COLOREANDO TRIÁNGULOS CON SENTIDO

Ildefonso Castro-Infantes, *Universidad de Granada (becario de investigación),* *icastroinf@correo.ugr.es*

Montserrat Infantes, *IES Santísima Trinidad (Baeza), montseinf@yahoo.es*

Ildefonso Castro, *Universidad de Jaén, icastro@ujaen.es*

RESUMEN.

Se propone un problema que sirva para motivar y afianzar el estudio de la Trigonometría Plana y para poder experimentar y sentir las Matemáticas asignando "con sentido" un color del modelo RGB a cualquier triángulo del plano.

El modo propuesto consiste en elegir una terna de números que provienen de los cocientes (dos a dos) de los lados del triángulo una vez ordenados de menor a mayor; cada término de la terna indicará el peso en rojo (Red), verde (Green) y azul (Blue) que componen el color asignado al triángulo en cuestión.

Se discute la bondad de la definición anterior y se ilustra con detalle y por separado en las clases de triángulos rectángulos, isósceles, acutángulos y obtusángulos. Acompañamos ilustraciones en color de numerosos ejemplos.

Nivel educativo: 4º de E.S.O. y/o 1º de Bachillerato.

1. INTRODUCCIÓN.

¿De qué color es un triángulo del plano? Esto podría parecer una pregunta sin sentido, pues ya dice el refrán que "para gustos, los colores" y probablemente no obtendríamos ninguna tendencia clara si planteásemos la anterior cuestión a una muestra de tamaño considerable.

En la Sección 2 realizamos una breve introducción a la teoría del color distinguiendo entre los colores luz y colores pigmento.

Pretendemos entonces idear un método de asignación de color al interior de un triángulo basándonos en el mejor de los sentidos: el matemático. Por tanto, debemos procurar una buena definición del "*color de un triángulo*" que, por ejemplo, no dependa de su posición en el plano. Por supuesto que existen infinitos triángulos, pero sería deseable que todos los semejantes tuviesen el mismo color, para que el color estuviese desligado también del tamaño del triángulo. Y tenemos infinitos colores si nos ceñimos por ejemplo a usar el modelo RGB que se basa en la composición del color en términos de la intensidad de los colores primarios de la luz (rojo (Red), verde (Green) y azul (Blue)) por síntesis aditiva (véase la Sección 2.1). En concreto, el software Mathematica® de Wolfram (http://www.wolfram.com/mathematica/) que se usa habitualmente por muchos matemáticos (y será el que nosotros emplearemos) permite colorear multitud de objetos gráficos haciendo uso del comando RGBColor[-,-,-], cuyos tres argumentos son escalares entre 0 y 1 que indican el peso de rojo, verde y azul –respectivamente- en la composición del color deseado según el modelo RGB citado.

Con este preámbulo la cuestión se dirige a encontrar una asignación con ciertos criterios –con "sentido"- entre un triángulo (que tiene tres lados y tres ángulos) y una terna de números entre 0 y 1 que unívocamente proporcione un color con presencia de rojo, verde y azul que deberá estar adaptada a los datos del triángulo. En la Sección 3.1, se propone una definición del color de un triángulo asignando la terna RGB proveniente de los cocientes (dos a dos) de los lados del triángulo una vez ordenados de menor a mayor. Estudiamos en detalle las correspondientes fórmulas distinguiendo triángulos rectángulos, isósceles, acutángulos y obtusángulos.

Finalmente, en la Sección 4 se ofrecen suficientes ilustraciones en color para hacerse una idea gráfica de la solución del problema planteado.

2. COLORES LUZ Y COLORES PIGMENTO.

La problemática del color y su estudio es muy amplia, pudiendo ser abordada desde el campo de la Física, la percepción fisiológica y psicológica, la significación cultural, el Arte, la industria, etc. El conocimiento que tenemos y hemos adquirido sobre el color en la escuela elemental proviene de las enseñanzas de la antigua Academia Francesa de Pintura que consideraba como colores primarios (aquellos que por mezcla producirán todos los demás colores) el rojo, el amarillo y el azul. En realidad, existen dos sistemas de colores primarios: *colores primarios luz* y *colores primarios pigmento*. El blanco y el negro son llamados colores acromáticos, ya que los percibimos como "no colores". Puede consultarse PASTOREU, M. y SIMONET, D. (2006) o SANZ, J.C. (2003) para ampliar información.

