

TRABAJANDO EL AZAR Y LA PROBABILIDAD EN LAS PRIMERAS ETAPAS

Ignacio González-Ruiz, *Universidad de Granada*,
ignaciogonzalezruiz@hotmail.com

RESUMEN.

En este documento se presenta una propuesta de investigación destinada a ahondar en las concepciones relativas al azar y la probabilidad que manifiestan aquellos estudiantes, de Educación Primaria o Secundaria, que se inician en el estudio de la probabilidad; con el fin de reconducir, por medio de la práctica docente, aquellas que sean erróneas y dificulten su aprendizaje. Para ello se propone una metodología fundamentada en la creación del "Cubo Colorín Coloreado", como instrumento generador de situaciones aleatorias y vía de resolución de las tareas sobre las que se organiza la propuesta; la cual ha sido diseñada teniendo en cuenta las recomendaciones que se advierten en las investigaciones sobre Pensamiento Estocástico y su desarrollo.

Nivel educativo: Educación Primaria o Educación Secundaria. La propuesta está pensada en aquellos estudiantes que se inician en el estudio de la probabilidad.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

En este punto se introduce el problema de investigación sobre el que versa este trabajo, justificando su interés y analizando la presencia con la que cuenta en la literatura.

1.1. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA.

Mi situación como estudiante del curso "Didáctica de la Probabilidad y la Combinatoria", vigente en el plan de estudios del Máster en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, y el interés que despertó en mí el campo de la probabilidad, ya desde mi formación inicial como matemático, ha hecho que adopte una actitud especial hacia las cuestiones que versan sobre dicho contenido y su desarrollo, especialmente en las primeras etapas de su enseñanza, tanto en Educación Primaria como en Educación Secundaria Obligatoria. Este hecho ha sido determinante para que la propuesta que se recoge en este documento se ubique dentro de la línea de trabajo "Didáctica de la Probabilidad", a la cual he tenido la fortuna de aproximarme recientemente. Muchos de los trabajos de autores nacionales, como Carmen Batanero o María Jesús Cañizares, inciden en un buen número de situaciones problemáticas que surgen al inicio de la enseñanza del azar y la probabilidad, evidenciándose las dificultades de los docentes en el tratamiento de dichos contenidos.

El fin de este trabajo reside en proponer un diseño de investigación que permita ahondar en las concepciones relativas al azar y la probabilidad que manifiestan los estudiantes que se inician su estudio, con el objetivo de modificar aquellas que sean erróneas por medio de la práctica docente.



1.2. JUSTIFICACIÓN DE SU INTERÉS.

El currículo español confiere una especial importancia a la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad en los niveles superiores. Prueba de ello es la modalidad de bachillerato de Ciencias Sociales, dentro de la cual, en las asignaturas "Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I" y "Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II", estos contenidos gozan de una especial relevancia. Algunos organismos o instituciones educativas, como el NCTM (2000) o el MEC (2006), recomiendan fomentar en los estudiantes las experiencias estocásticas desde edades tempranas. Sin embargo, autores como Pierce y Chick (2011) indican que algunos profesores de matemáticas se encuentran inseguros al trabajar con situaciones o problemas que favorezcan las intuiciones probabilísticas de los estudiantes. Este hecho subraya la importancia que ha de concederse a estos contenidos en la formación de profesores.

En el presente trabajo se recoge una aportación, cuyo interés reside en proporcionar a los docentes un recurso capaz de advertirles de las concepciones erróneas con que cuentan los estudiantes cuando se inician en el estudio de la probabilidad.

1.3. PRESENCIA EN LA LITERATURA.

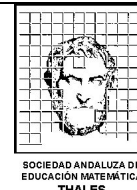
La importancia que, desde los primeros niveles, el currículo español ha ido confiriendo a la Educación Estadística y, en particular, a la probabilidad, contrasta con la acogida que la Didáctica de la Matemática, como disciplina científica, ha dado a los distintos conceptos propios del campo de la estadística, entre ellos de la probabilidad. Si bien, destaca a este respecto, la producción realizada por el "Grupo de Investigación en Educación Estadística" de la Universidad de Granada, donde el pensamiento estocástico elemental y su desarrollo ha contado con una notable acogida. Cabe decir que las aportaciones de este grupo versan, tanto sobre producciones propias, como sobre replicas a estudios de trascendencia internacional.

