



DEDUCCIÓN DEL PRINCIPIO MULTIPLICATIVO. UNA ACTIVIDAD EXPLORATORIA EN ALUMNOS DE 1º DE E.S.O.

Sandra Fuentes, *Universidad de Granada*, sandrafuentesm@gmail.com
Rafael Roa, *Universidad de Granada*, rroa@ugr.es

RESUMEN.

El razonamiento combinatorio es una de los tópicos que ha quedado rezagado del currículum español, pero es uno de los pilares fundamentales para trabajar los espacios muestrales utilizados en probabilidad. En este trabajo se analizará los resultados de una actividad exploratoria de deducción del principio multiplicativo con material concreto, donde los alumnos tienen que relacionar los datos obtenidos para llegar a la generalización del concepto, e introducir una tercera variable, por último se procede a la comparación entre las distintas conformaciones de parejas según género, obteniendo interesantes resultados.

Nivel educativo: Educación Secundaria, Formación de Profesores, Maestros en Ejercicio.

1. INTRODUCCIÓN.

Esta investigación nace de la dificultad de enseñar el razonamiento combinatorio en los diferentes niveles educativos y sobre todo que los alumnos sean capaces de utilizar lo aprendido en la resolución de problemas que involucran este tipo de conceptos.

Esta dificultad ya había sido motivo de estudio en Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1994) encontrando que la combinatoria es un tema que no se presenta en el currículo nacional, que el tema en si ya es dificultoso y su enseñanza se presenta desconectada de los otros temas del currículo, lo que provoca que no se enseñe o cuando se enseña sean las fórmulas el aprendizaje fundamental. Los autores también explican la importancia de que los alumnos trabajen la combinatorio ya que les ayuda a resolver problemas que involucran probabilidad y es un componente básico del razonamiento formal, incentivando en los alumnos la lógica proposicional.

Tenemos también los aportes de Kapur (1970) que nos dice que este tópico ayuda a los alumnos a realizar actividades características de las matemáticas como conjeturar, generalizar, indagar soluciones, optimizar recursos y, específicamente en combinatoria, examinar todas las posibilidades, enumerarlas y hallar la mejor solución, contribuyendo al pensamiento sistémico.

Observamos que la combinatoria es un tema importante, pero que esto no se ve reflejado en el currículo nacional (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007), dado que en estos documentos no se hace mención al tema de forma explícita, solo se puede ver, de forma implícita, en el recuento de objetos en algunas aplicaciones de probabilidad. Esto ya se había mencionado en Batanero, Godino



XV CONGRESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS
MATEMÁTICAS: EL SENTIDO DE LAS MATEMÁTICAS.
MATEMÁTICAS CON SENTIDO



y Navarro-Pelayo (1994) donde nos indican que la combinatoria no tiene cabida en los currículos españoles no universitarios.

El objetivo de esta investigación es crear una actividad generadora y que induzca intuitivamente al alumno el concepto de principio multiplicativo; para ello se comenzó por analizar cuál es la teoría que sustenta este tópico y nos encontramos con Inhelder y Piaget (1951) que nos dicen que cuando los niños de 12-13 años están con el estudio de las operaciones formales los conceptos de análisis combinatorio emergen intuitivamente, aunque años más tarde reformularon su postura diciendo que lo intuitivo emerge entre los 15 y 20 años, luego están los estudios de Fishbein (1975) que complementa la información anterior diciéndonos que alumnos de 11-12 años con una instrucción adecuada pueden comprender y resolver problemas de análisis combinatorio.

Para contextualizar la investigación en nuestro entorno, se buscaron cuáles habían sido las investigaciones que se habían realizado en España en torno a este tópico, nos encontramos con la tesis doctoral de Virginia Navarro-Pelayo(1994) que aborda el razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria, donde aplicó una prueba para evaluar el razonamiento combinatorio en alumnos de 14-15 años y los resultados fueron muy desmotivadores ya que los alumnos no lograron resolver ni las tareas más sencilla donde solo necesitaban de conteo, sin importar si estos tenían o no instrucción en el tópico de combinatoria, en esta tesis también se agrupan y analizan los errores más comunes cometidos por los alumnos, dándole a los docentes las herramientas para poder afrontar la enseñanza de la combinatoria desde los errores que se han cometido, la autora también nos dice que la combinatoria es considerado un tema difícil por los profesores que lo enseñan.