2.1. COLORES PRIMARIOS LUZ: SÍNTESIS ADITIVA.

Los colores producidos por luces (colores luz) tienen como colores primarios al rojo, al verde y al azul, cuya fusión de éstos crean y componen la luz blanca; por eso, a esta mezcla se le denominas *síntesis aditiva* y las mezclas parciales de estas luces dan origen a la mayoría de los colores del espectro visible (véase Figura 1). A este modo de trabajar el color se le denomina *código RGB (RedGreenBlue)* y al ser producidos por luz son los que se utilizan en el monitor de nuestro ordenador, en el cine, la televisión, etc.

Figura 1. Colores primarios luz.

2.2. COLORES PRIMARIOS PIGMENTO: SÍNTESIS SUSTRACTIVA.

Los colores llamados pigmento (Magenta, Cyan y Amarillo) son colores basados en la luz reflejada de los pigmentos aplicados a las superficies. La mezcla de estos colores se llama *síntesis sustractiva*, ya que con cada pigmento que se añade lo que hacemos es absorber más partes del espectro, es decir, más colores primarios, y el resultado final será la ausencia de luz: el negro (véase la Figura 2). Aunque la mezcla de los tres colores primarios pigmento debería producir en teoría el negro, el color más oscuro y de menor cantidad de luz, en la práctica el color así obtenido no es lo bastante intenso, motivo por el cual se le agrega el llamado "negro pigmento" conformándose de este modo el conocido como código de color CMYK(CyanMagentaYelowKey). Son los colores básicos de las tintas que se usan en la mayoría de los sistemas de impresión, motivo por el cual estos colores han desplazado en consideración a los colores primarios tradicionales. Los procedimientos de imprenta para imprimir en color, conocidas como tricomía y cuatricomía se basan en estos principios. Hacer notar que la mezcla de los colores luz producen los colores pigmento, y al revés (véanse las Figuras 1 y 2) en una especie de dualidad entre las dos situaciones.

Figura 2. Colores primarios pigmento.

3. LA FUNCIÓN COLOR DE UN TRIÁNGULO.

Para un triángulo cualquiera ABC usamos la notación estándar que supone que los lados opuestos a los ángulos A, B, C se notan respectivamente con las mismas letras minúsculas a, b, c (véase la Figura 3).

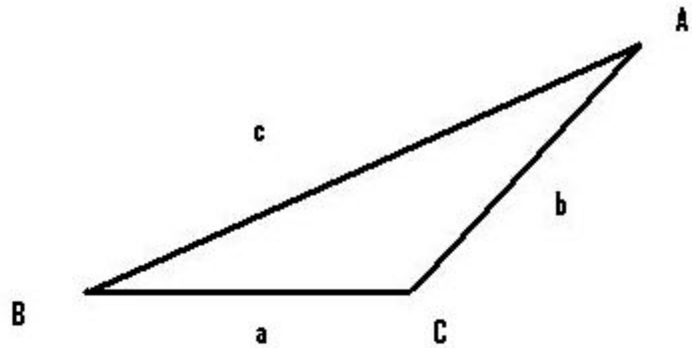

Figura 3. Notación para un triángulo cualquiera.

3.1. DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN COLOR.

Dado un triángulo cualquiera ABC, con lados ordenados por tamaño según

$$a \leq b \leq c$$

definimos la *función RGB-color* (o abreviadamente la *función color* C) de ABC mediante

$$C(ABC) = \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}\right)$$

Por la ordenación en el tamaño de los lados, la función color asigna a cada triángulo una terna de números positivos menores o iguales que 1; por tanto, puede interpretarse esta terna como valores de presencia de colores en el código RGB considerando R=$\frac{a}{c}$, G=$\frac{b}{c}$ y B=$\frac{a}{b}$, según lo comentado en la Introducción.

