REFLEXIONES SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA ESCUELA

Dr. Luis Campistrous Pérez, *Universidad Autónoma de Guerrero, Chilpancingo, Guerrero* celrizo@yahoo.com.mx

Dra. Celia Rizo Cabrera, *Universidad Autónoma de Guerrero, Chilpancingo, Guerrero* luis.campistrous@yahoo.com.mx

RESUMEN

En este trabajo se pretende reflexionar desde posiciones didácticas sobre el trabajo con problemas en las aulas de la educación primaria y secundaria; en los últimos tiempos mucho se ha investigado y escrito acerca de la actividad de resolución de problemas, nosotros no pretendemos hacer aportes novedosos sino, a partir de los resultados teóricos y empíricos obtenidos con anterioridad, analizar el estado actual del trabajo en las aulas y considerar como pueden llevarse a la práctica escolar los resultados de las investigaciones.

Finalmente se discute el valor de las estrategias enseñadas y su contraposición con procedimientos generalizados que el escolar construye, a veces como consecuencia del proceso de enseñanza aprendizaje y otras veces a pesar de dicho proceso.

Nivel educativo: Primaria.

1. ALGUNOS ANTECEDENTES

La Enseñanza de la Matemática posee una larga historia, ya que desde tiempos remotos se le considera como una asignatura necesaria para la formación de los jóvenes, básicamente para contribuir al desarrollo del pensamiento. Así Platón exigía el conocimiento de la Geometría como requisito para ingresar en la Academia porque consideraba que la geometría era indispensable para la formación del pensamiento de un filósofo.

En el mismo sentido, algunos historiadores han señalado que los **Elementos de Euclides** estaban destinados a servir de texto en la preparación de filósofos y que esa es la razón por la cual su organización destaca básicamente la estructura deductiva de la Geometría; según estos autores la elaboración durante cientos de años de manuales escolares al estilo de los Elementos constituye un error no sólo pedagógico sino histórico.

Esta situación se mantuvo cuando las disciplinas matemáticas formaron parte de las siete artes liberales en la época medieval y continúa en la escuela moderna en la que entre los objetivos de la Matemática aparece en primer lugar el desarrollo del pensamiento lógico.

Dado este objetivo central, se entiende el papel especial que han desempeñado los problemas en la clase de Matemática ya que se comprende la resolución de problemas como una de las actividades básicas del pensamiento. Este peso de la resolución de problemas en la enseñanza de la Matemática puede seguirse hasta los primeros documentos matemáticos que se conservan, ya que algunos autores consideran que los problemas contenidos en las tablillas mesopotámicas y los papiros egipcios son problemas escolares.

- En todo este período histórico las razones para considerar los problemas dentro de la enseñanza han sido muy semejantes:
- Desarrollar el pensamiento, en particular la capacidad de resolución de problemas. Justificar la importancia de la Matemática y del tema que se desarrolla mostrando su aplicación a diferentes situaciones de la vida o de la técnica.
- Motivar el estudio de un tema sobre la base de presentar problemas que sean capaces de atraer la atención de los alumnos.
- Introducir nuevos contenidos, en particular aquellos que pueden ilustrarse con
- ciertos "problemas tipo".
- Fijar algunos procedimientos matemáticos que han sido explicados en el aula, preferentemente procedimientos de cálculo.

Como puede apreciarse en esta apretada síntesis de razones, el aprender a resolver problemas no ha figurado como una de esas razones durante un largo período de tiempo. Realmente hay que decir que la creencia predominante durante siglos fue el que se aprende a resolver problemas por imitación, es decir, viendo resolver problemas e imitando las actitudes y el proceder del que resuelve. No puede negarse que esta vía y también la de ensayo y error puede servir a algunas personas para aprender, pero la escuela no está hecha para que algunos aprendan, sino para que todos aprendan y, obviamente, con estos procedimientos no puede lograrse que todos aprendan.