Rafael Roa (2000) postula que puede que los resultados del estudio de Virginia se deban a que los alumnos no están lo suficientemente maduros para abordar los problemas de combinatoria propuestos, por lo que plantea el estudio en alumnos de nivel universitario y con instrucción matemática y estadística, pero los resultados siguen siendo muy similares a los obtenidos en el estudio anterior, es decir, alumnos de 4º de universidad con conocimientos de análisis combinatorio obtuvieron resultados similares a alumnos de 3º de secundaria sin instrucción, entonces nos preguntamos, si el problema no es la instrucción ni la edad de los alumnos... ¿Cuál es el problema de la enseñanza y el aprendizaje de la combinatoria?...

Del análisis de este cuestionamiento nace nuestro interés en la aplicación de una actividad que indujera al alumno a la teoría desde la manipulación, con lo que esperamos sea un aprendizaje con sentido para el niño, de Godino, Batanero y Font (2007) sabemos que las situaciones-problemas no aparecen aisladas, sino englobadas en campos de problemas donde las soluciones pueden ser generalizadas a situaciones similares. Lo que nos lleva a la confección del instrumento que cumpla con satisfacer nuestro objetivo primordial.

2. EL INSTRUMENTO, PRUEBA PILOTO Y RECOGIDA DE INFORMACIÓN.

2.1. EL INSTRUMENTO.

Para lograr el objetivo que nos propusimos, elaboramos un instrumento que comienza con casos particulares de combinaciones de vestuario, las cuales aumentan en dificultad gradualmente; para que el alumno llegase a un caso particular lejano y a la generalización del concepto con dos variables (camisetas y pantalones). Para verificar si se lograba el objetivo, por último, se le plantea la generalización, sin casos particulares, de la tarea con una tercera variable (gorras). Se obtiene como resultado de esta primera parte un set de 19 folios, cada uno con las indicaciones del número y color de las prendas para vestir a un niño, se les ofrecía en los 16 primeros folios una serie de 24 dibujos de niños iguales al que debían vestir, para que pudieran pintarlos si así lo estimaban conveniente (ver figura nº1) y un espacio destinado a la escritura de la explicación de cómo lograron obtener el resultado. También se les pide que identifiquen la conformación del grupo, 2 hombres, 2 mujeres o mixto y que a medida que van terminando con cada uno de los folios pidan el siguiente, los folios los van guardando los grupos, ya que queremos que puedan volver a ver la información que ya escribieron y de éstas deduzcan cuál es la regla general.

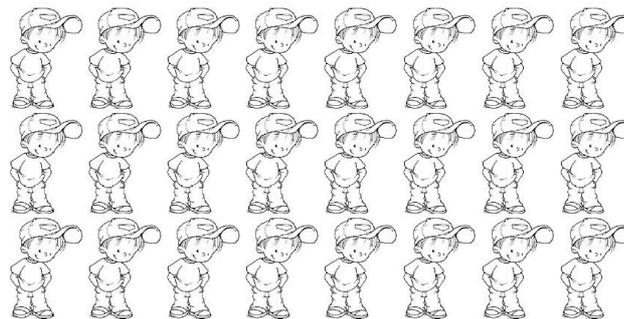


ACTIVIDAD EXPLORATORIA

Hay que vestir al niño, formando todas las combinaciones posibles de ropa, anota los resultados en la tabla y al final de la hoja explica cómo llegaron a ese resultado.



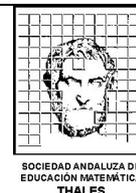
Nº pantalones y colores	Nº camisetas y colores	Nº de maneras diferentes
2 pantalón	3 camisetas	
<ul style="list-style-type: none"> • ROJO • AMARILLO 	<ul style="list-style-type: none"> • AZUL • VERDE • AMARILLO 	



Explicación:

... Cuando termines, pide el folio con la siguiente actividad, Gracias.