El ejemplo más sencillo a considerar sería cualquier triángulo equilátero que tiene por color la terna $(1,1,1)$ ya que $a = b = c$. El color correspondiente es el blanco. Podemos pues interpretar entonces nuestra función color como una medida –en función de la intensidad y gama- de lo que un triángulo cualquiera se aleja del más regular posible: el equilátero.

El orden escogido para esta asignación es relevante, ya que una asignación en otro orden diferente comportaría un color resultante distinto para un triángulo dado. En la Figura 4, puede apreciarse el resultado en colores de las 6 posibles ordenaciones de la terna $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}\right)$ respecto al código RGB para un triángulo concreto de lados $1, \sqrt{2}, \sqrt{5}$. Nuestra definición selecciona la primera de ellas.

Figura 4. Diferentes elecciones de color RGB según ordenaciones en la terna.

Si aplicamos el Teorema del Seno en el triángulo ABC, tenemos una definición equivalente de la función color en términos de los ángulos del triángulo:

$$C(ABC) = \left(\frac{\sin A}{\sin C}, \frac{\sin B}{\sin C}, \frac{\sin A}{\sin B}\right)$$

Ambas expresiones matemáticas de la función color, ya sea en términos de los lados o de los ángulos del triángulo, evidencian que nuestra definición cumple una propiedad destacada: a cualesquiera triángulos semejantes les corresponde el mismo color. Es decir, nuestra definición es invariante ante la semejanza de triángulos. Propiedad ésta absolutamente deseable, pues el color que pretendemos asignar "con sentido" a un triángulo no debe depender del tamaño del mismo. Por ello, si fuese necesario, no será nada restrictivo si prefijamos el tamaño de alguno de los lados del triángulo, normalizando por ejemplo a la unidad: $a = 1$ ó $b = 1$ ó $c = 1$.

En las secciones siguientes vamos a estudiar en detalle la función color que acabamos de definir en diferentes familias destacadas de triángulos por alguna relación especial en sus lados o ángulos. En algunos casos, la función color podrá verse completamente controlada como función de una única variable angular.

2.2. TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

Consideramos en esta sección un triángulo ABC rectángulo, cuyo lado mayor es necesariamente la hipotenusa. Respetando nuestra definición y notación, tomamos $C = \pi/2$, c la hipotenusa y $a \leq b$ los catetos (véase la Figura 5). En este caso la función color adopta una elegante expresión en términos del ángulo agudo menor:

$$C(ABC) = (\sin A, \cos A, \tan A), \qquad 0 < A \leq \pi/4$$

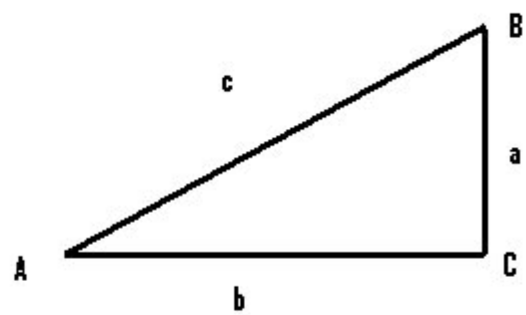

Figura 5. Notación para un triángulo rectángulo.

2.3. TRIÁNGULOS ISÓSCELES.

Consideramos en esta sección un triángulo ABC isósceles. Para aplicar correctamente nuestra definición hemos de ser cuidadosos, puesto que en ella interviene una ordenación concreta que tiene en cuenta el tamaño de los lados. Por ello, distinguimos si el lado desigual es mayor o menor que los otros dos lados iguales:

- Si $a = b < c$, entonces (véase la Figura 6):

  $$C(ABC) = \left(\frac{a}{c}, \frac{a}{c}, 1\right)$$

  Usando trigonometría elemental o la fórmula del color en términos de los ángulos, obtenemos equivalentemente:

  $$C(ABC) = \left(\frac{\sec A}{2}, \frac{\sec A}{2}, 1\right), \qquad 0 < A \leq \pi/3$$

- Si $a < b = c$, entonces (véase la Figura 6):

  $$C(ABC) = \left(\frac{a}{c}, 1, \frac{a}{c}\right)$$

Y análogamente:

$$C(ABC) = (2\cos C, 1, 2\cos C), \qquad \pi/3 \leq C < \pi/2$$

Obsérvese que todas las expresiones coincidirían si el triángulo isósceles degenerase en un equilátero obteniendo en ambos casos el color blanco $(1,1,1)$.

