LA COORDINACIÓN DE LA IDEA DE UNIDAD EN LA REPRESENTACIÓN DE FRACCIONES IMPROPIAS

Ángela Buforn, *Universidad de Alicante, angela.buforn@ua.es*
Ceneida Fernández, *Universidad de Alicante, ceneida.fernandez@ua.es*

RESUMEN.

El significado de la idea de unidad es clave para el desarrollo de la comprensión de las fracciones y sus diferentes maneras de representarlas. En este estudio analizamos las estrategias de los futuros maestros en tareas que requerían coordinar la idea de unidad en diferentes modos de representación usando unidades compuestas, y caracterizamos el papel que desempeñan las fracciones impropias (f>1) en cada modo de representación. Los resultados aportan información sobre las dificultades vinculadas al uso de las unidades que puede influir en la construcción significativa de métodos numéricos más generales en la aritmética de las fracciones que el maestro deber generar en la enseñanza de las fracciones.

Nivel educativo: Formación de maestros.

1. INTRODUCCIÓN.

Las evidencias relativas a las dificultades de los estudiantes en construir el significado de unidad relativo a las fracciones y razones plantean la importancia del papel del maestro en gestionar este tipo de situaciones. Sin embargo existen pocos estudios sobre el conocimiento de los estudiantes para maestro sobre estos aspectos (Livy, y Vale, 2011; Lee, Brown y Orril, 2011; Tzur, 1999). Este conocimiento es clave en el desarrollo de competencias docentes relativas a la organización del contenido matemático para enseñar o en la interpretación de la manera en la que los estudiantes de primaria aprenden las matemáticas.

Un aspecto relevante en esta situación es el papel que puede desempeñar el conocimiento de los maestros en manejar situaciones en las que deban apoyar la construcción en sus estudiantes del uso de las fracciones como unidades iterativas para representar fracciones impropias. Las investigaciones sobre como los estudiantes de educación primaria llegan a construir este esquema cognitivo (Steffe y Olive, 2010; Norton y Wilkins, 2009) indican que el maestro puede ser un elemento clave en ayudar a sus estudiantes a generar fracciones como unidades iterativas en diferentes modos de representación que les permitan construir el significado de las fracciones impropias. Un elemento clave en este proceso de construcción es que los maestros puedan llegar a reconocer el papel de generar fracciones unitarias a partir de la separación de algún todo (lo que se ha denominado "splitting operation") como un paso previo a la hora de iterar más allá del todo para representar fracciones impropias (Hackemberg, 2007).

Desde el punto de vista de la enseñanza, el conocimiento del maestro de estos esquemas cognitivos y el papel que desempeñan en la construcción del significado de las fracciones se apoya en el conocimiento matemático que da sentido a las representaciones usadas para las fracciones (Lee, Brown y Orril, 2011). Dos de las representaciones típicas en la enseñanza de las fracciones son el uso de figuras geométricas (por ejemplo, el rectángulo o el círculo) y la recta numérica. Por consiguiente el conocimiento de los maestros del papel que pueden desempeñar estos modos de representación en la coordinación de diferentes tipos de unidades usadas iterativamente para representar fracciones constituye un elemento del conocimiento de las matemáticas que es relevante para la enseñanza (Buforn y Fernández, 2014). Esta situación ha generado un objetivo de investigación relativo a caracterizar el conocimiento de los futuros maestros en situaciones en las que es necesario coordinar la idea de unidad para representar fracciones.

2. MÉTODO.

2.1. PARTICIPANTES

En este estudio participaron 56 estudiantes para maestro (EPM) después de haber realizado un módulo en el programa de formación centrado en aspectos relativos a la enseñanza aprendizaje de las fracciones en la educación Primaria. Un foco particular de este módulo era información relativa a las diferentes interpretaciones de las fracciones y sus diferentes modos de representación con énfasis particular en el papel que desempeña la idea de unidad y cómo generar unidades para poder contar en la construcción del significado de fracción.