Figura 1. 7º folio actividad exploratoria



Luego de la creación del instrumento se plantean nuevos objetivos que detallan y complementan al objetivo que motivó a la investigación

Los objetivos de esta actividad son:

1. Crear una tarea que introduzca el concepto de principio multiplicativo y la generalización del mismo
2. Cuantificar las respuestas correctas.
3. Describir y analizar las estrategias propuestas por los alumnos
4. Comparar los resultados por conformación del grupo

2.2. LA PRUEBA PILOTO.

Se aplicó una prueba piloto para delimitar el tiempo que los alumnos tardarían en realizar las tareas y verificar si los ítems eran comprendidos por los alumnos, la prueba piloto se le aplicó a una niña de 15 años de 4° de ESO, el tiempo que necesitó para hacer todas las tareas propuestas fue de 27 minutos y se detectó que la instrucción de vestir al niño no fue comprendida, para la primera actividad donde se le daba un pantalón y una camiseta, la niña pintó por separado un niño con pantalón y camiseta, otro solo con pantalón y otro sólo con camiseta y por ultimo uno sin pintar, lo que arrojo como respuesta que con un pantalón y una camiseta tengo cuatro vestimentas diferentes, se le hizo la aclaración pertinente y continuó con el resto de actividades correctamente, llegando a la generalización e introducción de una tercera variable sin problemas y en poco tiempo, este problema se tuvo en consideración como instrucción verbal para la aplicación de la prueba definitiva.

2.3. RECOGIDA DE INFORMACIÓN, PRUEBA DEFINITIVA.

Las actividades se aplicaron la primera semana de marzo del 2014, fue una muestra intencionada de 54 alumnos de 12-13 años de edad que cursan 1° de ESO en dos centros de la ciudad de Granada, Colegio San José (concertado) e IES Cartuja (público), y separados en tres aulas diferentes, se les pidió que formaran parejas y que marcaran la conformación del grupo en el primer folio, se les explicó que no era una actividad evaluada y que necesitábamos que escribieran lo que hacían en cada uno de los folios, que los dibujos que se les presentaban en cada folio eran de ayuda y que no era necesario pintarlos si no lo estimaban conveniente. La disposición hacia la tarea encomendada de alumnos y profesores fue muy buena, los alumnos trabajaron de forma metódica durante todo el período de una hora, preguntaban que tenía de matemáticas la actividad ya que sólo debían pintar y que las actividades eran muy fáciles, al final se les explicó cuál era la relación con las matemáticas. Los profesores en cambio, se sintieron un poco pesimistas en torno a lo que sus alumnos podían lograr, ya que el tópico no se ve en el currículo de la ESO actualmente, pero al terminar la actividad comentaron lo mucho que los alumnos habían logrado llegando a la generalización. La actividad fue dirigida íntegramente por la investigadora, con la presencia en el aula de los profesores de la asignatura.

3. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS.

Luego de la aplicación de las tareas se procedió a la tabulación de los datos para dar respuestas a los objetivos 2, 3 y 4

3.1. OBJETIVO 1. CREAR UNA TAREA QUE INTRODUZCA EL CONCEPTO DE PRINCIPIO MULTIPLICATIVO Y LA GENERALIZACIÓN DEL MISMO

El material entregado a los estudiantes, consistente en unas fichas que pueden colorear si lo creen necesario y en las que va aumentando gradualmente el tamaño de los parámetros, como se detalló anteriormente en el apartado 2.1, éste instrumento fue sometido al juicio de un experto en didáctica de la combinatoria, haciendo algunas sugerencias que fueron compartidas por los investigadores, generando así el instrumento descrito, con él se pretende que los alumnos puedan llegar, en muy poco tiempo, al principio multiplicativo y a su posterior generalización.

3.2. OBJETIVO 2. CUANTIFICAR LAS RESPUESTAS CORRECTAS

Para dar respuesta a este objetivo se ordenó la información de las respuestas de cada uno de los grupos en una tabla (tabla nº1) donde se describe la tarea y el porcentaje de respuestas correctas realizadas por los grupos.