Realmente a lo largo de la historia no ha habido preocupación no sólo por enseñar a resolver problemas, sino ni siquiera por analizar los procedimientos de resolución. Esta regla general tiene muy pocas excepciones, las más ilustres de las cuales son referencia obligada de cualquier recuento de este tipo: Arquímedes, Pappus, Descartes.

Si bien desde la época del pensamiento clásico griego se encuentran referencias sobre la metodología para resolver problemas, no es hasta principios del pasado siglo que se encuentran las primeras recomendaciones a los alumnos, los primeros intentos por "enseñar" a resolver problemas. Estos primeros intentos consisten básicamente en una serie de recomendaciones formales que intentan fijar la atención del alumno sobre la pregunta, leer cuidadosamente, encontrar datos, meditar la respuesta. Este tipo de recomendación se hace tan fuerte que en algunos de nuestros países se convierten en un esquema formal exigido para resolver problemas y sin ninguna consecuencia sobre el pensamiento. Se trata del esquema: ***datos, planteo, cálculo, respuesta.***

Un hito fundamental en la enseñanza de la resolución de problemas lo marca el año 1945 con la publicación de la obra **How to solve it?** de George Polya. Con la publicación de esta obra maduran las ideas de este autor que había venido desarrollándolas durante un cuarto de siglo y en ella, por primera vez se ilustra un camino didáctico hacia la enseñanza de la resolución de problemas.

El camino propuesto por Polya redescubre y desarrolla la **Heurística,** que se puede hacer remontar hasta Pappus, y precisa una serie de estrategias que deben constituir una herramienta fundamental en la enseñanza de la resolución de problemas. No obstante su relevancia y el vacío que viene a llenar este trabajo, sus ideas no comenzaron a tener una influencia generalizada hasta la década de los años 80, una vez que se fijó la atención en la resolución de problemas como una actividad esencial en la enseñanza de la Matemática.

Consideradas aisladamente las estrategias de Polya que fueron popularizadas, son realmente fundamentales y funcionan al resolver problemas. Entre ellas podemos encontrar las siguientes:

- **Analizar lo que se da y lo que se busca.**
- **Dibujar una figura.**
- **Separar una condición en partes.**
- **Considerar casos especiales.**
- **Pensar en un problema más simple.**
- **Considerar el problema resuelto.**

Se impone entonces una reflexión sobre el porqué no transforman radicalmente la situación en la escuela, y la popularidad no llega realmente al salón de clases.

Quizás una parte de la explicación radica en el hecho de que las estrategias, tal y como han sido formuladas por Polya y trasladadas a las aulas, a partir del boom de los 80, son fácilmente reconocibles por los matemáticos pero no son igualmente familiares y accesibles a los alumnos.

Otro aspecto a considerar es que las estrategias, en principio, se ofrecen a los maestros como una forma de ayuda a sus alumnos; es decir**, no se elabora un procedimiento para que los alumnos elaboren estrategias o se apropien de algunas, sino que se utilizan de manera externa, como algo que existe y que el profesor utiliza en apoyo a su trabajo.**

Desde nuestro punto de vista otro aspecto a tener en cuenta es que las estrategias tienen naturaleza heurística y no algorítmica, pero la escuela tiene miles de años de experiencia en la enseñanza de algoritmos pero ni uno en la enseñanza de procesos heurísticos.

Por otra parte, a pesar de las declaraciones y de los enfoque de la enseñanza basados en la resolución de problemas, en el aula **no se ha llegado a convertir la resolución de problemas en objeto de enseñanza,** predominan las formas tradicionales de trabajo con problemas y los alumnos crean sus propios significantes para la resolución de problemas, desarrollan creencias que limitan sus posibilidades y forman estrategias de trabajo que no son exitosas.