2.2. INSTRUMENTOS

Los EPM respondieron un cuestionario con 4 tareas (Figura 1) basadas en representar fracciones impropias en dos sistemas de representación distintos: La recta numérica y el uso de figuras geométricas (rectángulos). Las tareas 1 y 2 piden localizar una fracción en la recta numérica dando como datos la posición 2/5 y 3/5, respectivamente, y el segmento comprendido entre el 0 y dicha fracción está divido en 4 subsegmentos. Ambos datos son fracciones propias pero la diferencia está en que en la tarea 1 el numerador de la fracción dada es par y coincide con el número de subdivisiones del segmento dado (subsegmentos), y en la tarea 2 el numerador es impar mientras que el número de divisiones del segmento dado sigue siendo par. En la Tarea 1 como el denominador de la fracción 2/5 es par y el segmento está dividido en 4 subsegmentos facilita localizar la fracción unitaria (1/5) considerada como dos de las subdivisiones dadas para poder contar hasta llegar a X. Este proceso permite considerar la fracción unitaria como una unidad iterativa para poder contar. Sin embargo, en la tarea 2 el número de divisiones del segmento es par (4) pero el numerador es impar lo que dificulta encontrar la fracción unitaria y hay que buscar otras fracciones como unidades iterativas para poder contar y llegar hasta X.

La tarea 3 presenta una fracción propia (2/3) representada por 3 rectángulos. En esta situación la fracción unitaria 1/3 está formada por un rectángulo y medio y por tanto la unidad es 4 rectángulos y medio. La representación en esta situación de la fracción impropia (3/2) implica superar el obstáculo que generan muchos estudiantes de considerar que la unidad debe estar representada solo por una pieza. El objetivo de esta tarea es determinar de qué manera los estudiantes coordinan la construcción de las fracciones unitarias y la identificación de la unidad para representar fracciones impropias.

Finalmente la tarea 4, representa inicialmente una fracción impropia (7/5) como una parte más pequeña que una figura geométrica (un rectángulo). La tarea pide representar otra fracción impropia (11/10) cuya resolución implica tener que identificar previamente la unidad, posiblemente a través de la identificación de la fracción unitaria y mediante su iteración reconstruir la unidad para poder luego representar la fracción pedida. Esta tarea tiene como objetivo obtener información sobre cómo los estudiantes coordinan el proceso de identificar una fracción unitaria (1/5) a partir de una fracción impropia (7/5) en un contexto continuo (el rectángulo) para reconstruir una representación de la unidad a partir de la cual permita identificar otra fracción unitaria (1/10) para reconstruir la fracción impropia pedida (11/10).

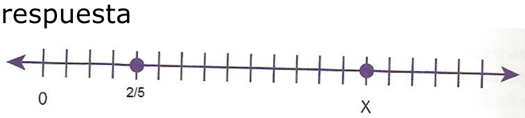
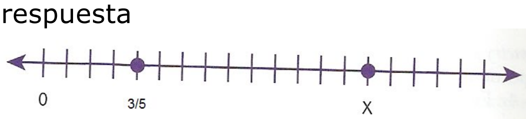
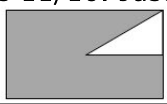
1. Indica qué punto es el X en la siguiente recta numérica. Justifica tu respuesta  	2. Indica qué punto es el X en la siguiente recta numérica. Justifica tu respuesta 
3. Los siguientes rectángulos son 2/3 de la unidad. Representa 3/2 y justifícalo. 	4. La parte sombreada del dibujo representa los 7/5 de la unidad. Representa los 11/10. Justifícalo. 

Figura 1. Tareas del cuestionario sobre la idea de unidad.

2.3. ANÁLISIS

Inicialmente identificamos y categorizamos los procedimientos usado por los estudiantes para resolver cada una de las tareas. El foco de atención fue considerar la manera en la que los estudiantes identificaban y usaban fracciones unitarias o no para representar la fracción pedida. En las dos primera tareas usando como soporte la recta numérica, y en las otras dos tareas determinado cómo los estudiantes reconstruían la unidad a partir de los datos dados y eran capaces de coordinar el significado de la fracción unitaria usada con la representación generada en cada caso. Siguiendo este procedimiento generamos un sistema de categorías para los procedimientos empleados centrándonos en cómo los estudiantes eran capaces de encontrar una fracción que le permitiese contar (es decir, usada como una unidad iterativa) para reconstruir la unidad (en caso de ser necesario como en el caso de las tareas 3 y 4) y luego usar dicha unidad para representar la fracción pedida.