Ítem	N° pantalones	N° camisetas	N° de maneras diferentes	
1	1	1	100%	<p>17. Ahora bien, si en realidad el niño tiene 9 camisetas y 7 pantalones, ¿De cuántas maneras distintas se puede vestir? Explica en detalle cómo llegaron a esa respuesta.</p> <p style="text-align: center;">67%</p> <p>18. Genera una respuesta para el caso de que el niño tuviera "C" camisetas y "P" pantalones. Explica en detalle cómo llegaron a esa respuesta.</p> <p style="text-align: center;">52%</p> <p>19. Si también incluimos las gorras ("G") como parte de la vestimenta, ¿cómo afecta esto a las respuestas 16 y 17? Explica en detalle cómo llegaron a esa respuesta, puedes dar ejemplos.</p> <p style="text-align: center;">37%</p>
2	1	2	100%	
3	1	3	100%	
4	1	4	100%	
5	2	1	93%	
6	2	2	81%	
7	2	3	78%	
8	2	4	81%	
9	3	1	89%	
10	3	2	78%	
11	3	3	67%	
12	3	4	78%	
13	4	1	89%	
14	4	2	78%	
15	4	3	81%	
16	4	4	78%	

Tabla 1. Resultados porcentuales de respuestas correctas

Se observa en la tabla que a medida que la tarea se complica son menos los alumnos que la logran, llegando en el ítem 16 a un 78% de respuestas correctas al tener 4 pantalones y 4 camisetas distintas, este número disminuye aún más en las preguntas de un caso particular lejano con un 67% de preguntas correctas en el ítem 17, en este folio los alumnos no tenían opción de poder pintar los casos particulares lo que dificultó aún más la tarea si no había descubierto la regla general, en la siguiente pregunta, ítem 18, se introduce la notación de



letras como variable y se le pide que generalice lo que ha descubierto con los casos particulares, un poco más de la mitad de los grupos, un 52% logran este ítem y en la última tarea se introduce una tercera variable lo que complicó el trabajo a los alumnos llegando a obtener un 37% de respuestas correctas en el ítem 19.

3.3. OBJETIVO 3. DESCRIBIR Y ANALIZAR LAS ESTRATEGIAS PROPUESTAS POR LOS ALUMNOS.

Las estrategias utilizadas para llegar a la generalización fueron múltiples, 16 grupos explicaron que para llegar a la solución habían utilizado la multiplicación, 2 grupos utilizaron la suma, 1 grupo utilizó la seriación ya que los datos se le entregaban en forma ordenada, 1 grupo utilizó el diagrama de árbol, 1 grupo utilizó las relaciones como estrategia y 6 grupos no hicieron explícita su estrategia, aunque llegaron a completar los 16 ítems de casos particulares, por lo que no se pudieron clasificar en ninguna estrategia específica, nos damos cuenta que alrededor del 60% de los grupos utiliza la multiplicación como estrategia, a continuación se ordenan los resultados de estrategias en una tabla resumen (tabla nº2)

ESTRATEGIA	Nº GRUPOS	PORCENTAJE
Multiplicación	16	59,2%
Suma	2	7,4%
Seriación	1	3,7%
Relacional	1	3,7%
Diagrama de árbol	1	3,7%
No lo hace explícito	6	22,2%
Total	27	

Tabla 2. Porcentajes y frecuencias de estrategias utilizadas

También descubrimos cuando analizábamos los datos otras curiosidades que se desprenden del objetivo 3.

- La estrategia se hace explícita, es decir, escriben que operación están realizando, en promedio en la tarea 12.
- Los alumnos pintan correctamente en promedio hasta la tarea 8, pero
- Trabajan con los dibujos en promedio hasta la tarea 11.
- Los alumnos completan en promedio un total de 15 de 19 tareas propuestas.

3.4. OBJETIVO 4. COMPARAR LOS RESULTADOS POR CONFORMACIÓN DEL GRUPO

Este objetivo justifica de alguna manera el trabajo en grupo, la conformación de los grupos fue intencionada por los alumnos y en la cual los maestros e investigadores no tuvieron incidencia alguna.

12 parejas de hombres

- 6 parejas utilizan como estrategia la multiplicación
- 2 parejas utilizan como estrategia la suman
- 1 pareja utiliza como estrategia la seriación
- 1 pareja utiliza como estrategia la relación
- 2 parejas no hacen explícita la estrategia que utilizan
- 66% hace explícita la estrategia en la tarea 12
- Pintan bien en promedio hasta la tarea 6
- Utilizan los dibujos en promedio hasta la tarea 10
- Completan en promedio un total de 14 tareas correctas

6 parejas mixtas

- 2 parejas utilizan como estrategia la multiplicación
- 4 parejas no hacen explícita la estrategia que utilizan
- 33% hace explícita la estrategia en la tarea 9
- Pintan bien en promedio hasta la tarea 8
- Utilizan los dibujos en promedio hasta la tarea 10
- Completan en promedio un total de 15 tareas correctas