2. CONCEPTO DE PROBLEMA. PROBLEMAS ESCOLARES.

Antes de continuar es necesario aclarar a qué nos referimos cuando hablamos de problema; en este sentido en la literatura existen diversas acepciones atendiendo a diferentes puntos de vista. En las investigaciones que hemos realizado al respecto asumimos como concepto el que aparece recogido en el libro "Aprende a resolver problemas aritméticos" del cual somos autores: **Se denomina problema a toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo. La vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida tiene que ser desconocida y la persona debe querer hacer la transformación.**

Desde el punto de vista didáctico, la anterior definición es muy importante, pues en la selección de los problemas a proponer a un grupo de alumnos hay que tener en cuenta no solo la naturaleza de la tarea, sino también los conocimientos que la persona requiere para su solución y las motivaciones para realizarla. En ambos casos, lo antes planteado significa que lo que puede ser un problema para una persona puede no serlo para otra, o bien porque ya conozca la vía de solución o porque no esté interesado en resolverlo.

Los rasgos generales del concepto de problema que se asume en este trabajo, en realidad no se hacen muy visibles en los materiales y libros para alumnos y docentes, pues en ellos se utiliza más el concepto clásico de **problemas escolares** y no al de problema en su acepción más amplia.

Estos problemas escolares tienen características específicas en cuanto a que por lo general son situaciones didácticas que asumen, en mayor o menor grado, una forma problémica cuyo objetivo principal es la fijación o aplicación de los contenidos de una asignatura dada (conceptos, relaciones y procedimientos), y que aparecen regularmente en el contexto de los programas que se quieren trabajar. Estos problemas escolares son tipificados, en mayor o menor medida, y para cuya solución se desarrollan procedimientos más o menos **rutinarios.**

Los procedimientos de solución y, por extensión, los problemas se consideran **rutinarios** cuando en el proceso de resolución se pueden encontrar las vías de solución de una manera directa en el propio contenido de la asignatura que se aborda en la escuela, y en ellos se emplean procedimientos que no llegan a ser propiamente algorítmicos, pero tampoco llegan a ser procedimientos heurísticos de búsqueda abierta, sino de una determinación o selección entre dos o más rutinas ya preestablecidas que sí son, por lo general, procedimientos algorítmicos o cuasi algorítmicos.

Schöenfeld [2] referido por Santos Trigo[3], ubica este tipo de procedimiento a un nivel táctico y lo separa de las habilidades a nivel estratégico. Para él, los de carácter estratégico incluyen decisiones acerca de un plan para resolver un problema y la evolución de éste durante el proceso de solución. Así, cuando el estudiante tiene acceso a un procedimiento rutinario generalmente no incluye decisiones estratégicas y el monitoreo o control del proceso se vuelve importante solo cuando hay un error en la implantación de estos procedimientos rutinarios.

Si revisamos los libros de texto para los alumnos nos encontramos que la inmensa mayoría de los problemas que se consideran son rutinarios, así tenemos los problemas clásicos de fracciones y tanto por ciento en la escuela primaria, que los alumnos los resuelven desplegando un proceder aprendido casi en forma algorítmica y donde prácticamente no es necesario ningún procedimiento de búsqueda

Otros ejemplos los encontramos en los problemas de demostración de igualdad y semejanza de triángulos, en los que aparentemente hay una exigencia intelectual elevada pues se trata de "demostraciones" pero que en la práctica sólo es un proceso de búsqueda entre parejas de elementos iguales y arribar a una conclusión completamente estereotipada.

La solución de los problemas que conducen a ecuaciones o a fórmulas son otro ejemplo típico de este proceder rutinario, y lo más lamentable es que después que adquieren estas herramientas tan poderosas las utilizan indiscriminadamente en situaciones que requieren recursos menos potentes para resolverlas. Un ejemplo de lo que estamos planteando se presenta a diario en problemas como el siguiente que apareció en una prueba de ingreso a la Universidad en nuestro país y que dice lo siguiente:

En un cierto país para pasar un telegrama hay que pagar una cantidad fija por las 10 primeras palabras y una cantidad adicional por cada palabra por encima de las 10. Si por 15 palabras se pagaron $11.65 y por 19 palabras se pagó $14.57, ¿cuál es el precio fijo y cuál es el precio de cada palabra adicional?