3. RESULTADOS.

En este apartado mostramos los resultados obtenidos para cada una de las tareas. En primer lugar se explicarán las estrategias correctas e incorrectas obtenidas para las tareas de la recta numérica y en segundo lugar las estrategias usadas en la resolución de las tareas relacionadas con las figuras geométricas (contexto continuo o área). En ambos casos, el objetivo es describir cómo los estudiantes identifican una fracción como referencia para contar de forma iterativa para representar una fracción impropia.

3.1. TAREAS: RECTA NUMÉRICA

Estrategias correctas

La tarea 2 resultó más difícil para los estudiantes que la tarea 1. Los estudiantes usaron 3 estrategias correctas que muestran usos diferentes de las fracciones unitarias o las fracciones propias como unidades iterativas. Estas estrategias tuvieron diferentes manifestaciones en las dos tareas debido a la relación entre la fracción dada (2/5 y 3/5) y la cantidad de subsegmentos en los que se había dividido cada una de las partes de la recta numérica que representaba la fracción dada (4 subsegmentos en el caso de 2/5 y 4 subsegmentos en el caso de 3/5).

Tabla 1. Estrategias correctas para las tareas 1 y 2 (recta numérica)

	Tarea 1	Tarea 2
Identificación y uso de fracciones unitarias como unidades iterativas: "identifican dos subsegmentos como 1/5" "identifican 1 subsegmento como 1/10"	43	
Identificación y uso de fracciones propias (construcción de una fracción propia) como unidades iterativas "Identifican 2 subsegmentos como 3/10" "Identifica 1 subsegmento como 3/20" (en la recta numérica o buscando fracciones equivalentes a 3/5 hasta llegar a 3/20)		8
Uso iterativo de la fracción propia dada más idea de operador "Suma repetida de 2/5 (hasta 6/5), más ½ de 2/5 (idea de operador)" "Suma repetida de 3/5 (hasta 9/5), más ½ de 3/5 (idea de operador)"	1	4
Otros (nueva partición para llegar a X)		1
TOTAL	44	13

La estrategia usada por la mayoría de los EPM (43) fue identificar la fracción unitaria y usar ésta como fracción iterativa para contar. La Figura 2 muestra una respuesta típica. En el uso de esta estrategia, 38 EPM identificaron que dos subsegmentos eran 1/5 y la usaron como fracción unitaria para contar de forma iterativa hasta llegar a X. Otros 5 EPM identificaron uno de los subsegmentos en la recta numérica como 1/10 usándola como fracción unitaria para contar reiteradamente hasta llegar a X.

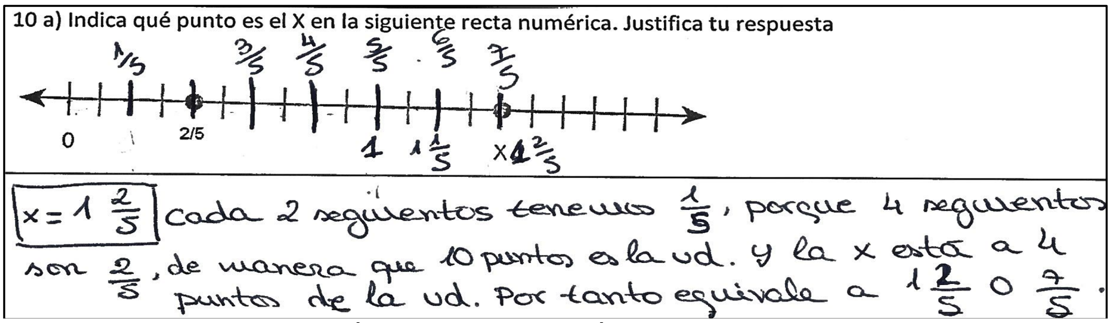


Figura 2. Identificación y uso de la fracción unitaria como unidades iterativas.

