f(x)$  y algunos puntos de  $f'(x)$ .

### **ACTIVIDAD 3.**

Calcula  $f''(x)$

Representa la función  $f''(x)$

Determina si existe alguna relación entre los extremos de la función  $f(x)$  y algunos puntos de  $f''(x)$ .

¿Existe alguna relación entre puntos notables de  $f'(x)$  y de  $f''(x)$ ?

### **ACTIVIDAD 4.**

Halla la ecuación de la recta tangente a  $f(x)$  en  $x = -1, 2$ .

Determina el valor de la pendiente de cada una de las rectas anteriores.

Relaciona el valor de la pendiente con el tipo de punto de la función.

### **ACTIVIDAD 5.**

De una función polinómica de segundo grado se tienen los siguientes datos:

- Tiene un máximo absoluto en  $x = -2$ .
- Pasa por el punto  $(1,1)$ .

- Tiene una raíz en  $x = 2$ .

Determina la expresión de dicha función. Representala y comprueba que cumple las condiciones anteriores.

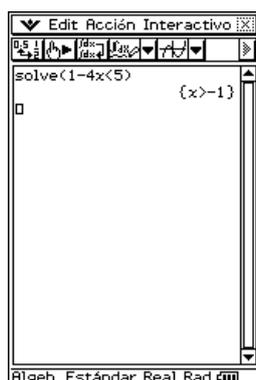
## RESOLUCIÓN DE INECUACIONES

- Inecuaciones lineales con una incógnita.
- Sistemas lineales de inecuaciones con una incógnita.
- Inecuaciones no lineales con una incógnita.
- Inecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Sistemas lineales de inecuaciones con dos incógnitas

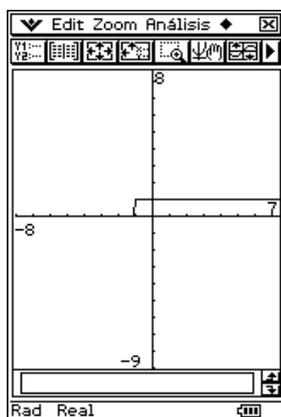
### ACTIVIDAD 1.

Resuelve la inecuación  $1 - 4x < 5$ .

La calculadora resuelve directamente la inecuación tal como lo haría un alumno con los métodos algebraicos que ya conoce:



Incluso podríamos “dibujar” la solución tal como lo hacemos en clase; para ello basta arrastrar la inecuación a la ventana gráfica:

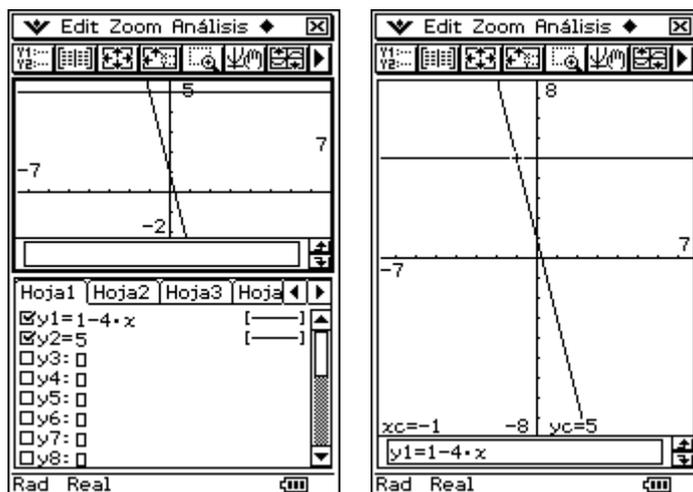


Pero, ¿cómo se puede interpretar la inecuación y la solución? La capacidad gráfica de la calculadora nos ayudará.

En primer lugar, consideremos ambos miembros de la desigualdad como dos funciones que llamaremos  $y_1$  e  $y_2$  por similitud a la sintaxis de la calculadora:

$$y_1 = 1 - 4x, \quad y_2 = 5$$

y las representamos:



Ahora podemos explicar al alumnado que a partir de  $x = -1$  la gráfica de  $y_1$  está por encima de la gráfica  $y_2$ .

Este método tan sencillo es el que se debe seguir prácticamente para todas las inecuaciones, permitiéndonos incluso dar soluciones o aproximaciones de ellas, de inecuaciones mucho más complicadas.