La respuesta esperada es el planteo de un sistema de ecuaciones donde las incógnitas son el precio de las palabras fijas (x) y el precio de cada palabra adicional (y):

$x + 5y = 11.65$; $x + 9y = 14.57$ En este caso el recurso algebraico es completamente innecesario pues tiene una solución aritmética trivial:

$14.57 - 11.65 = 2.92$ $2.92 : 4 = 0.73$ (costo de cada palabra adicional)

$14.57 - 9(0.73) = 8$ (costo de las 10 palabras iniciales).

Los procedimientos de solución **no rutinarios** son entonces aquellos en los que se exige un proceso de búsqueda propiamente heurístico. Quizás no sea fácil encontrar problemas escolares con esas características, pero esa es una tarea importante de la Didáctica de la Matemática. Aunque estos conceptos de rutinarios y no rutinarios también pueden ser relativos, en dependencia del campo de experiencia del sujeto al cual se le plantea una situación dada, se pueden encontrar ejemplos, aún dentro de un contexto donde históricamente los problemas son rutinarios como es el caso del trabajo con fracciones y el tanto por ciento:

En sentido general, somos del criterio de que para lograr que los alumnos aprendan a resolver problemas, es necesario plantear problemas no rutinarios, aunque para no provocar una ruptura entre los hábitos ya establecidos en la escuela que se acercan mucho a la solución de problemas rutinarios, en las diferentes investigaciones que hemos realizado se han utilizado problemas escolares rutinarios y algunos no rutinarios que den mayores posibilidades para el desarrollo de estrategias de solución reflexivas mediante el empleo de técnicas que deben ser objeto de estudio, también es conveniente atender a:

- La utilización de un **pensamiento lógico** no asociado estrictamente a las operaciones aritméticas.

- La **sistematicidad** de su pensamiento y la cualidad de la **perseverancia** que le haga seguir una línea de trabajo sin cansarse, hasta que consiga una solución o vea que el camino emprendido no le lleva a ningún sitio.
- El **gusto de la exploración matemática**, encontrando placer hasta cuando se equivoca, y la ilusión de emprender un nuevo camino distinto al anterior si aprecia que éste no es el correcto.
- **Apertura de pensamiento** para llegar a entender que un problema puede tener una, muchas o ninguna solución, sin que por ello sea más o menos valioso.
- Las **estrategias o recursos heurísticos** específicos más significativos que pueden ser empleados en la solución de problemas y que deben ser enseñados como un contenido más.

Generalmente se piensa que es muy difícil plantear en la escuela problemas no rutinarios que estimulen el pensamiento de los alumnos, nosotros consideramos que sí es posible y una de las principales tareas al resolver problemas es precisamente la selección de un sistema de problemas no rutinarios que permitan la introducción de las estrategias y técnicas de resolución.

Como ejemplos de problemas que no son rutinarios y que pueden ser utilizados como vía para lograr que los alumnos desarrollen sus propias estrategias de resolución de problemas y aprendan a hacerlo proponemos los siguientes:

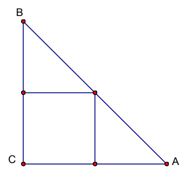


Figura 1a)

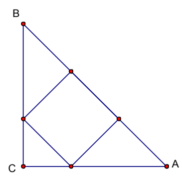
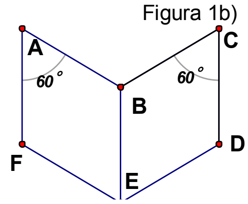


Figura 1b)

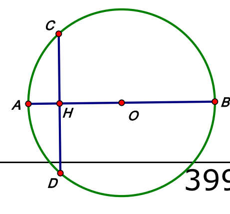
- En un triángulo rectángulo isósceles de cateto a se inscribe un cuadrado de dos formas diferentes como muestra la figura 1. En la figura 1a) el área del cuadrado es 441 cm2, ¿cuál es el área del cuadrado en la figura 1b)?



