SIGNIFICADO ATRIBUIDO AL SIMBOLISMO ALGEBRAICO POR ESTUDIANTES DE SECUNDARIA A TRAVÉS DE LA INVENCIÓN DE PROBLEMAS

Elena Fernández-Millán, *Universidad de Granada, elena.fernandez.millan@gmail.com*
Marta Molina, *Universidad de Granada, martamg@ugr.es*

RESUMEN.

En este trabajo se indaga en el significado que los estudiantes dan al simbolismo algebraico, al finalizar la Educación Secundaria Obligatoria (ESO), a través de la actividad de invención de problemas. Para tal fin elaboramos un cuestionario individual escrito, en el que se pide a los estudiantes que inventen un problema que se resuelva con una ecuación o sistema de ecuaciones dado. Dichas ecuaciones y sistemas de ecuaciones están caracterizados por unas variables de tarea definidas a priori. Los resultados que aquí se presentan informan de las características de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones que dificultaron la tarea de inventar un problema e informan del significado que los estudiantes atribuyen a las operaciones implicadas en dichas expresiones.

Nivel educativo: Educación Secundaria

1. INTRODUCCIÓN.

Este trabajo forma parte de un trabajo de investigación más amplio que persigue, en términos generales, indagar en el significado que los estudiantes de secundaria dan al simbolismo algebraico, al finalizar la Educación Secundaria Obligatoria (E.S.O.), a través de la actividad de invención de problemas.

El estudio del álgebra, y en concreto del simbolismo algebraico, tiene lugar desde el primer curso de la educación secundaria obligatoria, tal y como queda patente en los documentos curriculares por los que se rigen las enseñanzas de secundaria (Real Decreto 1631/2006, Decreto 231/2007 y Orden de 10 de agosto de 2007). En mi corta experiencia como profesora, he podido observar que a pesar del tiempo que se dedica a la enseñanza del álgebra, los estudiantes presentan persistentes dificultades a la hora de trabajar con dicho simbolismo, opinión que comparten otros docentes (Rodríguez-Domingo, 2011; Vega-Castro, 2010). Desde la comunidad de investigadores en Didáctica de la Matemática, diversos estudios tanto a nivel nacional como internacional corroboran estas observaciones. Los estudios realizados indagan en la comprensión del simbolismo algebraico de estudiantes de secundaria (Booth 1984, Filloy y Rojano 1989, Kieran 1979 y 1981, Küchemann 1981, MacGregor y Stacey 1997,) y aportan clasificaciones de los errores que cometen los estudiantes cuando trabajan con expresiones simbólicas (Castro 2012, Cerdán 2010, Kirshner 1989 o Ruano, Socas y Paralea 2008). Los reiterados errores que se detectan en el uso del simbolismo algebraico sugieren deficiencias en la capacidad de los estudiantes de secundaria para dotarle de significado.

Por otro lado nos interesamos por la invención de problemas como herramienta para obtener información sobre el significado que los estudiantes dan a este simbolismo, por ser una tarea que no están acostumbrados a realizar y que les requiere dar significado a expresiones simbólicas. Investigadores como Castro (2011) han argumentado su utilidad como tarea evaluadora: esta tarea aporta información sobre las habilidades de los alumnos para usar su conocimiento matemático. Diversos trabajos como Ayllón, Castro y Molina (2010) o Silver, Kilpatrick y Schlesinger (1990) así lo muestran.

Estos estudios previos motivan nuestro interés por la realización de este trabajo. A continuación concretamos el objetivo general de la investigación realizada en objetivos específicos.

2. OBJETIVOS.

El objetivo general de esta investigación es analizar la capacidad para dotar de significado a expresiones simbólicas que ponen de manifiesto un grupo de estudiantes al finalizar la Educación Secundaria Obligatoria, a través de la tarea de invención de problemas.

