PROBLEMAS DE FACIL MODELIZACIÓN Y DIFÍCIL RESOLUCIÓN ARITMÉTICA

Carlos de Castro Hernández, *Universidad Autónoma de Madrid, carlos.decastro@uam.es*

RESUMEN.

En este trabajo se propone una reconceptualización de la resolución de problemas en la educación infantil. Los problemas, tradicionalmente vistos como campo de aplicación de las operaciones aritméticas, pasan a verse como tareas para el desarrollo de la competencia matemática en un sentido más amplio. Esta visión se ejemplifica con una experiencia, desarrollada en un aula de educación infantil, con niños de 5-6 años, en que los pequeños resuelven problemas de reparto igualatorio. Este tipo de problemas, de fácil modelización y difícil resolución aritmética, muestra que los niños son capaces de razonar con ayuda de objetos, modelizar, simbolizar y, en definitiva, desarrollar su competencia matemática, a través de la resolución de problemas inusuales en esta etapa.

Nivel educativo: Educación Infantil.

1. INTRODUCCIÓN.

Desde el curso 2005-06, un pequeño grupo de maestros y maestras de educación infantil, junto con varios profesores de universidad, y con la colaboración puntual de estudiantes del grado de maestro de educación infantil, venimos trabajando en una forma alternativa de plantear la resolución de problemas en educación infantil (De Castro y Escorial, 2007). La metodología que seguimos está fuertemente inspirada por la *Instrucción Cognitivamente Guiada* (Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson, 1999). Esta propuesta de trabajo se ha venido desarrollando, a través de talleres de resolución de problemas, con niños de 4-5 años (De Castro, Pastor, Pina, Rojas y Escorial, 2009; Núñez, De Castro, Del Pozo, Mendoza y Pastor, 2010; Molina, 2012) y en último curso de educación infantil (De Castro y Escorial, 2007; De Castro y Hernández, 2014; De Castro, Molina, Gutiérrez, Martínez y Escorial, 2012; De Castro, Walsh, Del Coso, Salvador, González y Escorial, 2009).

A lo largo de estos trabajos, intentamos ampliar el rango de problemas planteables en educación infantil. Problemas que podrían considerarse fuera del alcance de los pequeños de educación infantil, como los de comparación multiplicativa (De Castro, Walsh, y otros, 2009) o los de descomposición factorial con varias soluciones (De Castro y Hernández, 2014), han sido resueltos con éxito por niños de 5 y 6 años.

2. LOS PROBLEMAS DE REPARTO IGUALATORIO.

Para este trabajo he elegido problemas de reparto igualatorio por ser un tipo de problemas singular. Un ejemplo de este tipo de problemas sería el siguiente enunciado: “Pedro tiene 8 caramelos y Juan 2. ¿Cuántos caramelos tiene que darle Pedro a Juan para que tengan los mismos?” Bajo una apariencia sencilla, un enunciado breve y de fácil comprensión, y unas cantidades pequeñas, se esconde un problema de cierta complejidad si intentamos resolverlo a través de operaciones aritméticas. Aunque puede confundirse con un problema de cambio decreciente, a resolver mediante una resta, es un problema bastante más difícil.

2.1. ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS DE REPARTO IGUALATORIO CON GRAFOS TRINOMIALES.

En este apartado presentamos un breve análisis de los problemas de reparto igualatorio. Toda la nomenclatura propia de esta categoría de problemas, la tomamos del trabajo de Martínez y Sánchez (2013). Para el análisis, partimos del ejemplo de enunciado propuesto en la sección anterior: "Pedro tiene 8 caramelos y Juan 2. ¿Cuántos caramelos tiene que darle Pedro a Juan para que tengan los mismos?" En este ejemplo, aparecen dos cantidades: la *cantidad mayor* (M=8) y la *cantidad menor* (m=2). Entre ambas cantidades, existe una *diferencia* que se debe anular (D=M-m=6). Otras dos cantidades importantes son la *cantidad igualadora* (i=3), o cantidad que tiene que quitarse a la mayor y añadirse a la menor, y la *cantidad igualada* (I=5) o cantidad en la que se produce la igualación. La última cantidad que consideramos es una cantidad auxiliar en estos problemas: la *cantidad total* (T=M+m=10). Las cantidades mayor y menor han sido elegidas para esta experiencia por ser ambas menores de diez, y porque todas las demás cantidades que aparecen en el problema son diferentes.