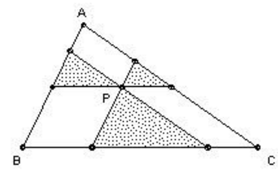
- En la figura todos los lados miden 1 cm y los segmentos AF, BE y CD son paralelos. ¿Cuál es su área?
- Seis bolsas con canicas contienen 18, 19, 21, 23, 25 y 34 canicas respectivamente. Una bolsa está llena de canicas rojas y ninguna otra contiene canicas de ese color. Rosa toma dos bolsas y Jorge tres de modo que solo queda la bolsa con canicas rojas. Si Jorge tiene doble número de canicas que Rosa, ¿cuántas canicas rojas hay?

	2	4	6	8
1	1	1	1	
6	4	2	0	
	1	2	2	2
	8	0	2	4
3	3	2	2	

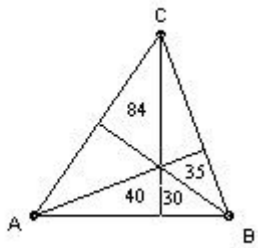
- Los números naturales pares se disponen en un arreglo rectangular como se muestra. ¿En cuál columna se escribe 2014?
- ¿Cuántos números de dos dígitos tienen la propiedad de que la suma del número con el el obtenido invirtiendo sus cifras es un cuadrado perfecto?



- El diámetro AB y la cuerda CD son perpendiculares en H. Ambas tienen longitudes enteras, la longitud de AB es un número de dos dígitos y la de CD se obtiene invirtiendo el orden de las cifras. La longitud de OH es un racional no nulo, Hallar AB.
- Hallar el número natural, n, más pequeño tal que 15n se escribe sólo con 0 y 8.
- En el triángulo ABC se escoge un punto interior P y por él se trazan paralelas a los lados, quedan determinados 3 triángulos con vértice común P de áreas 4, 9, y 49. ¿Cuál es el área de ABC?



- ¿Cuál es el mayor natural par que no se puede escribir como suma de dos naturales impares compuestos?
- En el triángulo ABC se determina un punto exterior P y por él se trazan 3 cevianas concurrentes. Algunos de los triángulos tienen las áreas mostradas, hallar el área del triángulo ABC.



- ¿Cuál es el diámetro de la circunferencia determinada por los puntos medios de los lados de un triángulo?
- De un triángulo se conocen dos lados a y b y que la altura relativa al tercer lado es la suma de las otras dos. Hallar el tercer lado
- En el triángulo AMC, $\angle M = 60^{\text{o}}$, $\angle C = 10^{\text{o}}$. Desde el vértice M se traza el segmento MB ($B \in AC$) de modo que $\angle MBA = 50^{\text{o}}$. Probar que se cumple $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ donde $a = |MA|, b = |MB|, c = |MC|$
- En la circunferencia de centro O y radio R se traza un diámetro AB. Otra circunferencia de radio r es tangente a AB en M y a la circunferencia de centro O. Calcular $AM \cdot MB$.
- Calcular la longitud del segmento que une los puntos medios de las diágonales de un trapecio.
- AX y BX son ángulos adyacentes de un polígono regular. ¿Cuántos lados tiene el polígono?
- Dos circunferencias son tangentes interiormente, desde el punto de tan^gencia se traza una cuerda de la mayor. La circunferencia interior divide en dos partes a dicha cuerda, cuál es la mayor razón entre esas partes al variar la cuerda.
- Los lados de un triángulo están en progresión aritmética. Probar que dos de sus ángulos son menores que 60$^{\text{o}}$.

- Sean m_a y m_b las medianas relativas a los catetos de un triángulo rectángulo, probar que: $\frac{1}{2} < \frac{m_a}{m_b} < 2$.
- Hallar en qué año nacieron las personas que este año cumplen tantos años como indica la suma de las cifras de su año de nacimiento.
- Demostrar que la suma de dos números primos gemelos mayores que 3 es divisible por 12.
- Demostrar que la diferencia de los cuadrados de dos números enteros que no son divisibles por 2 ni por 3, es múltiplo de 24.

3. CONCLUSIONES.

En este trabajo asumimos que **TODOS PODEMOS RAZONAR MATEMÁTICAMENTE,** tal como se plantea en la Agenda para la Acción. Dentro de este planteamiento se asume también que "la resolución de problemas debe ser el eje de la enseñanza de las matemáticas". Esta fue la primera recomendación hecha por el NCTM en abril de 1980 y ha sido asumida como objetivo prioritario de la educación matemática por la mayoría de los países.