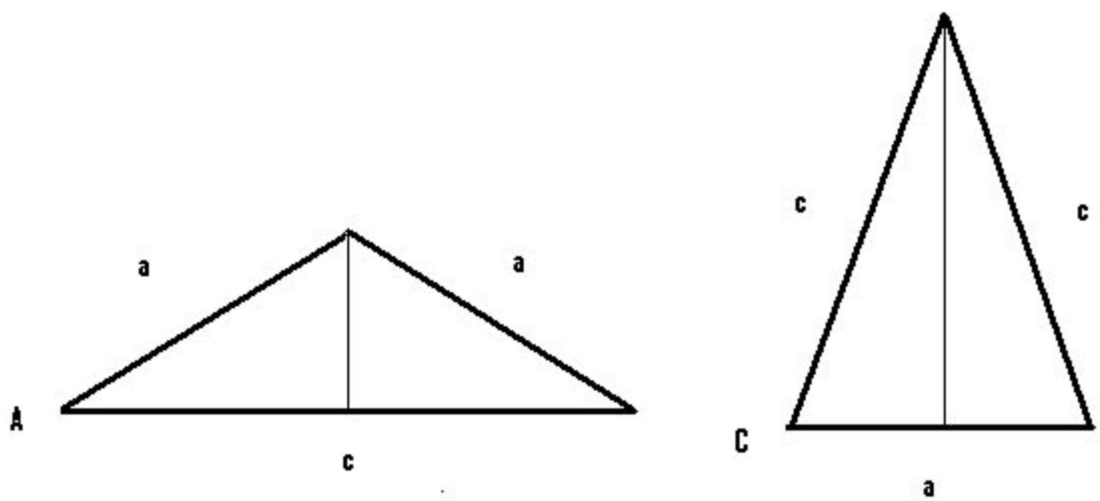

Figura 6. Notación para un triángulo isósceles.

2.4. TRIÁNGULOS ACUTÁNGULOS.

Consideramos en esta sección un triángulo ABC acutángulo cualquiera. En este caso serán necesarios dos parámetros o variables para obtener una fórmula explícita para la función color. Sin restricción, normalizamos el lado mayor a la unidad ($c = 1$ en nuestra notación). Entonces es un ejercicio no muy complicado, haciendo uso del Teorema de Pitágoras y de la definición de la tangente como razón trigonométrica, expresar la función color en términos del ángulo agudo menor A y del pie x de la altura trazada desde C (véase la Figura 7), obteniendo:

$$C(A,B,C) = \left(\frac{\sqrt{cos^2 A(1-2x)+x^2}}{\cos A}, \frac{x}{\cos A}, \frac{\sqrt{cos^2 A(1-2x)+x^2}}{x} \right), \qquad 1/2 \leq x < \cos A$$

La desigualdad $1/2 \leq x < \cos A$ es la que garantiza la ordenación requerida de los lados del triángulo acutángulo para aplicar con rigor nuestra definición.

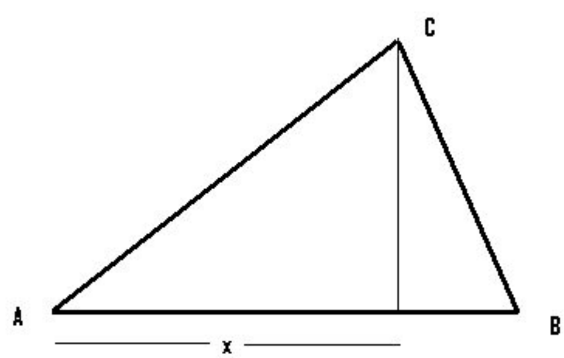

Figura 7. Notación para un triángulo acutángulo.