El objetivo general se concreta en los siguientes objetivos específicos relativos a la tarea de inventar problemas resolubles mediante ciertas ecuaciones o sistemas de ecuaciones dados:

- Analizar la estructura sintáctica de los problemas que inventan los estudiantes y compararla con el tipo de ecuación o sistema de ecuaciones al que corresponden.
- Distinguir el significado que dan los estudiantes a los diferentes componentes de las ecuaciones dadas, atendiendo en particular a las estructuras semánticas de los problemas inventados.
- Identificar características de las ecuaciones que dificultan a los estudiantes la tarea de inventar un problema.

Tomando como referencia estos objetivos, hemos diseñado la recogida de datos que a continuación se describe y hemos abordado el análisis de los datos.

3. METODOLOGÍA.

Este punto se divide en dos apartados en los que describimos los sujetos participantes en el estudio y detallamos el diseño del instrumento utilizado para recoger los datos con el fin de dar respuesta a los objetivos de investigación planteados.

3.1. SUJETOS DE ESTUDIO.

La población considerada para realizar la investigación la constituyen 20 estudiantes de 4º de ESO matriculados en la materia de matemáticas opción A, durante el curso 2012-2013, en un instituto de educación secundaria de Roquetas de Mar (Almería).

La selección de los estudiantes fue intencional, atendiendo a su disponibilidad.

Todos los estudiantes forman parte del mismo grupo de clase. Destacar en cuanto al rendimiento en la asignatura de matemáticas, que el nivel del grupo es heterogéneo pudiendo clasificarse de medio. Tres estudiantes tienen la asignatura pendiente del curso anterior y una gran parte de los alumnos proceden de agrupamientos flexibles bajos, por lo que aun teniendo la asignatura aprobada del curso anterior parten de un nivel bastante inferior. Les presenta especial dificultad la resolución de problemas y el pensamiento lógico.

Respecto a su conocimiento algebraico previo, desde el primer curso de la Educación Secundaria han trabajado con ecuaciones. En el curso académico en el que se encuentran, habían concluido su trabajo en contenidos algebraicos cuando se realizó la recogida de datos.

3.2. DISEÑO DEL CUESTIONARIO.

El instrumento de recogida de datos consiste en un cuestionario escrito individual, en el que se les pide a los estudiantes que propongan enunciados de problemas que se puedan resolver con las ecuaciones y sistemas de ecuaciones dados, uno para cada expresión.

El cuestionario consta de cuatro ecuaciones, dos de primer grado y dos de segundo grado, y dos sistemas de ecuaciones con dos incógnitas, uno de ellos lineal. Todos los números con los que se trabaja en el cuestionario son número enteros, tanto los coeficientes de las incógnitas, como los términos independientes y las soluciones de las ecuaciones. El resto de las variables de tarea consideradas son las siguientes:

- Número de incógnitas: las ecuaciones de primer y segundo grado presentan una incógnita y los sistemas de ecuaciones dos incógnitas.
- Número de miembros con incógnita: cuatro de las ecuaciones y los dos sistemas de ecuaciones tienen la incógnita a un lado del signo igual, mientras que la ecuación número 3 la tiene a ambos lados del signo igual. El hecho de contemplar esta variable a la hora de seleccionar las ecuaciones se debe a que en estudios previos (Isik y Kar, 2012) se destaca como un elemento que condiciona la tarea de inventar problemas.
- Posición de la incógnita: hace referencia a si se encuentra a la derecha o a la izquierda del signo igual.
- Coeficiente de la incógnita: la clasificamos en igual o diferente de uno.
- Operación con la incógnita: Consideramos las operaciones con las incógnitas entre si y las de estas con los términos independientes.

En la tabla 1 presentamos las ecuaciones y sistemas de ecuaciones considerados caracterizados en función de las variables de tarea que los diferencian.