En la tarea 2, como el numerador era impar dificultaba encontrar una fracción unitaria. Este hecho hizo que los EPM buscaran otra fracción propia que les permitiese usarla como fracción iterativa para llegar a la solución (Figura 3). En este caso 4 EPM seleccionaron 2 subsegmentos como 3/10 al dividir 3/5 entre 2, y 4 EPM buscaron el valor de un subsegmento, siendo éste 3/20. Para conseguir estas fracciones propias, o bien, hicieron las divisiones correspondientes respecto la fracción 3/5 o bien, buscaron fracciones equivalentes a ésta para deducir cuánto correspondía a un subsegmento.

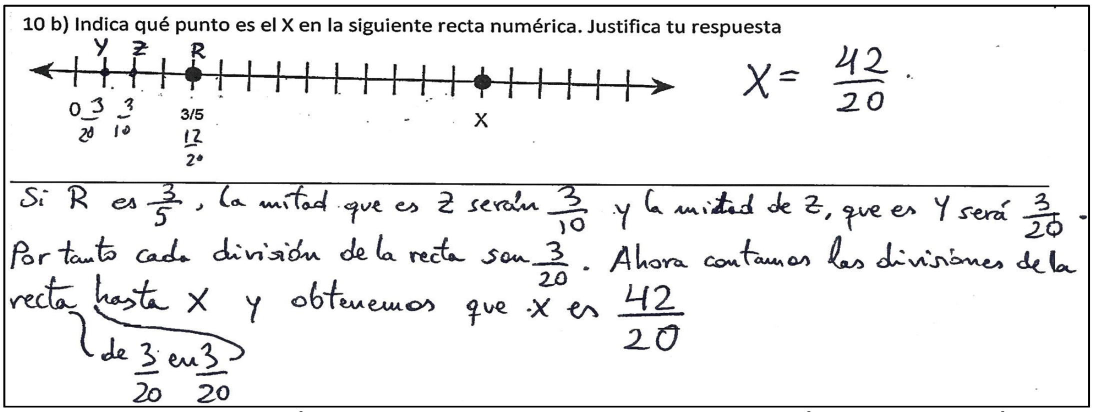


Figura 3. Identificación y uso de fracciones propias (construcción de una fracción propia).

La siguiente estrategia usada de manera menos usual fue sumar repetidamente la fracción dada y aplicar la idea de operador para poder llegar a la posición donde se encontraba la X (Figura 4). Los EPM usaron la fracción propia dada como unidad iterativa directamente y luego aplicaron la idea de operador haciendo la mitad de dicha fracción, es decir, ½ de 2/5 o ½ de 3/5, para llegar a la solución.

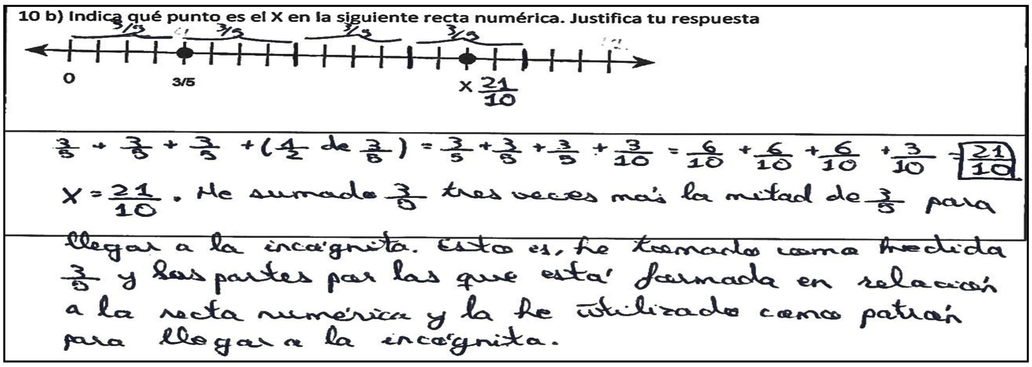


Figura 4. Uso iterativo de la fracción propia dada más idea de operador.