### ACTIVIDAD 2.

Resuelve la siguiente inecuación e interpreta el resultado:  $2(x - 2) + 3x < 5x + 6$

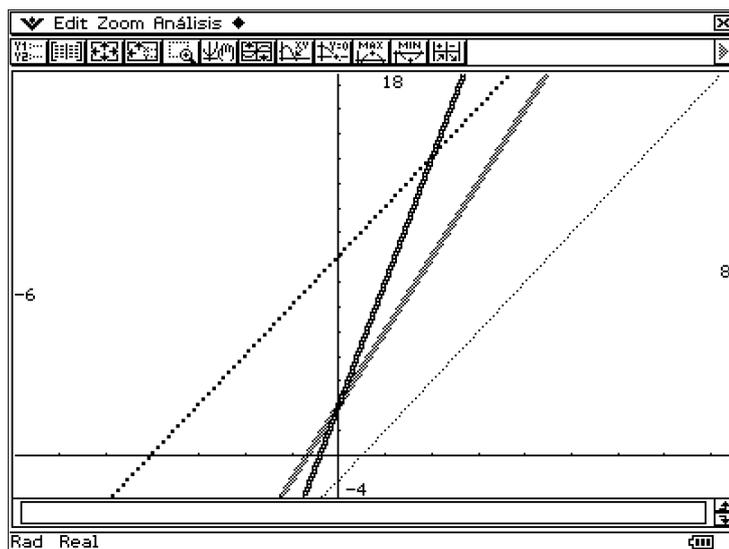
### ACTIVIDAD 3.

Resuelve el sistema 
$$\begin{cases} 2x - 1 < 3x + 2 \\ 5x + 2 > 2(x + 4) \end{cases}$$

Siguiendo lo anterior:



Obsérvese los diferentes trazos para distinguir las funciones:



Ahora podemos ver que a partir de  $x=2$  se cumplen las dos condiciones, y no ha sido necesario ningún método. Aún así, podemos comprobarlo:



#### ACTIVIDAD 4.

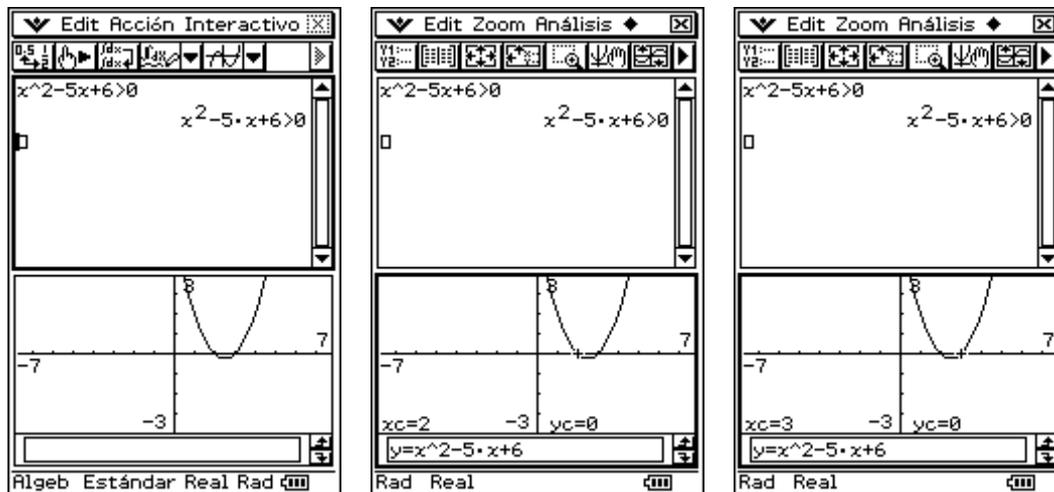
Resuelve el sistema e interpreta el resultado:

$$\begin{cases} x > 3 \\ x < 4 \\ 2(x-1) > 5 \end{cases}$$

#### ACTIVIDAD 5.

Resuelve la inecuación  $x^2 - 5x + 6 > 0$

Se podría resolver como un sistema, factorizando previamente, pero con la calculadora es inmediato:



Se puede observar que para  $x < 2$  y  $x > 3$  se cumple la inecuación.

#### ACTIVIDAD 6.

Resuelve e interpreta la inecuación:  $x^2 + 6x + 9 > 0$

#### ACTIVIDAD 7.

Resuelve la inecuación  $3x - y < 2$

#### ACTIVIDAD 8.

La suma de las edades de dos hermanos es menor que 8, y su diferencia es mayor que 4. ¿Cuáles son sus edades si ambos ya han cumplido un año?

#### ACTIVIDAD 9.

Una contraseña de seguridad consiste en un número de dos cifras tal que su suma es menor que 10 y una de las cifras es mayor que el triple de la otra. Halla una de las posibles soluciones.