Con respecto a la resolución de problemas la misma abarca muchas funciones rutinarias y triviales, así como otras poco corrientes que se consideran esenciales en la vida diaria de los ciudadanos. Es considerada una capacidad específica de la inteligencia, por tanto, si la educación debe contribuir al desarrollo de ésta, es fundamental incidir en su desarrollo a través de la educación.

El papel del docente en la dirección del proceso de enseñanza aprendizaje en general, y en particular en la solución de problemas debe dar paso a otras formas de organización del aula, complementarias y alternativas a las existentes que permitan que el alumno sea un ente activo, reflexivo y que su aprendizaje tenga significado para él. Estas características antes planteadas son esenciales para el desarrollo de ese alumno y sus posibilidades de razonar matemáticamente.

REFERENCIAS.

Alanís Musito, José de Jesús. El papel de los significados en la solución de problemas aritméticos en la escuela primaria. Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de Guerrero. México. Noviembre de 1995.

Bazán Z. A., Chalini H.A. Estrategias utilizadas por estudiantes egresados de secundaria en la resolución de problemas matemáticos. Revista Especializada de Educación Pedagogía. Tercera Época. Vol. 10. Núm. 6. Invierno 1995. México.

Ballester, Sergio y otros, Metodología de la enseñanza de la Matemática, México 1995;

Cabañas, Ma. Guadalupe. La técnica de la modelación como un recurso para aprender a resolver problemas. Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de Guerrero. México. Julio de 1995.

Campistrous, L. y Celia Rizo. Aprende a resolver problemas aritméticos. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1997.

Campistrous, L. y Celia Rizo. Los significados y la modelación en la resolución de problemas aritméticos. México 1997.

De Guzmán, M. Gil, P.D. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática: tendencias e innovaciones. Madrid. Popular. 1993.

Gómez Otero, Enrique Javier. Caracterización de algunas estrategias para resolver problemas aritméticos en primero y segundo grados de la escuela primaria. Un estudio de casos. Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de Guerrero. México. Julio de 1995

Johnson, D.A. Un modelo para la investigación en la clase de matemáticas. Revista "El maestro de matemáticas". No. 59. USA. 1966.

Labarrere, A.F. Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria. Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. Cuba. 1987.

Matías Camacho Machín, Luz Manuel Santos Trigo, Ramón Depool Rivero La resolución de problemas, tecnología y comprensión del concepto de integral definida Uno: Revista de didáctica de las matematicas, ISSN 1133-9853, Nº. 63, 2013, págs. 50-68

Mónaco, Bárbara. S. Aguirre, Ma. Isabel. Caracterización de algunas estrategias para resolver problemas aritméticos y algebraicos en el nivel medio: un estudio de casos. Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de Guerrero. México. Diciembre de 1995

Orton, Anthony. Didáctica de las Matemáticas, España 1990;

Polya, G. Cómo plantear y resolver problemas. Editorial Trillas. México. 1976.

Polya, G. Matemática y razonamiento plausible. Editorial MIR Moscú. 1976

Polya, G. Descubrimientos matemáticos, URSS 1975

Polya, G. Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. Grupo Editorial Iberoamérica. 1996.

Porlán, Rafael Constructivismo y escuela, España 1993

Schöenfeld, A. H. Ideas y tendencias en la resolución de problemas. La enseñanza de las matemáticas a debate. Madrid. España. 1985.

Santos Trigo, Luz M. La solución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. CINVESTAV-IPN 1994.

Sowder, L. La selección de operaciones en la solución de problemas rutinarios con texto en la enseñanza y valoración de la solución de problemas. National Council of Teachers Mathematics. Vol. 3. USA. 1984.

Valenzuela, G.R. Resolución de problemas matemáticos: un enfoque psicológico. Educación matemática. México. D.F. Vol. 4. No.3. Diciembre de 1992.