Tabla 1: *Asignación de variables a las ecuaciones*

		Variable de tarea				
Nº	Ecuación	Nº de incógnitas	Nº miembros con incógnita	Coeficiente de la incógnita	Operación de la incógnita	Posición de la incógnita
1	$8 = x + 6$	1	1	1	Suma	Derecha
2	$2x - 1 = 9$	1	1	≠ 1	Suma	Izquierda
3	$x + 10 = 6x$	1	2	≠ 1	Suma	Ambos lados
4	$16 = x^2$	1	1	1	Multiplicación	Derecha
5	$\left.\begin{matrix} 5x + 3y = 69 \\ x + y = 15 \end{matrix}\right\}$	2	1	≠1	Suma	Izquierda
6	$\left.\begin{matrix} x + y = 7 \\ xy = 10 \end{matrix}\right\}$	2	1	1	Suma/ Multiplicación	Izquierda
7	$20 = x(x + 1)$	1	1	1	Suma/ Multiplicación	Derecha

La administración del cuestionario en el aula tuvo lugar durante una hora lectiva, estando presentes la primera autora de este trabajo y la profesora de matemáticas de los alumnos.

4. ANÁLISIS DE LOS DATOS.

En este apartado describimos el modo en que hemos analizado los datos obtenidos a partir del instrumento de recogida de datos, para posteriormente presentar los resultados obtenidos y la discusión de los mismos.

4.1. ANÁLISIS DE LO DATOS.

Iniciamos el análisis identificando la estructura sintáctica de cada problema formulado por los estudiantes. Para ello siempre que ha sido posible hemos traducido el enunciado a simbolismo algebraico, procediendo de izquierda a derecha en la lectura del mismo, por ejemplo, el problema "Tengo 6 naranjas y necesito fresas para tener en total 8 frutas. ¿Cuantas fresas necesito?", propuesto por un alumno para la ecuación 1, tendría como estructura sintáctica $6 + x = 8$.

No consideramos en este análisis aquellos problemas que no tienen sentido, es decir, que no pueden traducirse a un lenguaje simbólico. Un ejemplo es el problema siguiente: "En una casa hay 2 personas y una tele y 9 muebles ¿Qué sería la tele? ¿x o y?". También descartamos aquellos enunciados que piden directamente resolver la ecuación o sistema de ecuaciones dado.

Para el análisis de los enunciados formulados por los estudiantes, a partir de un primer análisis de los mismos así como de trabajos previos consultados, hemos definido unas categorías que describimos en la tabla 2. Para su elaboración hemos tenido en cuenta los objetivos de investigación de este trabajo, por ello atendemos a las características de los problemas inventados por los estudiantes que entendemos relacionados con el significado atribuido al simbolismo algebraico, dejando a un lado otras, como si el problema es real o no, o si aparece simbolismo algebraico en el enunciado.

Clasificamos las categorías en sintácticas, de la A a la F, y semánticas de la G a la I, según si atienden a características sintácticas o semánticas de los problemas planteados.

Tabla 2. *Definición de las categorías*

Categoría	Nombre	Definición
A	Conservación de la estructura de la ecuación.	La estructura sintáctica del problema, es igual que la de la ecuación o sistema de ecuaciones dado.
B	Conservación del orden de los miembros de la ecuación.	El orden de los diferentes miembros de la estructura sintáctica del problema, así como el de los miembros a ambos lados del signo igual, es el mismo que en la ecuación o sistema de ecuaciones propuesto.
C	Conservación de las operaciones entre los términos de la ecuación.	Las operaciones que se presentan entre los términos[1] en la estructura sintáctica del enunciado planteado son las mismas que las que se presentan en la ecuación o sistema de ecuaciones dado.
D	Presencia de incógnitas.	En la estructura sintáctica del problema aparece/n alguna/s incógnita/s no despejada/s en un miembro.
E	Establece una relación que vincula coeficientes e incógnitas.	En la estructura sintáctica del problema están presentes los mismos coeficientes de las incógnitas que aparecen en la ecuación dada, operando con dichas incógnitas.
F	Igual número de incógnitas.	El número de incógnitas que aparecen en la estructura sintáctica del problema es el mismo que el de la ecuación o sistema de ecuaciones dado.
G	Da significado a las incógnitas.	En el enunciado del problema se asigna a las incógnitas un significado de un contexto no matemático.
H	Da significado a las operaciones aditivas.	En el enunciado del problema las operaciones aditivas tienen significado y por tanto el problema presenta alguna de las siguientes estructuras semánticas: cambio (CM), combinación (CB), comparación (CP) o igualación (IG) de cantidades.