En la Figura 1 presentamos un grafo trinomial (Cerdán, 2009; Fridman, 1990) que representa una lectura analítica del "problema de Pedro y Juan". En dicho problema podemos considerar el diccionario de cantidades mencionadas en el enunciado, formado por las cantidades M, m, I, i. Si a estas añadimos las cantidades auxiliares no mencionadas en el enunciado D y T, tenemos el diccionario teórico del problema, que "contendría el conjunto de cantidades y acepciones susceptibles de uso en cualquier solución del problema" (Cerdán, 2009, p. 178).

En la parte izquierda de la Figura 1 aparecen las 6 relaciones que podemos establecer entre las cantidades del diccionario teórico de cantidades del problema. Las cuatro primeras relaciones son aditivas, mientras que las dos últimas son multiplicativas.

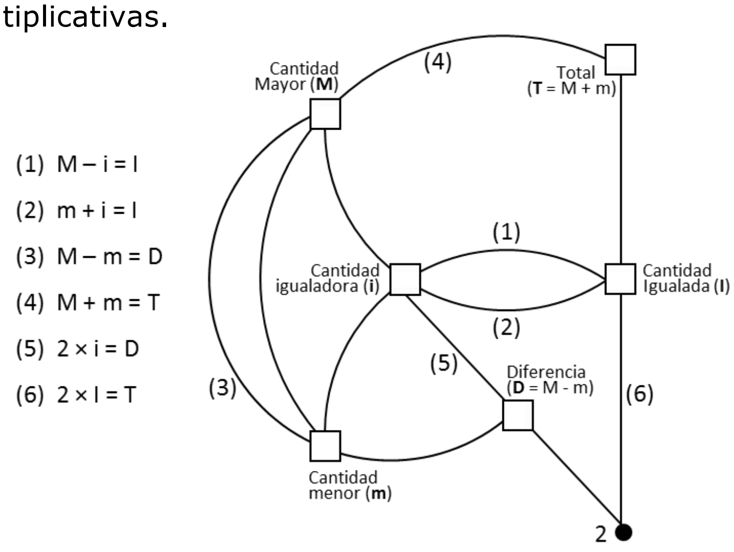

Figura 1. Esquema de los problemas de reparto igualatorio.

A partir del grafo de la Figura 1, teniendo en cuenta que los datos del problema son la cantidad mayor (M=8) y la cantidad menor (m=2), podemos hacer distintos recorridos hacia la incógnita (cantidad igualadora, i) que se corresponden con diferentes procesos de resolución del problema. Por ejemplo, podemos resolver el problema haciendo los recorridos (4) (6) (1), (4) (6) (2), o el recorrido (3) (5). En el primer caso, calculamos la cantidad total (T=M+m), luego la *cantidad igualada*, o media aritmética de las dos cantidades (I=T/2), y finalmente calculamos la diferencia entre la cantidad menor y la igualada (i=I-m) o entre la cantidad mayor y la igualada (i=M-I). Otra resolución alternativa, señalad en el recorrido por las relaciones (3) (5), pasa por calcular primero la diferencia entre la cantidad mayor y la menor (D=M-m), y dividir esta diferencia por dos para obtener la cantidad igualadora (i=I/2). Como vemos, el grafo de la Figura 1 permite prever tres procesos de resolución diferentes a través del uso de operaciones aritméticas.

2.2. LA RELACIÓN ENTRE LOS PROBLEMAS Y LAS ESTRATEGIAS QUE LOS RESUELVEN: LA DIFICULTAD DE LOS PROBLEMAS.

En el apartado anterior hemos visto que si abordamos su resolución desde un enfoque aritmético, como problema de varios pasos, los problemas de reparto igualatorio resultan complejos, pudiendo implicar hasta tres operaciones aritméticas. Sin embargo, Martínez y Sánchez (2013) han mostrado que si se emplea un enfoque alternativo, como el de los *Algoritmos Abiertos Basados en Números* (ABN), pueden resolverse de forma mucho más sencilla. Análogamente, resulta fácil imaginar cómo se podrían resolver este tipo de problemas en educación infantil, a través de la manipulación de objetos y su conteo.

