



MATEMAGIANDO CON ALUMNOS DE SECUNDARIA

A. Arjona Moreno, *Dpto de Geometría y Topología. Facultad de Matemáticas, Universidad de Sevilla, antonio_spartak7@hotmail.com*

S. Benítez Peña, *Dpto de Geometría y Topología. Facultad de Matemáticas, Universidad de Sevilla, matematrix-10@hotmail.com*

J. Núñez Valdés, *Dpto de Geometría y Topología. Facultad de Matemáticas, Universidad de Sevilla, jnvaldes@us.es*

RESUMEN.

En esta comunicación se describe una experiencia pedagógica realizada por los autores en una clase de Matemáticas de 3º de Secundaria de un I.E.S. de Sevilla capital, realizada con el objetivo de probar nuevos recursos metodológicos en las clases que permitan motivar e interesar a los alumnos por las matemáticas. La experiencia tiene dos partes claramente diferenciadas. Una, realizar un juego de magia matemática, que contribuya a despertar la curiosidad y el asombro de los alumnos por el estudio de las matemáticas. Otra, usar el concepto matemático de grafo para reforzar los conceptos de cortes de rectas en el plano y figuras planas y espaciales.

1. INTRODUCCIÓN.

Continuando con las visitas anuales que realizan los miembros del equipo de investigación en Didáctica y Metodología de las Matemáticas que dirige uno de los autores de esta comunicación a Institutos de Secundaria y Bachillerato para ponerlas en práctica, se describe en la misma una experiencia pedagógica realizada por algunos miembros de ese equipo en una clase de Matemáticas de 3º de E.S.O de un I.E.S. de Sevilla capital, con el objetivo de probar nuevos recursos metodológicos para motivar e interesar a los alumnos por las matemáticas.

Esta experiencia consta de dos partes: Una primera, en la que se hace a los alumnos un juego de cartas de magia matemática unido a otro de adivinación de números, que por su espectacularidad contribuye a despertar el interés y asombro de los alumnos por el estudio de la asignatura.

Y una segunda, en la que se le introducen a los alumnos los conceptos más elementales de la Teoría de Grafos, con el objetivo de hacerles más interesantes y motivadores los conceptos geométricos que posteriormente se les van a enseñar en su asignatura, que normalmente se tratan desde un punto de vista mucho más teórico que práctico.

2. LA EXPERIENCIA REALIZADA.

Se comenta en esta sección la experiencia realizada, con indicación de sus características y datos más importantes.

2.1. Datos técnicos de la experiencia.

- Lugar: I.E.S. Ramón Carande, de Sevilla capital.
- Curso y Grupo: 3º E.S.O., grupo A.
- Día de realización: Jueves, 20 de marzo de 2014.
- Horario. De 14 a 15 horas, durante la clase de Matemáticas.
- Lugar: I.E.S. Ramón Carande, de Sevilla capital.
- Profesor del I.E.S.: D. Eduardo Algaba Seco, Catedrático de Matemáticas de Bachillerato.
- Número de Alumnos: 26, de los cuales 9 son varones (34.6%) y 17 mujeres (65.4%).
- Material utilizado en la experiencia:
 - a) Cuestionario de 8 preguntas sobre posiciones de rectas en el plano y trucos de magia.
 - b) Maqueta prismático rectangular de dimensiones 90x55x1 cm. en la que los alumnos podían experimentar las diferentes posiciones de las rectas en el plano.
 - c) 4 barajas de cartas para que los alumnos siguiesen el juego por su cuenta.
- Incidencias: A esta experiencia asiste el profesor Don Manuel Pérez Espina, catedrático de Matemáticas de Bachillerato ya jubilado de este centro, responsable de haber concertado esta visita. Asimismo a los autores les acompañaron durante toda la experiencia tres alumnos de la Facultad de Matemáticas, Alba González Parra, Irene Araujo Guijo y Francisco Javier Sanz Gil, que se habían prestado a colaborar como reportera gráfica la primera, al objeto de poder documentar con fotografías todo lo sucedido durante la experiencia, y a ayudar durante la misma los dos últimos, ya graduados. La primera es la autora de todas las fotos que aparecen en esta comunicación y desde aquí los autores aprovechamos para agradecerle esta colaboración.