[1] Los términos pueden ser simples o complejos, según estén formados únicamente por un número o símbolo o en cambio incluya productos (ej., $3x^2$) o términos con paréntesis (ej, $(4+2)$). A diferencia de otros autores como Vega-Castro (2010), para nuestro análisis no consideramos el signo que le precede como parte del término.

Tabla 2. *Definición de las categorías*

Categoría	Nombre	Definición
I	Da significado a las operaciones multiplicativas.	En el enunciado del problema las operaciones multiplicativas, tanto entre coeficientes e incógnitas como entre incógnitas, tienen significado. El problema presenta alguna de las siguientes estructuras semánticas: proporcionalidad simple (PS), comparación (CP) o producto cartesiano (PC).

4.2. Resultados y Discusión.

En este apartado presentamos y discutimos los resultados obtenidos del análisis de los enunciados propuestos por los estudiantes atendiendo por separado a cada una de las categorías consideradas en el análisis, y teniendo en cuenta las variables de tarea implicadas en el diseño del cuestionario.

Categoría A. En cuanto a la conservación de la estructura de la ecuación, no se detecta influencia al considerar de forma separada las variables de tarea número de incógnitas, coeficiente de la incógnita y operación de la incógnita. Así, los problemas cuya estructura sintáctica conservan la estructura de la ecuación original son: quince para la ecuación número 1, ocho para la 2 y la 4, siete para la 5, y seis para la 3, 6 y 7. Las ecuaciones 1, 2, 3, 4 y 7 tienen el mismo número de incógnitas, las ecuaciones 1, 4, 6 y 7 el mismo coeficiente de la incógnita, y las ecuaciones 1, 2, 3 y 5 la misma operación con la incógnita.

La primera ecuación destaca sobre las demás por ser para la que proponen más enunciados que conservan la estructura de la ecuación original (quince problemas), en este caso el número de incógnitas es uno, el coeficiente de la incógnita es uno y la operación con la incógnita es la suma. En la ecuación 2 a pesar de que las únicas variables de tarea que varían respecto de la primera son el coeficiente de la incógnita y la posición de la misma, los estudiantes encuentran más dificultades para proponer un problema. Entendemos que la dificultad se debe al coeficiente la incógnita, puesto que la posición de la misma (a la izquierda del signo igual) es más habitual para los estudiantes.

Para la tercera ecuación se obtiene el mayor número de problemas que no conservan la estructura sintáctica (once problemas, para el resto de las ecuaciones el número de problemas que no conservan la estructura sintáctica oscila entre cuatro y nueve). Esta es la única ecuación en la que la incógnita se encuentra a ambos lados del signo igual.

Categoría B. Respecto a la conservación del orden de los miembros de la ecuación, señalar que para las ecuaciones 1, 4 y 7 el número de problemas cuya estructura sintáctica no conserva el orden de los miembros son quince, seis y cuatro respectivamente, mientras que para el resto de ecuaciones no la conservan entre cero y tres problemas. Las ecuaciones 1, 4 y 7 son las únicas en las que la incógnita se encuentra situada a la derecha del signo igual.

El hecho de los estudiantes tiendan a situar las incógnitas en el miembro izquierdo de la ecuación era esperable, dado que a lo largo de la educación primaria y secundaria es más frecuente presentar la incógnita a la izquierda del signo igual, en el caso de expresiones algebraicas, así como los resultados numéricos se suelen presentar a la derecha del signo igual en el caso de expresiones aritméticas.

Categoría C. En cuanto a la conservación de las operaciones entre los términos de la ecuación, destacan las ecuaciones 3 y 4 por ser para las que hay un mayor número de problemas que no conservan las operaciones (nueve problemas), mientras que para el resto de ecuaciones dicho número varía entre tres y seis. Las ecuaciones 3 y 4 solo tienen en común la variable de tarea número de incógnitas. Sin embargo esta variable de tarea no parece estar relacionada con la codificación de esta categoría ya que para las ecuaciones 1, 2, 3, 4 y 7, que tienen el mismo número de incógnitas, el número de problemas que si conservan las operaciones entre los miembros son dieciséis, diez, ocho y siete respectivamente.