En relación a los contenidos de probabilidad, dentro de dicho grupo, destacan las aportaciones de Batanero (2013, 2007, 1999), Serrano (2007; 2001), Ortiz (2001) y Cañizares (1999; 1997). Del mismo modo, los contenidos de azar, aleatoriedad y su tratamiento han sido abordados por Batanero (2013, 2001, 1995), Sánchez (2013), Ortiz (2007) y Serrano (2007), poniendo especial énfasis en los niveles iniciales.

1.4. OBJETIVOS DE LA PROPUESTA.

La propuesta que se plasma en este trabajo pretende satisfacer los siguientes objetivos.

- O.1. Diseñar un instrumento que permita trabajar las nociones básicas elementales de probabilidad.
- O.2. Proponer un diseño de investigación que posibilite el trabajo de los estudiantes con las nociones probabilísticas elementales.
- O.3. Proponer un diseño de investigación que permita analizar las concepciones de los estudiantes en relación al azar y la probabilidad.
- O.4. Ahondar en la idea de juego equitativo (equiprobabilidad).
- O.5. Valorar el papel de applets que potencien la adquisición de los conceptos probabilísticos elementales.



2. MARCO TEÓRICO.

En este punto se presenta el conjunto de aspectos teóricos sobre los que se fundamenta la propuesta investigadora que se recoge en este trabajo, los cuales contarán con una especial relevancia para el buen desarrollo de la metodología.

2.1. INTERÉS DE LA CULTURA ESTADÍSTICA.

En la actualidad la presencia de la Estadística ha trascendido el ámbito científico para formar parte de aspectos cotidianos, incluyendo la información transmitida a través de los medios de comunicación, que continuamente muestran resultados de encuestas y análisis basados en métodos estadísticos que se fundamentan en conceptos como la variabilidad y en los que subyacen potentes técnicas de predicción y diseño óptimo de experimentos. Sin embargo, la comprensión de esa información es un reto casi insuperable para muchas personas, incluidos los profesionales de otras áreas de conocimiento científico no especialistas en Estadística. Algunas investigaciones señalan que, en parte, esta carencia está relacionada con el déficit de formación matemática existente en la población desde los años de escolarización.

La Educación Matemática no ha sido ajena a este hecho. Numerosos investigadores en Didáctica de la Estadística han dispuesto su interés en abordar problemas que surgen de la práctica de la enseñanza de la estadística a lo largo de los distintos niveles educativos, a fin de lograr una alfabetización o cultura estadística de la sociedad. Los autores, con mayor relevancia en la literatura, que han teorizado en relación a este hecho son Holmes (1980, 2002), Watson (1994, 1997, 2002), Gal (2002) y Batanero (2001, 2013).

Cabe decir que estos autores han impuesto los retos a los que la Cultura Estadística ha de enfrentarse en la actualidad.

2.2. EL AZAR Y LA PROBABILIDAD EN LOS PRIMEROS NIVELES.

El tratamiento del azar y la probabilidad no es ajeno a las instituciones educativas, que ya lo contemplan desde los primeros niveles de la Educación Obligatoria, habida cuenta de su importancia. El Ministerio de Educación español recoge, en el Real Decreto de Educación de 2006, que dentro de la Educación primaria (6-12 años), para el tratamiento del azar y la probabilidad deben considerarse las siguientes nociones.

PRIMER CICLO: Carácter aleatorio de algunas experiencias: Distinción entre lo imposible, lo seguro y aquello que es posible pero no seguro, y utilización en el lenguaje habitual, de expresiones relacionadas con la probabilidad.