2.5. TRIÁNGULOS OBTUSÁNGULOS.

Consideramos en esta sección un triángulo ABC obtusángulo. También en este caso serán necesarios dos parámetros o variables para obtener una fórmula explícita para la función color. Sin restricción, normalizamos ahora el lado menor a la unidad ($a = 1$ en nuestra notación). Usando de nuevo el Teorema de Pitágoras y la definición de la tangente como razón trigonométrica, podemos expresar la función color en términos del ángulo agudo obtuso C y de la distancia x del pie de la altura trazada desde A al vértice C (véase la Figura 8), obteniendo:

$$\mathcal{C}(A,B,C) = \left(\frac{\cos C}{\sqrt{cos^2 C(1+2x)+x^2}}, \frac{x}{\sqrt{cos^2 C(1+2x)+x^2}}, \frac{\cos C}{x}\right), \qquad x > \cos C > 0$$

La desigualdad $x > \cos C > 0$ es la que garantiza la ordenación requerida de los lados del triángulo obtusángulo para aplicar formalmente nuestra definición.

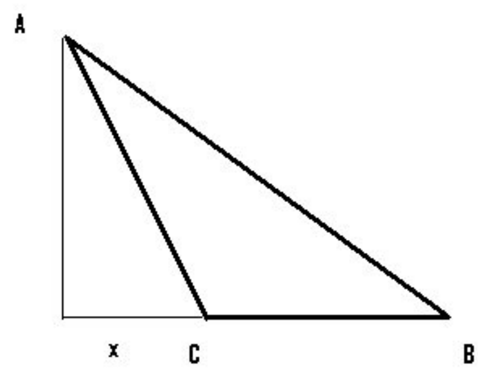

Figura 8. Notación para un triángulo obtusángulo.

Usando que $C = \pi - (A + B)$, también obtenemos que

$$\mathcal{C}(A,B,C) = \left(\frac{\sin A}{\sin(A+B)}, \frac{\sin B}{\sin(A+B)}, \frac{\sin A}{\sin B}\right)$$

con $0 < A \leq B < \pi/2$ y $A + B \ > \pi/2$ (respectivamente $A + B \ < \pi/2$) si el triángulo es acutángulo (respectivamente obtusángulo), habiendo usado de nuevo que $C = \pi - (A + B)$.

4. REPRESENTACIONES GRÁFICAS.

En esta última sección realizamos diferentes representaciones gráficas de triángulos coloreados según nuestra definición. Nos basamos en todas las expresiones explícitas deducidas en las secciones precedentes y usamos esencialmente los comandos Graphics, Point, Line, Polygon y RGBColor de Mathematica®.

En la Figura 9 observamos que los triángulos rectángulos varían de un tono verde intenso a un tono malva conforme el ángulo agudo menor va creciendo hasta 45º.

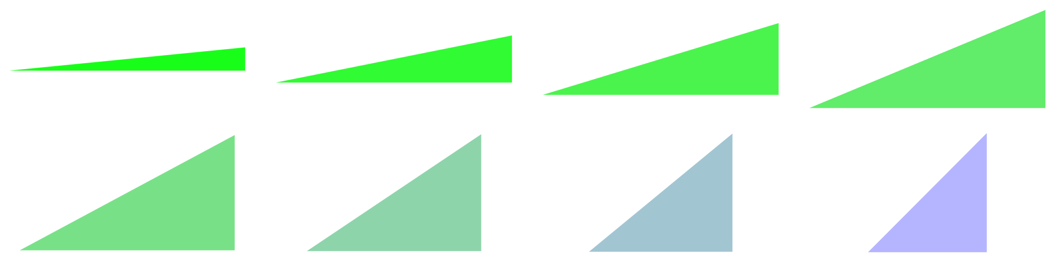

Figura 9. Función color de triángulos rectángulos, con $A = k\,\pi/32, k = 1,2,3,4,5,6,7,8$.