La ecuación 3 es la única donde la incógnita se encuentra a ambos lados del signo igual. Esta característica ocasionó que los estudiantes identifican como diferentes las incógnitas situadas en cada miembro. Isik y Kar (2012) coinciden en señalar la mayor dificultad para inventar problemas cuando la incógnita se encuentra en ambos lados del signo igual, en su caso en un estudio con profesores en formación. Otros autores como Filloy y Rojano (1989) señalan que hay un "corte didáctico" cuando los alumnos pasan a trabajar con ecuaciones con la incógnita a un solo lado del signo igual a ecuaciones con la incógnita a ambos lados. También Cerdán (2008) muestra que en los procesos de traducción del sistema de representación verbal al simbólico, se producen menos igualdades correctas cuando los estudiantes trabajan con este tipo de ecuaciones.

Categoría D. En la mayoría de los problemas que proponen los estudiantes hay presencia de incógnita: diecisiete problemas para la ecuación 1, catorce para las ecuaciones 3 y 5, doce para la 2 y la 6, y once problemas para la 4 y la 7. Teniendo en cuenta las variables de tarea que caracterizan a cada una de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones, no se detecta que la codificación de la categoría D dependa de las variables de tarea tenidas en cuenta de forma separada.

Categoría E. Respecto a esta categoría, destacan los problemas propuestos para las ecuaciones 3, 4 y 5 por ser en los no se establece relación que vincula el coeficiente con la incógnita en un mayor número: tres para las ecuaciones 3 y 4, y cuatro para la 5. En las demás ecuaciones no ocurre esta dificultad con la excepción de un caso en la ecuación 1.

Las ecuaciones 3 y 5 se caracterizan por tener coeficientes de la incógnita diferentes de uno, y también de dos, lo que parece estar relacionado con que tengan dificultad a la hora de relacionar el coeficiente con la incógnita. Consideramos que para los estudiantes es más fácil decir el doble, ya que están más acostumbrados a trabajarlo y a escucharlo, que decir por ejemplo seis veces o el séxtuplo.

En el caso de la ecuación 4, los problemas escolares que normalmente se resuelven con este tipo de expresiones suelen estar asociados al área de un cuadrado, y en menor medida a otras situaciones en las que la multiplicación tienen significado de producto cartesiano. Como en los problemas propuestos por los estudiantes no se presentan este tipo de situaciones, suelen poner en el enunciado expresiones como el doble o el cuádruplo para intentar referirse a la segunda potencia, lo cual hace que no establezcan una relación que vincule correctamente el coeficiente con la incógnita.

Categoría F. En cuanto a la categoría igual número de incógnitas, destacan los enunciados propuestos para las ecuaciones 3, 5 y 6, por ser en los que hay mayor diferencia del número de incógnitas respecto de las ecuaciones y sistemas originales: para las ecuaciones 3 y 6, en cuatro problemas no se conserva el número de incógnitas, y en la ecuación 5 en cinco problemas, mientras que para el resto de ecuaciones dicho número oscila entre cero y dos. La ecuación número 3 se caracteriza por presentar incógnita en ambos lados del signo igual. Las dificultades que los estudiantes suelen manifestar a la hora de trabajar con ecuaciones con esta característica quedan reflejadas en la discusión de los resultados de la categoría C. Los sistemas de ecuaciones 5 y 6 tienen como variable de tarea diferente del resto de ecuaciones el número de incógnitas, que es dos. En estos casos los estudiantes suelen añadir una o dos incógnitas, mostrando dificultad para referir a las mismas incógnitas cuando en el enunciado narran relaciones relativas a ecuaciones diferentes.