Estrategias incorrectas

Las estrategias incorrectas se han clasificado en 3 categorías (Tabla 2). Las estrategias incorrectas usadas en ambas tareas de la recta numérica han sido el uso de un todo arbitrario (Figura 5), el no ser capaces de identificar la fracción unitaria (Figura 6) y ser capaces de usar fracciones como unidad iterativa pero sin representar parte de la fracción dada (Figuras 7 y 8).

Cuando usaban un todo arbitrario (Figura 5), los EPM no tenían en cuenta el dato que proporcionaba la tarea para poder conocer la unidad, sino que consideraban su propio todo para usar una fracción unitaria y contar de forma iterativa hasta llegar a X.

Tabla 2. Estrategias incorrectas en las tareas de "Representación de una fracción en la recta numérica"

	Tarea 1	Tarea 2
Usan un todo arbitrario	5	6
No identifican bien la fracción unitaria	3	8
Uso de fracciones como unidad iterativa pero sin saber representar parte de la fracción dada		13
Otros (en blanco o sin sentido)	4	16
TOTAL	12	

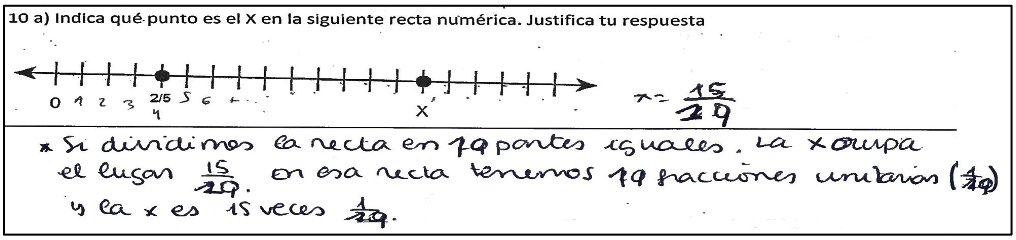


Figura 5. Uso de un todo arbitrario.

Por otro lado, hubo estudiantes que no habían dotado de sentido a la recta numérica como representación de los números (Figura 6). En este caso, los estudiantes no sabían usar la recta numérica como una representación de las fracciones como números. Por ejemplo, estos estudiantes contaban rayas en lugar de subsegmentos, realizaban nuevas particiones erróneas o agrupaban conjuntos de diferentes tamaños para contar de forma iterativa (al contar por ejemplo el 0 como parte de ese grupo).

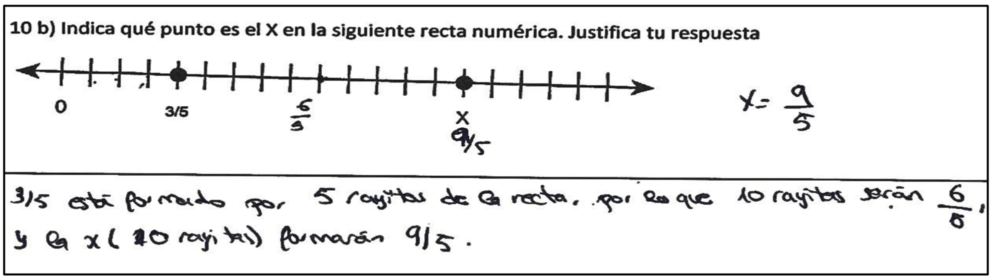


Figura 6. No identifica bien la fracción unitaria.

La estrategia errónea más frecuente en la tarea 2 es usar como fracción iterativa la propia dada por la tarea sin saber por lo tanto llegar a la solución dado que la X no se encontraba en un lugar múltiplo de 4 (la fracción dada se encontraba 4 subsegmentos después del 0). Es decir, los EPM contaban de forma iterativa de 3/5 en 3/5 pero no sabían continuar cuando llegaban a 9/5, dado que si continuaban se pasaban (Figura 7). En estos casos algunas veces los estudiantes "violaban" la manera de representar las fracciones usando números decimales mostrando cierta idea de medida en sus intentos por representar la fracción pedida (Figura 8).