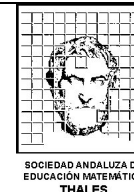


Figura 1. Material utilizado en la experiencia.

2.2. Lugar de la experiencia.

El centro elegido para desarrollar la experiencia fue, como ya se ha indicado, el I.E.S. Ramón Carande, de Sevilla capital.

Este Instituto escolariza actualmente alumnos con un perfil psicológico que refleja un bajo nivel de autoestima, participando en una escala de valores en la que no aparece de forma definida la importancia del conocimiento ni de la



educación como algo crucial para su futuro. Por ello, la tasa de fracaso escolar es media-alta.

El número de alumnos del centro se acerca ligeramente a los 600, con un número de grupos de 21, y 28 alumnos de ratio media. El criterio de agrupamiento de los alumnos es por nivel de conocimientos, siendo los grupos A los de nivel más alto, y los D los de nivel más bajo (nuestra experiencia tuvo lugar en el curso 3º de la ESO, grupo A, aunque esta circunstancia se debió más a ventajas de horario por parte del profesor y de los propios autores que a otro tipo de razones).

2.3. El cuestionario.

La idea de pasarles un cuestionario anónimo a los alumnos se debió únicamente al hecho de que los autores deseábamos disponer de una serie de datos que nos permitiesen hacer un análisis cuantitativo de la experiencia, aparte del propiamente cualitativo. Este cuestionario, para cuya respuesta se les dio diez minutos a los alumnos, fue el siguiente:

I.E.S. Ramón Carande. CUESTIONARIO. Sevilla, 20 de marzo de 2014

- 1.- Dibuja dos rectas paralelas y dos rectas secantes en el plano.
- 2.- ¿Es lo mismo para dos rectas en el plano "ser secantes" que "ser perpendiculares"? ¿Por qué?
- 3.- ¿Es lo mismo decir que "dos rectas se cortan" que "dos rectas se cruzan" en el plano? ¿Por qué?
- 4.- Indica dos figuras planas y otras dos que no lo sean.
Planas:
No Planas:
- 5.- Coloca la "P" de plano o la "E" de Espacial en los paréntesis que van detrás de los siguientes objetos:
Circunferencia () Polígono () Círculo () Esfera ()
Folio () Lápiz () Regla () Tiza ()
- 6.- ¿Crees que detrás de los trucos de magia hay matemáticas?
- 7.- ¿Qué trucos de magia con cartas conoces?
- 8.- ¿Conoces algún juego de adivinar números? Descríbelo.

La tabla 1 refleja las respuestas dadas por los alumnos a las preguntas del cuestionario anterior, algunas de ellas con sus correspondientes aclaraciones.

Por razones de extensión de esta comunicación, no podemos incluir en ella un análisis exhaustivo de las respuestas obtenidas. En todo caso, observamos que de los 26 alumnos que había en total, sólo 5 no respondieron las preguntas 1 - 4 (19.2%).

De las preguntas 5 - 7 se obtienen los siguientes resultados:

	Todo correcto	Un solo error	Más de un error	Sí	Ns/Nc
Pregunta	30%	20%	50%	-	-

5					
Pregunta 6	-	-	-	85%	15%
Pregunta 7	-	-	-	-	58%

Tabla 1. Resultados del cuestionario.

2.4. Empezando la experiencia.

El día ya indicado, con una antelación de media hora sobre la hora de comienzo de la clase, los autores nos presentamos en el I.E.S., donde ya nos estaba esperando el profesor que se había encargado de hacer la gestión.

Una vez ya en el aula, la experiencia se realizó de la siguiente forma: uno de nosotros se auto-presentó y presentó a los alumnos a sus dos compañeros y a los colaboradores, y les explicó brevemente en qué iba a consistir la experiencia. Seguidamente, los autores pasaron a repartir el cuestionario, volviéndolo a recoger ya relleno unos diez minutos más tarde (en adelante nos referiremos indistintamente a los autores de esta comunicación como autores o como profesores).