SEGUNDO CILO: Carácter aleatorio de algunas experiencias: Valoración de los resultados de experiencias en las que interviene el azar, para apreciar que hay sucesos más o menos probables y la imposibilidad de predecir un resultado concreto. Introducción al lenguaje del azar.

TERCER CICLO: Carácter aleatorio de algunas experiencias: Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación del grado de probabilidad de un suceso.

Tabla 1. Esquema de la distribución de los contenidos de Azar y Probabilidad en Educación Primaria, MEC (2006).



Cabe mencionar que reconocidos expertos, como Piaget e Inhelder (1951) y Fischbein (1975), apuntan a que la enseñanza de los contenidos relacionados con el azar y la probabilidad en los primeros niveles, ha de iniciarse estableciendo diferencias entre lo azaroso y lo determinista y concluyendo con procesos de comparación y estimación de probabilidades, algo que avala, a la vista de lo anterior, a la legislación española.

2.3. RECURSOS PARA LA ENSEÑANZA DEL AZAR Y LA PROBABILIDAD.

Tanto organismos educativos internacionales, como el NCTM (2006), o nacionales, como MEC (2006), señalan la importancia que el buen uso de la tecnología ofrece en los procesos de enseñanza-aprendizaje. La Educación Estadística contempla que el desarrollo de la competencia tecnológica puede proveer a los estudiantes de un mayor desarrollo del pensamiento estocástico. Este hecho ha sido abordado por diversos autores. Algunos, como Cañizares (1997) o Green (1997) destacan las posibilidades que la tecnología ofrece a la hora de desarrollar el pensamiento frecuencial. Por otro lado, Fischbein (1975), Piaget e Inhelder (1951) y Cañizares (1997) abogan por potenciar las intuiciones probabilísticas haciendo uso de recursos manipulativos o relacionados con la técnica.

2.4. SIGNIFICADOS DEL CONCEPTO DE PROBABILIDAD.

Los significados que del concepto de probabilidad se manifiestan en el inicio de su tratamiento se encuentran estrechamente ligados a las creencias con las que cuentan los estudiantes. En este sentido, de los distintos significados que se atribuyen a la noción de probabilidad, Gómez y Contreras (2013) ponen el foco de atención en dos de ellos: el significado intuitivo y el frecuencial. El significado intuitivo, surge de las intuiciones que puedan generarse al observar distintos fenómenos aleatorios y tiende a asociarse a la idea de juego. Por su parte, el significado frecuencial se desarrolla tras la familiarización y el trabajo con frecuencias relativas; usualmente tiende a trabajarse junto a la idea de estimación.

3. METODOLOGÍA.

En este punto se presentan los aspectos metodológicos que conforman la propuesta de investigación y que reportarán la información necesaria, para satisfacer los objetivos de investigación, sobre las sobre los conceptos de azar y probabilidad que manifiesten los estudiantes.

3.1. DISEÑO DEL INSTRUMENTO DE RECOGIDA DE INFORMACIÓN.

Con el fin de realizar un diseño de investigación que permita ahondar en las concepciones relativas al azar y la probabilidad que manifiestan los estudiantes que se inician en el estudio de estos conceptos, en este trabajo se propone el siguiente instrumento, como vía de recogida de información: el "Cubo Colorín Coloreado". Se trata de un cubo que atiende una particularidad especial: los colores que puedan presentar cada una de sus caras. Cabe decir que la consideración de este instrumento es coherente a los antecedentes teóricos considerados en este trabajo y en su concepción alberga la vocación de satisfacer los objetivos sobre los que se erige la presente propuesta.

Para su construcción se proporcionará a los estudiantes una lámina en la que se ilustre el desarrollo del un cubo (Figura 1).