En la Figura 10 observamos que los triángulos isósceles en los que el lado desigual es el mayor se mueven en una tonalidad de azules que se van clareando hasta degenerar en el blanco del equilátero. A partir de éste (véase la Figura 11) comienza a adquirir tonalidades en verde para los triángulos isósceles en los que el lado desigual es el menor.

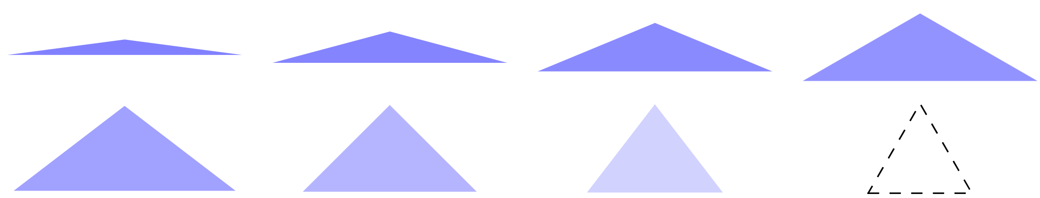

Figura 10. Función color de triángulos isósceles, con $A = k\,\pi/24, k = 1,2,3,4,5,6,7,8$.

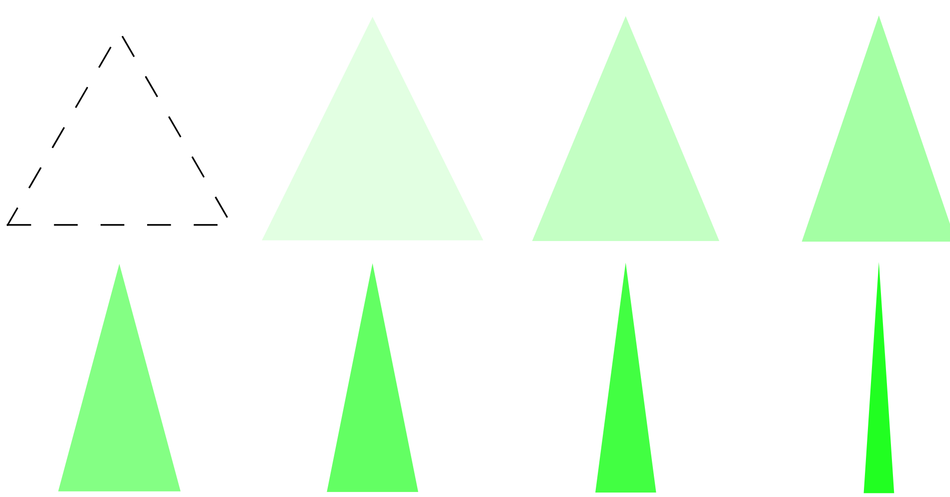

Figura 11. Función color de triángulos isósceles, con $C = (16 + k)\,\pi/48, k = 0,1,2,3,4,5,6,7$.

Por otro lado, podemos observar en la Figura 12 que el azul es la tonalidad predominante en los triángulos acutángulos, más claro cuanto más cercano al equilátero se encuentre.

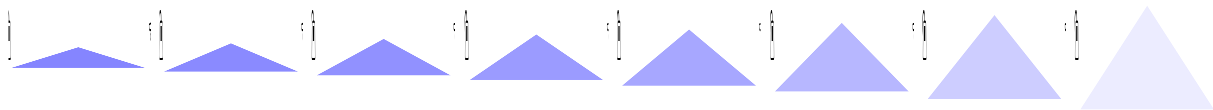

Figura 12. Función color de triángulos acutángulos.

Sin embargo, es el tono verde el que domina el caso de los triángulos obtusángulos (véase la Figura 13).

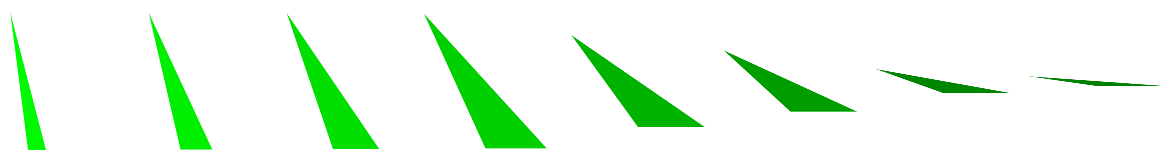

Figura 13. Función color de triángulos obtusángulos.