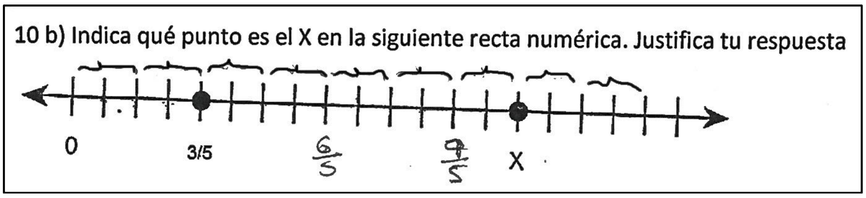


Figura 7. Uso de fracciones como unidad iterativa sin saber continuar

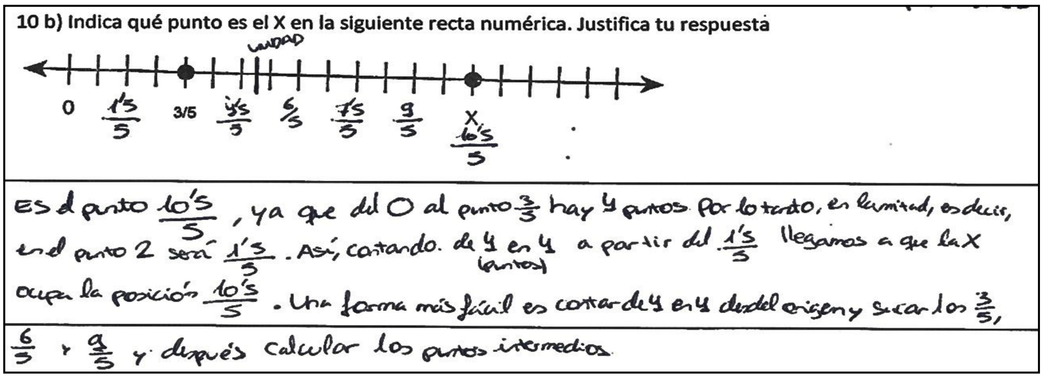


Figura 8. Uso de fracciones como unidad iterativa pero usando número decimales.

3.2. TAREAS USANDO FIGURAS GEOMÉTRICAS

Para resolver estas tareas se requería identificar y representar la unidad. Para ello había que identificar la fracción unitaria, reconstruir la unidad y representar la fracción impropia solicitada. Teniendo en cuenta esto, se clasificaron las estrategias según cómo reflejaban estos diferentes pasos (tabla 3).

Tabla 3. Estrategias usadas por los estudiantes en las tareas de reconstruir una fracción

	Tarea 3	Tarea 4
Paso 0. No identifica la unidad, ni la fracción unitaria.	25	33
Paso 1. Identifica la fracción unitaria pero no la unidad.	1	0
Paso 2. Identifica la unidad, pero no representa la nueva fracción.	14	7
Paso 3. Identifica la unidad, hace la nueva división y representa la fracción pedida.	16	16
TOTAL	56	56

Estas tareas han resultado difíciles ya que la mayoría de los estudiantes no llegaron a identificar la unidad ni la fracción unitaria (Paso 0). En este caso los estudiantes consideraban su propio todo o realizaban una partición errónea. La Figura 9 muestra una respuesta típica de este grupo.

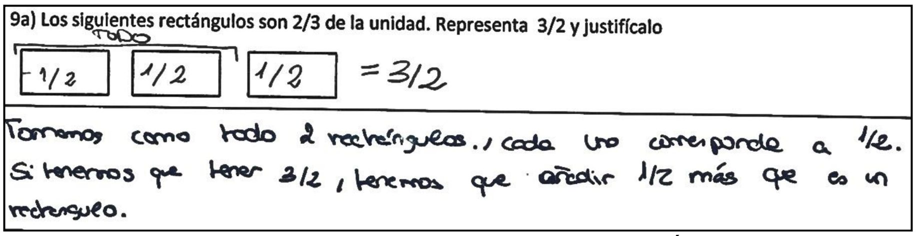


Figura 9. No identifica la unidad, ni la fracción unitaria.