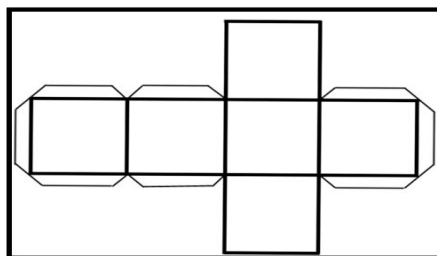


Figura 1. Estructura del desarrollo del "Cubo Colorín Coloreado".

Éstos habrán de construir el "Cubo Colorín Coloreado", en base a dicho desarrollo (Figura 2).

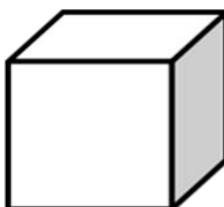


Figura 2. Estructura del "Cubo Colorín Coloreado" una vez construido y sin colorearse sus caras.

Para concluir la construcción del mencionado instrumento, se requiere además de las llamadas "Familias de Colores", que permitirán caracterizarlo y explorar distintos conceptos y situaciones relativos al azar y la probabilidad. En base a satisfacer estas pretensiones, en la Tabla 2, se consideran las siguientes familias.

FAMILIA I: Seis caras azules
FAMILIA II: Cinco caras azules y una cara blanca
FAMILIA III: Cuatro caras azules y dos caras blancas
FAMILIA VI: Tres caras azules y una cara blanca
FAMILIA V: Todas las caras tienen colores distintos: blanco, azul, rojo, verde, negro y amarillo

Tabla 2. Familias de colores.

Esta distinción en familias de colores posibilita el hecho de abordar en la práctica aquellos aspectos que, en relación a los contenidos de azar y probabilidad, se recogen en los objetivos de la investigación. En este sentido, la llamada "Familia I", permite tratar el concepto de experimento determinista y de suceso seguro; la "Familia II" y la Familia III" posibilitan el tratamiento del concepto de experimento aleatorio y, más aún, introducir elementos del lenguaje probabilístico elemental a la par que trabajar las expresiones del lenguaje cotidiano que se emplean para describir la incertidumbre; y finalmente, la "Familia IV" y la "Familia V", permiten ahondar en las ideas de equiprobabilidad y de juego equitativo.

Cabe decir, que cada familia conduce a un "Cubo Colorín Coloreado" distinto, atendiendo a los colores de sus caras. En este sentido, los estudiantes podrán colorear el cubo que se muestra en la Figura 2., a fin de conseguir que en él se

ilustren las familias que se precisen y, por ende, sea representativo de las distintas situaciones que ellas representan.

3.2. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN.

La investigación que se propone se estructura en torno a tres *fases*, bien diferenciadas, en función de las pretensiones impuestas para cada una de ellas. Cada fase se compone de un total de tres tareas. El conjunto total de las mismas, en suma nueve, posibilitará la construcción de una prueba que será implementada en con los estudiantes y destinada al estudio de las concepciones que, en torno al azar y la probabilidad, éstos manifiestan. La Tabla 3 recoge la denominación de cada una de las fases.

FASE I: Introducción al azar
FASE II: Idea de juego equitativo
FASE III: Comparación de probabilidades

Tabla 3. Denominación de las Fases.

Las tareas que configuran cada una de las fases son las siguientes.

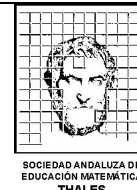
TAREA 1. Si al lanzar el CUBO COLORÍN COLOREADO sale una cara azul ganarás un premio. Sin embargo, puedes elegir qué cubo se lanzará entre dos: uno con los colores de la FAMILIA I y otro dado construido con los colores de la FAMILIA II, ¿Con cuál te quedarías paga ganar el premio? ¿Qué puedes decir de cada uno de los cubos? ¿Crees que el juego esta trucado?
TAREA 2. Si al lanzar el CUBO COLORÍN COLOREADO sale una cara azul ganarás dos premios. Sin embargo, puedes elegir qué cubo se lanzará entre dos: uno con los colores de la FAMILIA II y otro dado construido con los colores de la FAMILIA III, ¿Con cuál te quedarías paga ganar el premio? ¿Qué puedes decir de cada uno de los cubos?
TAREA 3. Considera los términos imposible, poco posible, posible, muy posible y seguro. Si se lanza el CUBO COLORÍN COLOREADO construido con los colores de la FAMILIA II, ¿qué termino usarías para ilustrar la situación "se obtiene una cara blanca? ¿Y con los colores de la FAMILIA III?