Categoría G. Respecto a esta categoría cabe señalar que en los problemas correspondientes a las ecuaciones 4 y 7 son en los que menos significado se les da a la incógnita: seis y siete problemas respectivamente. La variable de tarea común a estas ecuaciones es la operación de la incógnita, siendo en ambos casos la multiplicación. Para el resto de las ecuaciones, el número de problemas a los que no les dan significado a las incógnitas varía desde cero hasta tres.

De forma general (75%) los estudiantes atribuyen significados a las incógnitas asociados a contextos no matemáticos. Observamos que los estudiantes no relacionan las ecuaciones con contextos de áreas lo cual dificulta que puedan dar significado a las incógnitas en las ecuaciones que incluyen multiplicaciones entre estas, como es el caso de las ecuaciones 4 y 7.

Categoría H. En cuanto al número de problemas en los que los estudiantes les dan significado a las operaciones aditivas son dieciséis problemas para la ecuación número 1, doce para la 2, quince para la 3, uno para la 4 (téngase en cuenta que en esta ecuación no hay presencia de estructura aditiva), catorce para la 5 y nueve para la 6 y la 7. Por tanto, en general los estudiantes dan significado a las operaciones aditivas en los enunciados que proponen, predominando las situaciones de combinación (57%), seguidas de las de cambio (39%) y las de igualación (4%). Teniendo en cuenta las variables de tarea que caracterizan a cada una de las ecuaciones (ver tabla 1), no se detecta influencia en la codificación de esta categoría de ninguna de ellas de forma separada.

Categoría I. Respecto al significado de las operaciones multiplicativas, destacan las ecuaciones número 4, 6 y 7 por ser en las que menos le dan significado a las mismas (nueve, doce y trece problemas respectivamente en los que no les dan significado a las operaciones multiplicativas), para el resto de ecuaciones el número de problemas a los que no les da significado a las operaciones multiplicativas varia desde cero hasta siete. La variable de tarea común a las ecuaciones 4, 6 y 7 es la operación de la incógnita, que en todas ellas es la multiplicación. Como hemos mencionado en el apartado de la categoría G, los problemas asociados a las ecuaciones con incógnitas multiplicándose están asociados a un tipo de contexto más específico y cuando los estudiantes no lo relacionan con el mismo no son capaces de dar significado a esta operación.

5. CONCLUSIONES.

Los estudiantes, en su mayoría, son capaces de proponer un enunciado para cada una de las ecuaciones que se les proporcionó en el cuestionario. Hemos comparado las estructuras sintácticas de dichos enunciados con las ecuaciones y sistemas de ecuaciones originales, por medio de las categorías de tipo sintáctico definidas. Este análisis nos ha permitido obtener resultados sobre las características de las ecuaciones que dificultan a los estudiantes el inventar un problema que se resuelva con dicha expresión y, por lo tanto, el dotar de significado al simbolismo algebraico.

Posteriormente la definición de las categorías de tipo semántico nos ha permitido determinar si los estudiantes participantes en el estudio, dan o no significado a las incógnitas, las operaciones aditivas y las operaciones multiplicativas.

Por lo tanto, por medio de la consecución de los dos primeros objetivos específicos planteados hemos abordado el tercer objetivo de la investigación: identificar las características de las ecuaciones que dificultan a los estudiantes la tarea de inventar un problema. Para ello hemos comparado la codificación de cada una de las categorías, tanto sintácticas como semánticas, con las variables de tarea que caracterizan a cada una de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

Con la consecución de estos tres objetivos específicos hemos avanzado en el objetivo general de este trabajo, consistente en analizar la capacidad para dotar de significado a expresiones simbólicas que ponen de manifiesto un grupo de estudiantes al final de la Educación Secundaria Obligatoria, a través de la tarea de invención de problemas.