Hay estudiantes que sí identificaron la fracción unitaria pero no fueron capaces de reconstruir la unidad (paso 1) (Figura 10).

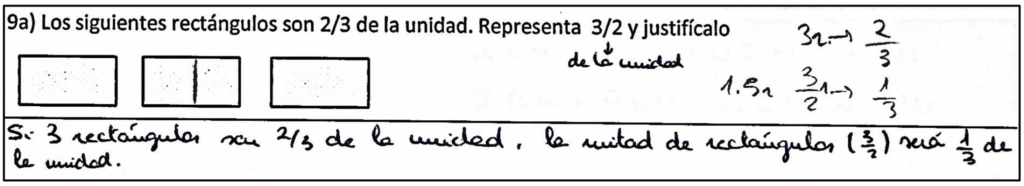


Figura 10. Identifica la fracción unitaria pero no la unidad.

Otros estudiantes identificaron la fracción unitaria y representaron la unidad, sin embargo no fueron capaces de representar la fracción impropia pedida (paso 2) (Figura 11). Estos EPM suelen confundirse al hacer la nueva parición, cambian de modo de representación realizando una partición errónea o usan estrategias sin sentido para poder continuar.

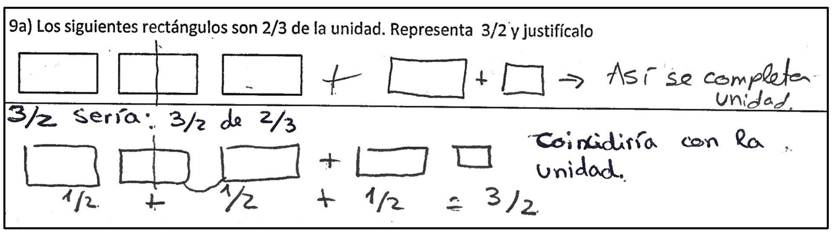


Figura 11. Paso 2. Identifica la unidad, pero no representa la nueva fracción.

En este grupo también están los EPM que han conseguido identificar la fracción unitaria, a partir de ella la unidad, luego han sabido realizar la nueva partición (parte sombreada en la Figura 12), pero se equivocan a la hora de usar como una unidad iterativa la fracción propia identificada para representar la fracción impropia pedida (paso 3).

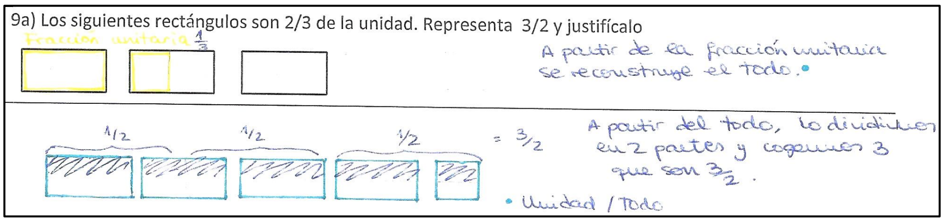


Figura 12. Identifica la unidad, hace la nueva división pero no representa bien la nueva fracción.

Finalmente, están los EPM que resolvieron la tarea con éxito (paso 4), es decir, identificaron la fracción unitaria, con esta representaron la unidad, identificaron la nueva fracción unitaria realizando una nueva partición y usaron esta nueva fracción para contar y poder representar la fracción impropia pedida (Figura 14).

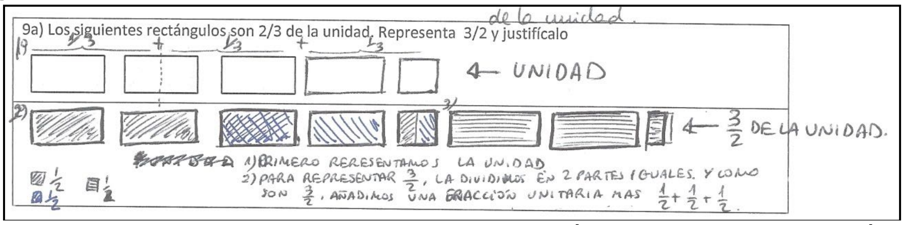


Figura 14. Identifica la unidad, hace la nueva división y representa la fracción pedida.