En la relación entre los tipos de problemas y los procedimientos de resolución está una de las ideas que fundamenta todo nuestro trabajo. Si los niños utilizan, en educación primaria, estrategias de resolución basadas en el uso de operaciones aritméticas, un problema fácil será aquel que tenga menos operaciones, y en el que sea sencillo detectar qué operación se debe realizar. Por el contrario, en educación infantil esperamos que los niños modelicen la situación descrita en el enunciado del problema con la ayuda de objetos, marcas o dibujos, y que con sus habilidades de conteo, resuelvan el problema. En este contexto, un problema fácil es un problema sencillo de modelizar con objetos. Así, aunque pueda parecer paradójico, los problemas de reparto igualatorio, que son fáciles de representar con objetos, pero difíciles de resolver aritméticamente, podrían resultar más sencillos en educación infantil que en primaria. Esta idea quedará ilustrada en el apartado siguiente.

3. EL DESARROLLO DE LA EXPERIENCIA.

A continuación, voy a describir una sesión de un taller de problemas que se ha desarrollado en dos aulas de educación infantil, con niños de 5-6 años, en el CEIP Virgen de Peña Sacra de Manzanares el Real.

Previamente al trabajo con el problema, leímos varias veces "A qué sabe la luna" (Grejniec, 1999). En este cuento, que utilizamos como contexto para facilitar la comprensión infantil de la situación, al final, el ratón arranca un trozo pequeño de luna y va dando un pedacito al mono, al zorro, al león, etc. Utilizamos este contexto, de compartir trocitos de luna, para plantear dos problemas para sesiones consecutivas del taller: “El ratón hizo 16 trocitos de luna. Si había 8 animales, ¿cuántos trocitos de luna le tocaron a cada animal?” y “El zorro tiene 8 pedacitos de luna, y la cebra tiene 2 pedacitos, ¿Cuántos pedacitos tiene que darle el zorro a la cebra para que los dos tengan igual?” Este segundo problema es de reparto igualatorio y es en el que me voy a centrar en el resto del trabajo.

3.1. LECTURA DE LA CARTA, PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA E INICIO DEL TRABAJO INDIVIDUAL.

El taller de resolución de problemas comienza con la lectura de una carta (Figura 2). La maestra utiliza la figura de Ares, un maestro de educación infantil que, durante el curso anterior, hizo las prácticas de enseñanza con este grupo, para simular que este escribe una carta a los niños pidiéndoles ayuda para resolver un problema. Los niños creen realmente que Ares les ha escrito, e intentan ayudarle. El taller concluirá con la elaboración de cartas de respuesta para Ares, elaboradas por los pequeños. Con el recurso de la carta, la resolución del problema queda inmersa en una situación de comunicación que favorece: a) Que los niños vean el problema como un verdadero problema real; b) Que se impliquen en la resolución para ayudar a alguien con el que tienen un vínculo afectivo; c) Que tenga sentido la discusión, en la puesta en común, sobre las soluciones encontradas por cada niño, para darle la mejor solución posible a Ares; d) Trabajar la comprensión global del problema a través de la representación gráfica del proceso de resolución y la representación simbólica del resultado; estas representaciones aparecen en los dibujos que los niños hacen para resolver el problema (Figura 7) y en las cartas (Figuras 11 y 12).

Figura 2. La maestra (Desirée) lee la carta de Ares.

Ya desde la primera lectura del problema, los niños comienzan a pensar cómo resolverlo. Jan (Figura 3, izquierda) lo intenta con los dedos. Los niños pasan de la asamblea al trabajo en grupos en las mesas, donde disponen de gran variedad de materiales (Figura 3, derecha). En el siguiente apartado voy a ir entreverando descripciones objetivas de las estrategias infantiles, que hemos documentado en esta experiencia, con interpretaciones que hago de las actuaciones de los pequeños y con reflexiones que me han suscitado dichas actuaciones.