Pero para responder de modo completamente satisfactorio a la cuestión que planteábamos en la Introducción acerca de qué color es un triángulo, utilizando nuestra noción de color RGB asociado a los tres lados ordenados de un triángulo, deberíamos establecer qué color corresponde a un triángulo arbitrario. Teniendo en cuenta que la suma de todos los ángulos de un triángulo es 180º, y las condiciones de nuestra definición de color, podemos parametrizar el conjunto de todos los triángulos en función de los dos ángulos menores, restringiéndonos al dominio

$\{(A,B) : 0 < A \leq B \leq \pi - (A+B)\}$

dibujado en el plano AB en la Figura 14.

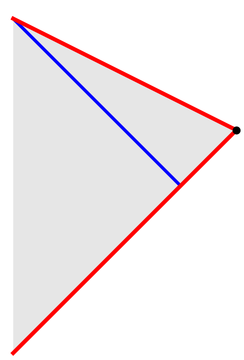

Figura 14. Dominio representativo de los triángulos del plano.

Obsérvese que las líneas rojas frontera representan los dos tipos de triángulos isósceles estudiados ($A = B \leq \pi/3,\ A + 2B = \pi$) que se cortan en el punto negro que corresponde al triángulo equilátero $A = B = \pi/3$. La línea azul recoge los triángulos rectángulos ($A + B = \pi/2$) y sirve de separación entre los acutángulos de la región superior (para los que $A + B > \pi/2$) y los oblicuángulos de la región inferior (para los que $A + B < \pi/2$).

Si somos capaces de colorear acorde a nuestra definición cada punto del dominio de la Figura 14, habremos conseguido nuestro objetivo. Y ello podemos hacerlo, con la ayuda de Mathematica®, gracias a la fórmula última de la Sección 3, obteniendo la bella imagen de la Figura 15.

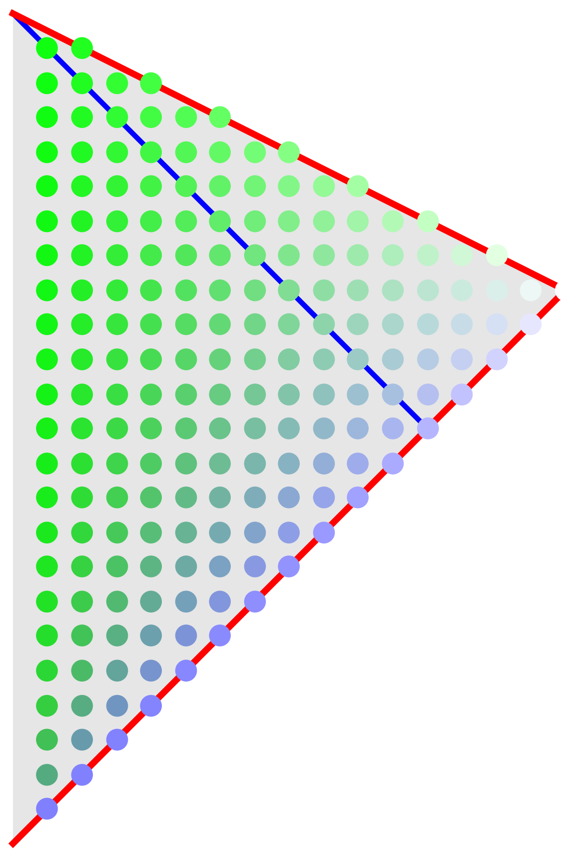

Figura 15. Nuestros colores propuestos para todos los triángulos del plano.

Dedicatoria: A nuestro compañero y amigo Francisco Ruiz Juan, deseándole una pronta recuperación. ¡Todo es de color!

REFERENCIAS.

PASTOREU, M. y SIMONET, D. (2006). *Breve Historia de los Colores*, Paidos Ibérica.

SANZ, J.C. (2003). *El Libro del Color*, Alianza Editorial.