Tabla 4. Conjunto de tareas de la Fase I.

La Tarea 1 y la Tarea 2 permiten contraponer las nociones de experimento aleatorio y determinista. La Tarea 3 posibilita ahondar en las intuiciones con que el estudiante cuenta a la hora de describir fenómenos aleatorios.

TAREA 4. Está en juego un premio. Disponemos del CUBO COLORÍN COLOREADO construido con los colores de la FAMILIA IV. Se lanza. ¿Por qué color apostarías si queréis llevaros el premio?
TAREA 5. Están en juego tres premios. Disponemos del CUBO COLORÍN COLOREADO construido con los colores de la FAMILIA V. Se lanza. ¿Por qué color apostarías si queréis llevaros el premio?
TAREA 6. Un niño sabe que para ganar un premio, al lanzar el CUBO COLORÍN COLOREADO, ha de obtener una cara de color blanco. Puede elegir entre un cubo construido con los colores de la FAMILIA IV o la FAMILIA V. Si no consiguió el premio, ¿Cuál crees que fue el CUBO COLORÍN COLOREADO que eligió, el de la FAMILIA IV o el de la FAMILIA V?

Tabla 5. Conjunto de tareas de la Fase II.



Las tareas que se proponen en la Fase II, tienen como objetivo profundizar en la idea de juego equitativo. Para ello se consideran situaciones en las que se trabaja con la equiprobabilidad y la variabilidad, a fin de confirmar las influencias que tienen dichas nociones en los estudiantes a la hora de abordar la idea de juego equitativo.

TAREA 7. ¿Podrías argumentar con valores numéricos, tus respuestas en la TAREA 1?
TAREA 8. María dice: "si construyo el CUBO COLORÍN COLOREADO con los colores de la FAMILIA IV o con los colores de la FAMILIA V existe un equilibrio entre ellos, así que las posibilidades de que salga una cara de color azul son las mismas". ¿Estás de acuerdo con María?
TAREA 9. Atendiendo a los términos imposible, poco posible, posible, muy posible y seguro trata, para cada uno de ellos, de construir una familia de cinco colores que sea representativa de esos términos, si al lanzar el CUBO COLORÍN COLOREADO se obtiene una cara blanca.

Tabla 6. Conjunto de tareas de la Fase III.

La Tarea 7 y la Tarea 8 tienen como objetivo ahondar en la comparación de probabilidades. Para ello, en función de los conocimientos sobre fracciones o números naturales con que cuenten los estudiantes, se contempla la posibilidad de trabajar con la relación "parte-todo", a la hora de que elaboren sus respuestas. En la Tarea 9 se propone a los estudiantes que relacionen expresiones del lenguaje coloquial con las situaciones a las que aluden, haciendo uso del "Cubo Colorín Coloreado".

Debe notarse que este trabajo tiene como fin la introducción de una propuesta de investigación, y no su implementación; aún así, este hecho no invalida que, con vistas a una futura puesta en práctica de la misma, se considere que unas tareas se presenten en formato escrito, las correspondientes a las llamadas Fase I y Fase II, a modo de cuestionario; y otras, las correspondientes a la Fase III, en formato de entrevista a fin de establecer una conexión más estrecha entre el investigador y los estudiantes. Esta distinción obedece a la instrucción de satisfacer al máximo los objetivos que la investigación persigue.