Figura 2. Alumnos respondiendo al cuestionario

Algunas anécdotas surgidas durante el tiempo en el que iban haciendo el cuestionario fueron las siguientes:

- Al ir a preparar la pizarra para empezar el juego, uno de los autores se encontró con que no había ni borrador ni tiza en el aula. Ante nuestra extrañeza, el profesor nos comentó que los bedeles se negaban a llevarlas al aula porque, según decían, los alumnos se las llevaban. El profesor de la asignatura nos solucionó el problema.

- A pesar de que se les indicó que el cuestionario debía hacerse de forma individual, casi todos los alumnos se agruparon en pequeños grupos para comentar sus respuestas antes de escribirlas y siguieron haciéndolo así, más o menos disimuladamente, pese a nuestra recomendación.

Una vez recogido el cuestionario, uno de los profesores se dirigió a los alumnos para proponerles hacer entre todos un juego de adivinación de números mezclado con cartas. Pasamos seguidamente a comentarlo en la siguiente sección.

3. HACIENDO TRUCOS DE MAGIA CON MATEMÁTICAS.

Cuando desarrollamos esta actividad en el aula les preguntamos en primer lugar a los alumnos que cuanto eran $2+2$. Por descontado, todos dijeron que 4, a lo que los profesores les dijimos que en algunos casos, esto no es siempre así. Al respecto, un alumno contestó que podían ser "9", pero cuando le pedimos que explicara por qué, rápidamente nos dijo que había tratado de hacer una broma. Otro alumno dijo "22" porque, imaginamos, tratando de hacer otra broma, explicó que: "2 y 2, pues 22"

Seguidamente, el profesor que dirigía la clase (al que desde ahora llamaremos el "profesor-mago") les dijo a los alumnos que se imaginaran que viajábamos a otro planeta en el que el sistema horario no es el mismo que el de la Tierra. Habíamos viajado a un planeta (que llamamos Planeta Matemático) en el que solo se tienen 4 horas, es decir, en el que el reloj comienza en la hora 0 y las horas posteriores son la 1, 2 y 3. Cuando el reloj llega a las 4, ha pasado un día completo, luego nuestra hora serían las 0, y así seguiríamos sucesivamente: las 5 sería la 1, las 6 serían las 2,...).

Véase la siguiente figura.

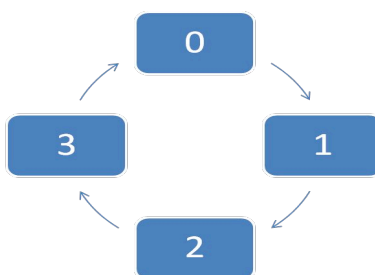


Figura 3. El reloj en el nuevo planeta

Al preguntarle a los alumnos si lo habían entendido, varios de ellos dijeron que sí y otros que no. A petición nuestra, una de las alumnas que lo habían entendido, Alba, pasó a explicárselo a los demás, por cierto de una forma bastante correcta. También, a modo de anécdota, nos parece oportuno reflejar que cuando el profesor-mago explicó que en el Planeta Matemático los días sólo duraban 4 horas, una alumna, Bárbara, comentó: "Si ese planeta sólo tiene 4 horas, entonces yo tendría ya 90 años".



XV CONGRESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS
MATEMÁTICAS: EL SENTIDO DE LAS MATEMÁTICAS.
MATEMÁTICAS CON SENTIDO



Después, les dijimos a los alumnos que les íbamos a sorprender con un juego de magia. Para ello, les pedimos que cogieran una calculadora (como no había suficientes calculadoras tuvimos que agrupar a los alumnos en varios grupos) y les indicamos que pensasen un número de tres cifras no capicúa, es decir, un número cuyas primera y tercera cifra no fuesen iguales (*"capicúa"*, fue la respuesta inmediata de Alba, que por lo visto hasta entonces, debía ser una alumna bastante aventajada). Los alumnos debían apuntar dicho número y después tenían que escribirlo al revés, es decir, debían cambiar la primera cifra del número por la tercera y al revés, manteniendo la segunda cifra en su posición central.