Figura 3. El inicio del trabajo individual de resolución del problema.

3.2. LAS ESTRATEGIAS INFORMALES INVENTADAS POR LOS NIÑOS.

En la Figura 4 podemos seguir el proceso de resolución con centicubos. La estrategia básica de *modelización directa* consiste en representar ambas cantidades con objetos e ir pasando objetos, de uno en uno, de una cantidad a otra hasta conseguir igualarlas. A la izquierda, vemos representadas las cantidades mayor y menor (8 y 2). En la imagen del centro, comienza el proceso de igualación, pasando los cubos amarillo y negro de la cantidad mayor a la menor. Finalmente, a la derecha, se alcanza la *cantidad igualada* (5).

Figura 4. Resolución con centicubos.

Como puede observarse en la Figura 5, el uso de centicubos permite sutiles variaciones en la ejecución de la estrategia básica. En dicha Figura se diferencia el uso de los cubos blancos para representar a los personajes del problema (el zorro y la cebra), mientras que los cubos rosas representan los pedacitos de luna repartidos. En la imagen de la izquierda, vemos que el material permite la comparación a través de la longitud, sin recurrir al conteo, al haber encajado los cubos para formar dos barras. Disponer así las cantidades facilita el proceso de comparaciones sucesivas que se da al ir modificando ambas cantidades en el proceso de igualación. Dado que los niños no reciben instrucción sobre cómo resolver problemas, las opciones de utilizar los colores, colocar los cubos de una forma u otra, comparar a través de la longitud o el conteo, son elegidas espontáneamente por los pequeños. Queda claro que lo importante no es tanto disponer de objetos, o manipularlos, como reflexionar con ayuda de los mismos.

Figura 5. Variaciones en el uso de los centicubos.

Otro aspecto que es interesante comentar es que ninguno de los participantes adultos en esta experiencia (investigadores, maestros o estudiantes en prácticas) impone, recomienda, o prohíbe el uso de ningún material. En la Figura 6, Alejandro resuelve el problema con plastilina. Cuando empezábamos a trabajar en este enfoque (De Castro y Escorial, 2007), los adultos teníamos una preferencia por el uso de materiales que considerábamos "más matemáticos", como el rekenrek (Blanke, 2008), la banda numérica, o incluso los cubos encajables. Esta preferencia inicial ha ido cediendo hacia una postura de dar más espacio en los talleres a la iniciativa infantil y tratar de desarrollar mejor nuestra actitud de escucha para comprender el pensamiento infantil.

Alejandro representa ambas cantidades, las iguala, representa la situación de igualdad en el papel (Figura 6), y escribe un 10, que corresponde a la suma de las cantidades. Parece que algún aspecto del proceso no le convence y vuelve a repetirlo despacio, dejando la hoja apartada (Figura 6, a la derecha).

Figura 6. Proceso de resolución de Alejandro.

También hay niños que optan por resolver el problema a través de un dibujo. En la Figura 7 observamos varias tentativas. Parece que, para la alumna, la dificultad estriba, no tanto en la resolución, como en la posibilidad de representar simultáneamente el proceso y el resultado de la igualación. En la parte de arriba de la hoja, dibuja dos redondeles rosas a la izquierda y ocho a la derecha. Para igualar las cantidades, se añaden tres redondeles, quedando cinco a la izquierda y ocho a la derecha, lo que no representa bien ni el resultado de la igualación, ni el proceso. En la parte de abajo aparecen indicados con líneas los pasos sucesivos de redondeles de un montón al otro. En la Figura 7, abajo, se distinguen las cantidades iniciales (mayor y menor, de 8 y 2 redondeles respectivamente), las cantidades igualadas (con 5 objetos en cada una), y el proceso de igualación con los cambios sucesivos.