3.3. TRABAJO CON APPLETS.

Tras la implementación de la propuesta que se recoge en este trabajo, cabe la posibilidad de que se perciban determinadas deficiencias con las que los estudiantes cuentan en relación a ciertos conceptos relacionados con el azar y la probabilidad. Este hecho puede cobrar especial relevancia en la llamada Fase III, en la que se establecerá, con motivo de la entrevista, un vínculo más estrecho entre el estudiante y el investigador, permitiendo a este último profundizar en las preconcepciones y creencias de cada uno.

Una vía para subsanar dichas carencias puede encontrarse al trabajar los conceptos de azar y probabilidad con recursos tecnológicos y, en particular, haciendo uso de applets, habida cuenta de su sencillez y de las distintas capacidades que potencia, como la visualización. Si bien, es necesario que el investigador opte por seleccionar applets, cuyas posibilidades haya explorado en profundidad previamente a ser trabajados por los estudiantes. Este hecho

permitirá cerciorarse de la validez de los mismos a la hora de cubrir las necesidades con la que cuente el investigador.

Internet es la fuente de información por excelencia. La web ofrece posibilidades de diversa índole para trabajar los conceptos de azar y probabilidad en los primeros niveles. La mayoría versan sobre juegos sencillos y familiares para los estudiantes. Se han seleccionado los siguientes.

<http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/elementary/lessons/Probability.html>

En esta web se proporcionan un buen número de recursos para trabajar la idea de probabilidad. Se proponen tareas en contextos, a modo de juego. Se trata de recursos sencillos.

<http://demonstrations.wolfram.com/RockPaperScissorsWithAIPlayer/>

En esta web se propone una aplicación que permite visualizar las posibilidades de ganar al célebre juego "Piedra-Papel-Tijera". Se trata de un contexto familiar para los estudiantes.

http://nlvm.usu.edu/es/nav/topic_t_5.html

En esta web se recogen una serie de applets, organizados por niveles, destinados a tratar las nociones elementales de probabilidad y estadística. La mayoría de los contextos que se plantean versan sobre juegos. Se trata de recursos sencillos

Tabla 7. Selección de applets.

4. IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA.

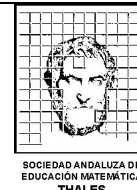
A la luz de las referencias consultadas, así como de la experiencia conseguida en la realización del trabajo, se incluyen algunas recomendaciones para la enseñanza de los conceptos básicos de azar y probabilidad.

- Trabajar situaciones que permitan estimular el pensamiento estocástico de los estudiantes, desde los primeros niveles.

Numerosos estudios apuntan a la necesidad de una alfabetización estadística de la sociedad (algunos de ellos han sido citados en este trabajo) habida cuenta de la importancia de esta disciplina para el desarrollo social. Este hecho tiene efectos en la educación y, en particular, en los niveles superiores en los que la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad gozan de una presencia significativa. Por ello es recomendable que la educación estadística comience en los estudiantes desde los primeros niveles a fin de estimular el pensamiento estocástico en ellos.

- *Introducir recursos manipulativos que permitan interactuar a los estudiantes con ellos, y por ende, con los fenómenos, situaciones o experimentos aleatorios a los que representan o modelizan.*

Son muchos los estudios (los más significativos se han aludido en este trabajo) que apuntan a las posibilidades que los recursos manipulativos ofrecen en relación al tratamiento de los conceptos de azar y probabilidad. Esto permite desarrollar habilidades (un ejemplo es la de visualización explorada por Fischbein) que contribuyen estrechan los lazos de unión que se establecen entre



los estudiantes y los contenidos probabilísticos a los que representan o modelizan.

- *El uso responsable de applets puede ser beneficioso para la enseñanza de la probabilidad, puesto que confiere a los estudiantes puntos de vista distintos a los que alcanzan con el empleo de otro tipo de recursos no tecnológicos.*

Cabe destacar que, previamente a su uso en el aula, los docentes han de estudiar, analizar y explorar las características y posibilidades que ofrece un determinado applet, con el objetivo de que puedan satisfacerse las pretensiones de enseñanza.