4. DISCUSIÓN.

Este estudio tiene como objetivo identificar características del conocimiento de los futuros maestros en relación al papel que desempeñan los diferentes modos de representación en apoyar el desarrollo de los esquema cognitivos vinculados al aprendizaje de las fracciones. El foco específico ha sido la manera en la que, en diferentes modos de representación (recta numérica y figuras geométricas), los futuros maestros podían llegar a coordinar la posibilidad de identificar fracciones unitarias para reconstruir la unidad o representar fracciones impropias. Este tipo de tareas permiten mostrar que el conocimiento de matemáticas del maestro debe vincularse a los aspectos del aprendizaje que él debe apoyar en sus alumnos. De esta manera, si los maestros deben apoyar la coordinación de diferentes unidades para poder representar fracciones impropias como un aspecto del aprendizaje de sus alumnos, es necesario que ellos puedan llegar a reconocer el papel que desempeña la identificación y uso de fracciones propias como unidades iterativas en la representación de las fracciones impropias.

Considerando este aspecto los resultados de esta investigación indican que el conocimiento de los futuros maestros de los modos de representación (recta numérica y figuras geométricas) debe estar vinculado a la generación de unidades iterativas. En este caso, tanto con la recta numérica como con el uso del rectángulo se ha mostrado que ser capaces de identificar y usar fracciones (tanto unitarias como propias) para reconstruir fracciones impropias puede resultar difícil para los maestros. Es por tanto que la caracterización de este aspecto como un elemento del conocimiento de matemáticas pertinente para la enseñanza resulta clave para la mejora en la preparación de los maestros.

Esta línea de trabajo está aportando información sobre cómo entender el conocimiento especializado de contenido matemático de los maestros (Buforn y Fernández, 2013) que puede ayudar a introducir mejoras en la manera en la que entendemos el aprendizaje de los futuros maestros de las matemáticas y de la manera de conocerlas, que les pueden ser útiles para ser competentes en la enseñanza de las matemáticas.

5. RECONOCIMIENTO.

Esta investigación ha recibido el apoyo del Proyecto I+D+i EDU2011-27288 del Ministerio de Ciencia e Innovación, España.

REFERENCIAS.

BUFORN, A. y FERNÁNDEZ, C. (2013). Razonamiento proporcional: Conocimiento especializado de contenido matemático en estudiantes para maestro de primaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 185-192). Bilbao: SEIEM.

BUFORN, A. y FERNÁNDEZ, C. (2014). Conocimiento de matemáticas especializado de los estudiantes para maestro de primaria en relación al razonamiento proporcional. *BOLEMA, 28*(48), 21-41.

HACKENBERG, A. (2007). Units coordination and the construction of improper fractions: A revision of the splitting hypothesis. *Journal of Mathematical Behavior, 26*, 27-47.

LEE, S.J., BROWN, R. E. y ORRIL, Ch.H. (2011). Mathematics teachers' reasoning about fractions and decimals using drawn representations. *Mathematical Thinking and Learning, 13*(3), 198-220.

LIVY, S. y VALE, C. (2011). First year pre-service teachers' mathematical content knowledge: Methods of solution for a ratio question. *Mathematics Teacher Education and Development, 1*(2), 22-43.

NORTON, A. y WILKINS, J.L. (2009). A quantitative analysis of children's splitting operations and fractions schemes. J*ournal of Mathematical Behavior, 28* (2-3), 150-161.

STEFFE, L.P. y OLIVE, J. (2010). *Children's Fractional Knowledge.* Springer: New York.

TZUR, R. (1999). An integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning*. Journal for Research in Mathematics Education, 30*(4), 390-416.