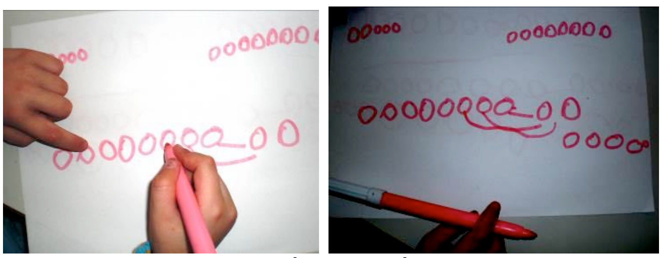

Figura 7. Resolución a través de un dibujo.

Varios alumnos utilizaron el rekenrek para resolver el problema. El rekenrek es un tipo especial de ábaco diseñado por Adrian Treffers, investigador del Instituto Freudenthal de Holanda, que se utiliza como modelo visual para el aprendizaje del cálculo mental (Blanke, 2008). En nuestro trabajo, permitimos a los niños un uso libre de este material, aunque nos planteamos como reto futuro trabajar con él de forma más sistematizada.

En la Figura 4, vemos las dos cantidades a igualar (8 y 2) representadas en sendas varillas. Para igualar las cantidades, se quitan 3 cuentas de color blanco en la varilla superior y se añaden 3 cuentas rojas en la inferior. Al ser las varillas paralelas, se favorece la visualización del proceso de igualación. Como vemos en la imagen de la derecha, el niño mantiene las tres cuentas blancas, retiradas de la varilla superior, apartadas de las dos cuentas que sobran a la derecha, lo que permite llevar un control de los "3 trozos de luna que ha dado el zorro a la cebra" (la *cantidad igualadora* en los problemas de reparto igualatorio).

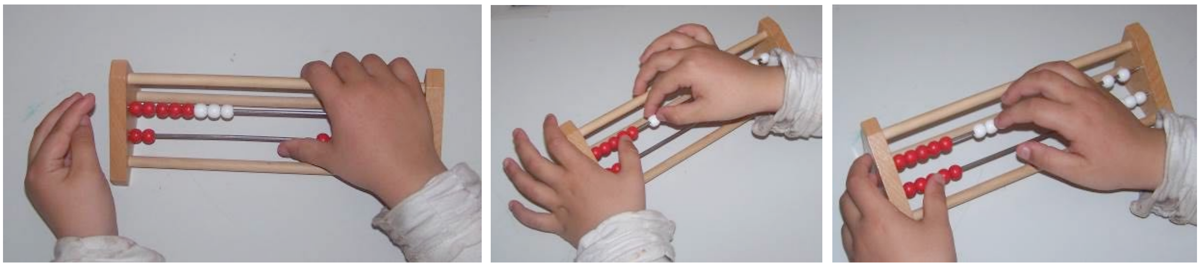

Figura 8. Con el rekenek.

En la Figura 9 vemos un intento de representar el problema en la banda numérica, con un dedo señalando la cantidad mayor y el otro moviéndose desde la menor a la mayor, en una acción que parece emular el proceso de igualación. Los adultos que participamos en los talleres entendemos que hay materiales que se adaptan mejor que otros a problemas concretos, pero también que hay alumnos a los que les resulta más fácil pensar con ayuda de unos instrumentos que con otros. La creación un ambiente con normas que dan libertad en la selección de instrumentos es nuestra respuesta a la atención de las características individuales de cada niño, así como el medio que permite a los alumnos desarrollar su capacidad de elegir materiales que los ayuden a pensar.

Figura 9. Representando el problema en la banda numérica.

3.3. LA PUESTA EN COMÚN Y RESPUESTA A LA CARTA INICIAL.

Tras el trabajo individual en las mesas, se vuelve a la asamblea para la puesta en común. La Figura 10 (izquierda y centro), pertenece a dos momentos de la puesta en común en que un niño y una niña explican a sus compañeros cómo han resuelto el problema con la ayuda de un dibujo y del rekenrek.

Figura 10. La puesta en común y la solución escrita en la pizarra.

La Figura 10 (derecha) muestra el momento de la escritura de la carta. Uno de los niños escribe en la pizarra "ARES EL ZORRO LE DA 3". En la Figura 11 vemos un ejemplo de carta a Ares con el texto: "Querido Ares. Eran tres cachitos de luna". Es interesante observar que en el contexto de la escritura de la carta, los pequeños suelen escribir los numerales con letra (Figuras 11 y 12), aunque también emplean cifras (Figura 10).