Después, con esos dos números, los alumnos debían restarle al mayor el menor, obteniendo así un tercer número. Les aclaramos que necesitábamos que el resultado de esa diferencia fuese un número de tres cifras, por lo que si su tercer número resultante de esa resta era de solo dos cifras, entonces tenían que hacer que tuviera tres cifras colocándole un 0 delante de sus dos cifras. A continuación, les pedimos a los alumnos que hiciesen con este tercer número lo mismo que hicieron con el primero, es decir, escribirlo al revés, obteniendo así un cuarto número, y finalmente, les solicitamos a los alumnos que sumaran estos dos últimos números y conservasen guardado el resultado, sin que pudieran verlo ninguno de sus otros compañeros que estaban en otros grupos realizando el mismo juego.

Por cierto que, al respecto, el propio profesor del centro, profesor de Matemáticas de ese grupo, pensando seguramente en el bajo nivel que a su juicio tenían sus alumnos, nos comentó privadamente a varios de los autores que: *"demasiadas instrucciones estáis dando para que estos alumnos os entiendan"*. Además, algo más adelante, el citado profesor también se aventuró a decir que: *"¿A que va a ser la primera vez que el truco no salga?"*.

Seguidamente, comenzamos con el juego de cartas. Para ello pedimos 3 voluntarios de grupos diferentes a los que le se les dio una baraja a cada uno para que ayudaran al profesor-mago con su truco, ya que la cuarta baraja le correspondía a él. Cada voluntario sería el representante de cada grupo, siendo el profesor-mago el del grupo sobrante. A partir de entonces, los voluntarios tenían que repetir con sus barajas lo mismo que iba haciendo el profesor-mago con la suya. Empezamos barajando las cartas para que éstas no estuviesen ordenadas, sino dispuestas aleatoriamente. Como para el juego que íbamos a hacer solo son necesarias treinta y nueve cartas y no las cuarenta de la baraja, le pedimos a un alumno que eliminase una carta al azar, sacándola de la baraja y retirándola, para poder empezar ya así el juego. Esto se le pidió a cada uno de los grupos de alumnos formados, como es lógico.

El juego consistía en lo siguiente: un alumno de cada grupo debía elegir una carta de entre las treinta y nueve de la baraja, mirar a ver cuál era, enseñársela al resto de compañeros de su grupo, (sin que el profesor-mago ni sus voluntarios pudieran verla) y finalmente, volver a meterla entre las demás cartas y barajar de nuevo. Ésa sería la carta que el profesor-mago aseguró que iba a adivinar, en cada uno de los grupos formados, por supuesto, empleando para ello sus fuertes conocimientos matemáticos, ante la natural expectación e incredulidad de los

alumnos de la clase, cada uno de ellos integrante de uno de los distintos grupos formados.

Para empezar el truco de magia el profesor-mago cogió la baraja "boca abajo" (es decir, las cartas mirando hacia la parte inferior y por consiguiente sin que se supiera cuál era cada una) y fue volteando las cartas, poniéndolas ahora hacia arriba, de forma que fuesen visibles para los alumnos, y distribuyéndolas en tres montones de forma que la primera carta formaba parte del primer montón, la segunda del segundo y la tercera del tercer montón y volvió a repetir el proceso a partir de la cuarta carta, es decir, colocó la cuarta carta en el primer montón, la quinta en el segundo, la sexta en el tercero, la séptima en el primero, y así sucesivamente (véase la siguiente figura).

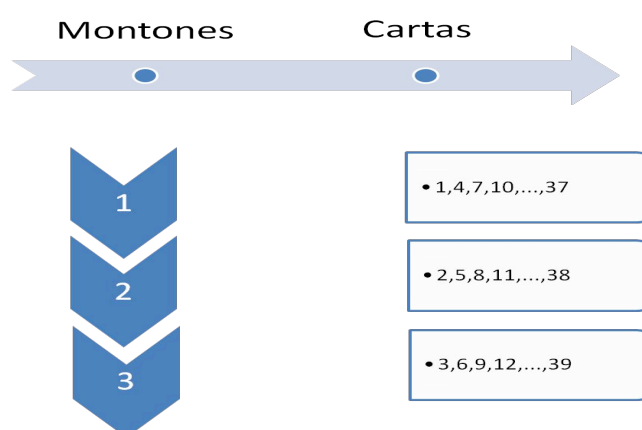


Figura 4. Primera distribución de las cartas en montones

El profesor-mago les comentó a los alumnos que era importante que no perdiesen de vista en ningún momento la carta que habían sacado de la baraja, ya que cuando se hubiesen completado los tres montones, los alumnos debían decirle al representante de su grupo en qué montón se encontraba esa carta.