Con este análisis hemos dado un primer paso en la indagación sobre la capacidad de dar significado al simbolismo algebraico, de los estudiantes al término de la educación secundaria, y sobre la utilidad de la actividad de invención de problemas como herramienta evaluadora del conocimiento. La información obtenida es de utilidad para profundizar en el conocimiento de los estudiantes, tanto desde el punto de vista de la investigación como de la docencia. Por un lado aporta información útil para el desarrollo de investigaciones centradas en la comprensión del simbolismo algebraico y las dificultades que los estudiantes manifiestan al trabajar con el mismo. También aporta información sobre los beneficios de la actividad de invención de problemas como herramienta que permite indagar en la comprensión real de los estudiantes, tal y como se propone en Castro (2012). Desde el punto de vista de la docencia, los resultados presentados pueden ser interesantes para la elaboración de propuestas didácticas. Por ejemplo, tener en cuenta los factores de las ecuaciones y sistemas que hacen que los estudiantes tengan más dificultades en interpretar y dar significado al simbolismo algebraico, o el trabajo mediante la invención de problemas, con vista al planteamiento de determinadas actividades.

REFERENCIAS.

AYLLÓN, M. F., CASTRO, E., MOLINA, M. (2010). Conocimiento aritmético informal puesto de manifiesto por una pareja de alumnos (6-7 años) sobre la invención y resolución de problemas. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, T. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 223-233). Lleida: Edicions de la Universitat de Lleida y Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

BOLETÍN OFICIAL DEL ESTADO (2006). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*. (Vol. BOE Nº 5, pp. 677-773). Madrid, España: Ministerio de Educación y Ciencia.

BOLETÍN OFICIAL DE LA JUNTA DE ANDALUCÍA (2007a). *Decreto 231/2007, de 31 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes a la educación secundaria obligatoria en Andalucía.* (Vol. BOJA Nº 156, pp. 15-25). Sevilla: Junta de Andalucía.

BOLETÍN OFICIAL DE LA JUNTA DE ANDALUCÍA (2007b). *Orden de 10-8-2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía.* (Vol. BOJA Nº 171, pp. 23-65). Sevilla: Junta de Andalucía.

BOOTH, L. R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors.* Windsor, UK: NFER-Nelson.

CASTRO, E. (2011). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (pp. 1-15). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

CASTRO, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García, L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Actas del XVI Simposio de la SEIEM*, (pp. 75-94). Baeza, Jaén: *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.*

CERDÁN, F. (2008). *Estudio sobre la familia de problemas Aritméticos – Algebraicos*. Server de Publicacions de la Universitat de Valencia, España.

CERDÁN, F. (2010). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico: un catálogo de errores. *PNA, 4*(3), 99-110.

FILLOY, E. Y ROJANO, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the learning of Mathematics, 9*(2), 19-25.

ISIK, C. Y KAR, T. (2012). The analysis of the problems the pre-service teachers experience in posing problems about equations. *Australian Journal of Teacher Education, 37*(9), 93-113.

KIERAN, C. (1979). Children's operational thinking within the context of bracketing and the order of operations. En D. Tall (Ed.), *Proceeding of the Third Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 128-133). Coventry, Inglaterra: Warwick University, Mathematics Education Research Centre.

KIERAN, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 317-326.

KIRSHNER, D. (1989). The visual syntax of algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 274-289.

KÜCHEMANN, D. E. (1981). Algebra. En K.M. Hart, M.L. Brown, D.E. Kuchemann, D. Kerslake, G. Ruddock y M. McCartney (Eds.), *Children's understanding of mathematics: 11–16* (pp. 102–119). London: John Murray.

MACGREGOR, M y STACEY, K., (1997). Students' understanding of algebraic notation. *Building foundations for algebra. Mathematics Teaching in the Middle School, 2*, 252-260.

RODRÍGUEZ-DOMINGO, S. (2011). *Traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólico por estudiantes de secundaria*. Trabajo de Fin de Máster. Granada, España: Universidad de Granada.

RUANO, R. M., SOCAS, M. y PALAREA, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA, 2*(2), 61-74.

SILVER, E. A., KILPATRICK, J., y SCHLESINGER, B. (1990). *Thinking through mathematics: Fostering inquiry and communication in mathematics classrooms.* New York: The College Board.

VEGA-CASTRO, D. (2010) *Sentido estructural manifestado por alumnos de 1º de bachillerato en tareas que involucran igualdades notables*. Trabajo de Fin de Máster. Granada, España: Universidad de Granada.