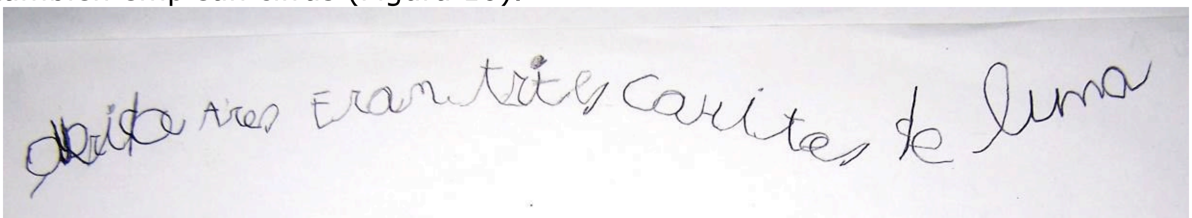

Figura 11. Ejemplo de carta de los alumnos.

La carta de Doaa a Ares es muy completa (Figura 12). No solo escribe la solución, sino que relata todo el problema. Aunque no es una producción representativa del nivel medio de la clase, ilustra bien los objetivos de nuestro trabajo, y lo que pueden llegar a hacer los pequeños de estas edades con un estímulo adecuado.

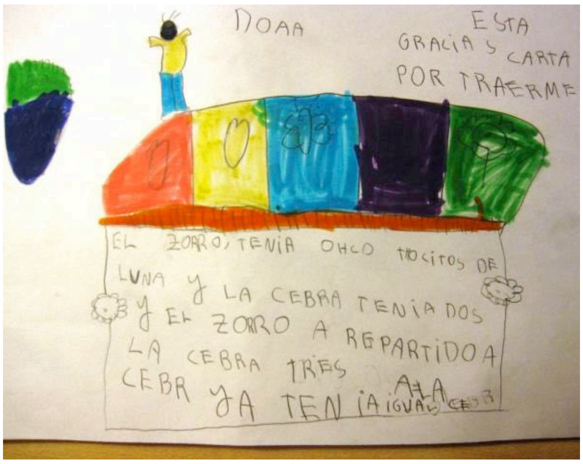

Figura 12. Ejemplo de carta de Doaa.

4. CONCLUSIONES.

La elección de los problemas de reparto igualatorio para un taller con niños de 5-6 años ejemplifica la línea de trabajo que seguimos, y en la cual deseamos profundizar en el futuro. Cuando hacemos una propuesta para el aula, la planteamos desde nuestro conocimiento de las capacidades infantiles. Pensamos, como dice el título, en problemas que sean fáciles de modelizar, de representar con objetos, que impliquen el manejo de cantidades accesibles a las destrezas de conteo infantiles, y planteados dentro de un contexto que permita a los niños imaginar la situación que describimos en el enunciado.

Este trabajo de resolución de problemas supone, para niños y niñas, la activación de esquemas informales de una gran riqueza. A partir de aquí, nos planteamos cómo ayudar a los pequeños a ir evolucionando paulatinamente en aspectos como los procesos de simbolización, con unas matemáticas que irán formalizándose, pero sin dejar de ser una matemáticas funcionales y orientadas a la comprensión.

De cara al futuro se nos plantean dos grandes retos para la continuación de este trabajo. En primer lugar, estamos implicados en la extensión de esta forma de abordar la resolución de problemas a la educación primaria (Ramírez y De Castro, 2012). Aunque estemos satisfechos con los resultados alcanzados en la educación infantil, pensamos que un modelo didáctico sobre la resolución de problemas solo podrá constituirse en una alternativa viable para el tradicional enfoque aplicacionista, si conseguimos articular una propuesta que abarque toda la escolaridad obligatoria. Otro aspecto más puntual en el que queremos trabajar en el futuro es en el paso de las estrategias de modelización directa, como las que utilizan los niños espontáneamente en este trabajo, al uso de hechos numéricos. Esto supone una iniciación al cálculo mental y la transición de un pensamiento en el que predomina el conteo de objetos a otro pensamiento, cualitativamente más avanzado, como es el pensamiento aditivo.