9 parejas de mujeres

- 8 parejas utilizan como estrategia la multiplicación
- 1 pareja utiliza como estrategia el diagrama de árbol
- 100% hace explícita la estrategia en la tarea 11
- Pintan bien en promedio hasta la tarea 9
- Utilizan los dibujos en promedio hasta la tarea 10
- Completan en promedio un total de 17 tareas correctas



Figura 2. Fotografía de tarea resuelta

La siguiente tabla (nº 3) nos muestra el número de alumnos y el porcentaje con respecto al grupo de estrategias utilizadas, en la tabla se aprecia que los hombres trabajaron una mayor diversidad de estrategias al tratar de generalizar lo descubierto en la actividad exploratoria y que todas las mujeres llegaron a explicitar alguna estrategia.

ESTRATEGIA	HOMBRES		MIXTO		MUJERES	
	Nº	%	Nº	%	Nº	%
Multiplicación	6	50%	2	33%	8	88%
Suma	2	16%	-	-	-	-
Seriación	1	8%	-	-	-	-
Relacional	1	8%	-	-	-	-
Diagrama de árbol	-	-	-	-	1	11%
No lo hace explícito	2	16%	4	66%	-	-
Total	12		6		9	

Tabla 3. Porcentajes y frecuencias de estrategias utilizadas por conformación de grupo

Si ahora vemos en paralelo la información (tabla nº4), observamos que no se aprecian diferencias entre la conformación de grupo en relación al número de tareas en las que utilizan los dibujos como referente de su respuesta, ya que todos llegan en promedio al ítem 10, pero si hay diferencia (tabla nº5) en torno a lo que pintan correctamente, ya que los hombres lo hacen correctamente en promedio hasta el ítem 6 y las mujeres hasta el ítem 9.

Utilizan los dibujos hasta...		
Hombres	Mixto	Mujeres
10	10	10

Tabla 4. Utilización de dibujos

Pintan correctamente hasta...		
Hombres	Mixto	Mujeres
6	8	9

Tabla 5. Pintan correctamente

En torno a las estrategias que utilizan (tabla nº6) en promedio la hacen explícita primero los grupos mixtos, y cuando se analizan las tareas que completan correctamente (tabla nº 7), las mujeres logran un mayor número de tareas correctas.

Hacen explícita la estrategia en el ítem...		
Hombres	Mixto	Mujeres
12	9	11

Tabla 6. Explicitan la estrategia

Número de tareas completadas de forma correcta...		
Hombres	Mixto	Mujeres
14	15	17

Tabla 7. Tareas completadas correctamente

Observamos que la conformación de grupo por género es un factor importante al momento de llevar a cabo correctamente la tarea, ya que si los ordenamos en forma decreciente las mujeres lograron mejores resultados en la tarea que los hombres y que las parejas mixtas evidencian un deficiente desempeño de las tareas propuestas



4. CONCLUSIONES.

Nuestra propuesta consistía en crear una actividad generadora de conocimientos, que indujera al alumno a llegar al principio multiplicativo solo con la deducción de situaciones particulares, según los análisis realizados de las tareas logramos nuestro objetivo propuesto y es más alentador que las investigaciones precedentes, ahora nos queda crear otras actividades para la deducción de los diferentes conceptos como permutación, combinación, variación, con repetición y sin repetición y verificar si estas actividades generan el conocimiento que andamos buscando de análisis combinatorio y de su aplicación en la resolución de problemas.

REFERENCIAS.

- BATANERO, GODINO Y NAVARRO-PELAYO (1994). *Razonamiento combinatorio*.
- FISCHBEIN, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*.
Dordrecht: Reidel.
- Godino, Batanero y Font (2007). *The onto-semiotic approach to research in mathematics education*.
- KAPUR (1970). Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics Education*.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2007). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*.
- NAVARRO-PELAYO, V. (1994). *Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria*, Granada.
- PIAGET, J. e INHELDER, B. (1951). *La g n se de l'id e d'hasard chez l'enfant*.
París: Presses Universitaire de France.
- ROA, R. (2000). *Razonamiento Combinatorio en Estudiantes con Preparación Matemática Avanzada*, Granada.