Una vez conocido cuál es ese montón, el profesor-mago, sin dar ninguna explicación, como si lo hiciese de forma no premeditada, colocó ese montón en medio de los otros dos y volvió a repetir todo el proceso tres veces más, de forma que en total se hubieron completado cuatro formaciones de montones distintas.

Seguidamente, cuando estaban formados los tres montones de la cuarta y última distribución de las cartas, el profesor-mago cambió el orden de distribución de las cartas de la siguiente forma: las 3 primeras se colocan una encima de cada montón, la cuarta en el tercero, la quinta en el segundo, la sexta en el primero, la séptima en el primero, y así sucesivamente.

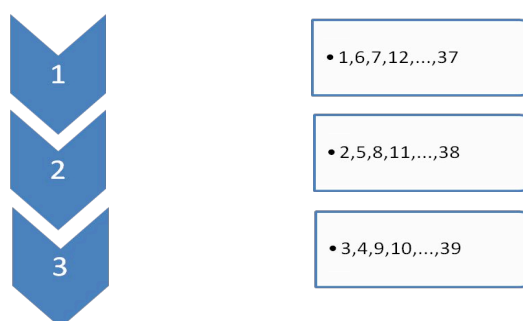


Figura 5. Última distribución de las cartas en montones

Finalmente, en esta última distribución, el profesor-mago les dijo a los alumnos que ya iba a adivinar la carta de cada grupo. Para ello, tomó el montón en el que se encontraba la carta, según los alumnos, puso las cartas de ese montón boca abajo y empezó a sacar cartas de la parte inferior del montón de una en una, colocando las cartas impares (con numeración impar) en la parte superior y eliminando las cartas pares hasta quedarse con 4 cartas.

En ese momento, el profesor-mago les pidió a los voluntarios que le devolvieran sus 4 cartas y las colocó en forma de cuadrado. Posteriormente sacó el número que los alumnos, por grupo, habían estado pensando en la hora anterior y se lo mostró. Un intenso y espontáneo ¡oh! de admiración y sorpresa se obtuvo de los alumnos al comprobar que todos habían obtenido dicho número (permítasenos a los autores la licencia de dejar como ejercicio a los lectores de esta comunicación el descubrimiento del porqué de esta reacción de los alumnos, así como de porqué el profesor-mago se había quedado con sólo cuatro cartas).

Después, el profesor-mago les dijo que como en cada fila se tenían 4 cartas, asociaría a cada una un número del 0 al 3 de la misma forma que ocurría en el reloj del Planeta Matemático (véase la siguiente figura).



Figura 6. Ordenación de las cuatro cartas finales de cada una de las filas

Luego les dijo que calcularan la hora que sería en nuestro Planeta Matemático con cada una de las 4 cifras del número adivinado, obteniendo así 4 posiciones de las cartas, una en cada fila. Por último el profesor-mago empezó a voltear las cartas cuyas posiciones se habían obtenido y para el asombro unánime de los alumnos, aparecieron las 4 cartas que cada grupo inicialmente había elegido. Un espontáneo y fuerte aplauso premió la finalización de esta primera parte de la actividad. Otros trucos de "matemagia" pueden verse en (Valle, 2013), por ejemplo.

4. EVITANDO ENCUENTROS INOPORTUNOS... SIEMPRE QUE SE PUEDA: GRAFOS PLANARES Y NO PLANARES.

El por qué del título de esta sección se explica con el tema que se presenta: Los grafos planares y los no planares (recuérdese que los grafos planares son aquellos que podemos dibujar sin cruces de aristas, siendo este cruce el “encuentro inoportuno” que queremos evitar, si podemos...).