AGRADECIMIENTOS.

En este trabajo han colaborado, de distintas formas, varias personas a las que quiero expresar mi gratitud: James Walsh, Emma del Coso y Cristina Salvador colaboraron en la recogida de información; las fotografías que se muestran en este trabajo son suyas; Desirée López y Virginia González son las maestras que llevaron el taller; Beatriz Escorial, la coordinadora del proyecto en el CEIP Virgen de Peña Sacra de Manzanares el Real. Todos ellos han colaborado conmigo en distintas publicaciones que figuran entre las referencias.

REFERENCIAS.

BLANKE, B. (2008). *Using the rekenrek as a visual model for strategic reasoning in mathematics*. Salem, OR: The Math Learning Center. Disponible en:http://bridges1.mathlearningcenter.org/media/Rekenrek_0308.pdf

CARPENTER, T.P., FENNEMA, E., FRANKE, M.L., LEVI, L. y EMPSON, S.B. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*. Portsmouth: Heinemann.

CASTRO, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 113-140). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

CERDÁN, F. (2009). La familia de los problemas aritmético algebraicos. Los problemas y un marco teórico de referencia para el estudio de las resoluciones de los estudiantes. *Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación (Monografía XII),* 175-210.

DE CASTRO, C. y ESCORIAL, B. (2007). Resolución de problemas aritméticos verbales en la Educación Infantil: una experiencia de enfoque investigativo. *Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación (Monografía IX)*, 23-48. Disponible en: http://eprints.ucm.es/12643/

DE CASTRO C. y HERNÁNDEZ, E. (2014). Problemas verbales de descomposición multiplicativa de cantidades en educación infantil. *PNA, 8*(3), 99-114.

DE CASTRO, C., MOLINA, E., GUTIÉRREZ, M.L., MARTÍNEZ, S. y ESCORIAL, B. (2012). Resolución de problemas para el desarrollo de la competencia matemática en Educación Infantil. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 80*, 53-70.

DE CASTRO, C., PASTOR, C., PINA, L.C., ROJAS, M.I. y ESCORIAL, B. (2009). Iniciación al estudio de las matemáticas de las cantidades en la Educación Infantil. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 18*, 105-128. http://www.fisem.org/www/union/revistas/2009/18/Union_018_013.pdf

DE CASTRO, C., WALSH, J., DEL COSO, E., SALVADOR, C., GONZALEZ, V. y ESCORIAL, B. (2009). "Dos de todo": El cuento chino de los problemas de comparación multiplicativa en la Educación Infantil. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales" 73* (3), 33-42.

FRIDMAN, L. M. (1990). Los grafos trinomiales como metalenguaje de los problemas. *Matemáticas. Revista del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, 17-18*, 51-59.

GREJNIEC, M. (1999). *¿A qué sabe la luna?* Pontevedra: Kalandraka.

MARTÍNEZ, J. y SÁNCHEZ, C. (2013). *Resolución de problemas y método ABN*. Madrid: Wolters Kluwer España.

MOLINA, E. (2012). Narración de un taller de resolución de problemas aritméticos con niños de 4 años. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 1*(1), 63-79. http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6/article/download/5/18

NESHER, P. (1999). El papel de los esquemas en la resolución de problemas de enunciado verbal. *Suma. Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 31*, 19-26. http://revistasuma.es/IMG/pdf/31/019-026.pdf

NÚÑEZ, C., DE CASTRO, C., DEL POZO, A., MENDOZA, C. y PASTOR, C. (2010). Inicio de una investigación de diseño sobre el desarrollo de competencias numéricas con niños de 4 años. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 463-474). Lleida: SEIEM. Disponible en: http://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3629571.pdf

RAMIREZ, M. y DE CASTRO, C. (2012). El aprendizaje de algunos aspectos del sistema de numeración decimal a través de problemas aritméticos verbales al inicio de educación primaria. En D. Arnau, J.L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática – 2012* (pp-109). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM. Disponible en http://eprints.ucm.es/25470/