5. FUTURAS INVESTIGACIONES

En este punto, atendiendo a la propuesta investigadora que se recoge en este trabajo, se invita a reflexionar sobre el camino que pueden tomar las futuras aportaciones que puedan realizarse sobre ellas. Se destacan las siguientes.

- *Implementar la propuesta de trabajo que se presente en esta investigación y analizar los resultados obtenidos.*

Este hecho proporcionará información sobre los aspectos, tanto del instrumento como del planteamiento de la investigación, que pueden mejorarse a fin de conseguir resultados más ricos en implementaciones futuras.

- *Hacer uso de la metodología propuesta en esta investigación para ahondar en conceptos más complejos, como el de variable aleatoria.*

Habida cuenta de las posibilidades que puede ofrecer el instrumento sobre el que se articula esta propuesta (el Cubo Colorín Coloreado) puede resultar de interés su presencia a la hora de tratar contenidos que cuentan con una mayor complejidad conceptual, como el de variable aleatoria: resulta sencillo establecer una relación entre cada una de las familias de colores que se proponen y el número de veces que, en cada una, está presente un determinado color.

- *Crear materiales, manipulativos y/o tecnológicos, de apoyo a la enseñanza de la probabilidad, destinados a potenciar la carencias que del análisis de datos se vislumbren.*

Una vez se haya procedido a la implementación de la propuesta que se presenta en este trabajo, así como realizado el análisis de los resultados obtenidos, se pondrán de manifiesto aspectos a mejorar en la práctica docente. En este sentido, resulta interesante el diseño y la construcción de materiales destinados a facilitar la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos elementales de la probabilidad. Un primer paso es el instrumento propuesto en esta investigación.



REFERENCIAS.

BATANERO, C. (2002). *Los retos de la cultura estadística*. Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística, Buenos Aires. Conferencia inaugural.

BATANERO, C. (2013). *La comprensión de la probabilidad en los niños. ¿Qué podemos aprender de la investigación?* En J. A. Fernandes, P. F. Correia, M. H. Martinho, & F. Viseu, (Eds.) (2013). *Atas do III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*. Braga: Centro de Investigação em Educação. Universidade Do Minho.

BATANERO, C., ORTÍZ, J. J. y SERRANO, L. (2007). *Investigación en didáctica de la probabilidad*. *UNO*, 44, 7-16.

BATANERO, C. y SÁNCHEZ, E. (2013). *Azar y Probabilidad en la Escuela Primaria*. *Perspectiva escolar*, 370.

BATANERO, C. y SERRANO, L. (1995). *Aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas*. *Uno*, 15-28.

CAÑIZARES, M. J. y BATANERO, C. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la comparación de probabilidades*. *Uno*, 14, 99-114.

CAÑIZARES, M. J., BATANERO, C., SERRANO, L. y ORTÍZ, J. J. (1999). *Comprensión de la idea de juego equitativo en los niños*. *Números*. 37, 37-55.

FISCHBEIN, E. y GAZIT. (1984). *Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions?* *Educational Studies in Mathematics*, 15(1), 1-24.

GODINO, J., BATANERO, C. y CAÑIZARES, M. J. (1991). *Azar y probabilidad*. Editorial Síntesis.

GREEN, D.R. (1983). *A survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16 years*. En D.R, Grey y cols. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (v.2, pp. 766-783). Universidad de Sheffield.

MEC (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria, Autor, Madrid.

N.C.T.M. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA. <http://standards.nctm.org>.

PIAGET, J. e INHERLDER, B. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfan*. Paris: Presses Universitaires de France.

PIERCE, R. y CHICK, H. (2011). *Reacting to quantitative data: Teachers perceptions of student achievement reports*, En J. Clark, B. Kissane, J. Mousley, T. Spencer, y S. Thornton (Eds.), *Mathematics: Traditions and (new) practices*. Proceedings of the 23rd biennial conference of The Australian Association of Mathematics Teachers Inc. and the 34th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia Inc. (pp. 631-639). MERGA/AAMT, Adelaide.