Esta actividad en el aula la empezamos dándoles a los alumnos una definición básica de lo que es un grafo. Un grafo, no es más que un par ordenado $G = (V, E)$, donde V es un conjunto (finito o no) de elementos, llamados vértices o nodos, y E es un conjunto (también finito o no) de pares no ordenados de esos elementos, que se llamarán líneas o aristas. No obstante, es claro que ésta es una definición que puede resultar bastante formal para los alumnos del nivel del que se trata, por lo que, coloquialmente les dijimos que un grafo no es más que un dibujo formado por puntos (vértices) y líneas (aristas), donde cada línea tiene que tener un punto al principio, y otro al final.

Seguidamente, tras mostrarles a los alumnos algunos ejemplos de “dibujos” (grafos) sencillos y pedirles que ellos mismos dibujasen otros distintos, les entregamos a los alumnos una hoja con otros dibujos (grafos), para que ellos mismos decidieran si esos “dibujos” se podían dibujar o no sin o con cruces de líneas (aristas), explicándoles entonces lo que se entiende por grafos planares y grafos no planares.

Para conseguir una mejor comprensión de estos conceptos, que luego el alumno puede aplicar cuando estudie las diferentes posiciones relativas de dos rectas, tanto en el plano como en el espacio, hicimos uso de la maqueta que representaba a los grafos “K5” y “K3,3” (cuyas definiciones también les dimos de una manera informal), para que ellos mismos pudieran interactuar con esos grafos y decidir si son o no planos, dándoles posteriormente una breve explicación a los alumnos del hecho por el que de que todos los “dibujos” que contengan a estos dos ya citados (tanto juntos como por separados), no son grafos planares. Les dijimos a los alumnos que había algunos libros de grafos muy curiosos para aquellos que estuvieran interesados en éste y otros temas divulgativos, entre ellos (Grima y García, 2013), por ejemplo.

Al preguntarle en primer lugar a los alumnos que para qué creían que servía la maqueta que les presentábamos, una alumna, Rocío, dijo que: “*creo que las tres barbis (sic) van a algún sitio y no se quieren cruzar*”.

Como, desafortunadamente, el tiempo de la clase estaba llegando a su fin, aunque los alumnos seguían bastante interesados en encontrar las posibles rutas que no se cruzasen, no hubo más remedio que poner fin a nuestra intervención, para lo que le pedimos a nuestra reportera gráfica que hiciese una foto de todo el grupo de alumnos acompañados por los profesores, la cual se muestra a continuación.



Figura 7. Foto de Grupo

5. ALGUNAS CONCLUSIONES

A raíz de la experiencia comentada, los autores desean indicar a continuación algunas conclusiones que han obtenido de su realización. Obviamente, no se pretende generalizar, dado que la muestra no es en absoluto significativa, pero sí es cierto que lo observado puede ser interesante como objeto de debate entre el profesorado. Estas conclusiones son las siguientes:

1. Los alumnos se mostraron especialmente interesados en seguir las explicaciones de los profesores y en contestar sin ningún tipo de temor las preguntas de los mismos. Es posible que el hecho de que estos profesores no fuesen los que ellos tienen habitualmente les supusiese menos problemas para adoptar esta conducta.
2. Es indudable que el hecho de llevar a clase maquetas, pósters y otro tipo de herramientas favorece ampliamente las explicaciones del profesor y contribuye a mejorar el interés y la motivación de los alumnos.
3. A la pregunta oral realizada a los alumnos por sus profesores de si les gustaría repetir este tipo de clase con otra experiencia distinta la respuesta afirmativa fue abrumadora (José dijo textualmente: "*está guapo*"), lo cual significa que podría ser interesante para el profesor de la asignatura tener previstas dos o tres experiencias similares a realizar por otros compañeros, para ir mostrándola a lo largo de la misma.

REFERENCIAS.

[1] CLARA GRIMA y RAQUEL GARCÍA ULLDEMOLINS, Hasta el infinito y más allá. Espasa Libros, S.L.U., 2013.

[2] WILMER VALLE CASTAÑEDA (2013), Matemagia: Magia y Matemáticas. Ver en: <http://www.monografias.com/trabajos94/matemagia-magia-y-matematica/matemagia-magia-y-matematica2.shtml>