SEIS CURSOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO ABN. LO QUE HEMOS APRENDIDO.

Jaime Martínez Montero. Cádiz. Inspector de Educación jubilado. E-mail: jmartinez1949@gmail.com

RESUMEN.

La puesta en marcha del método ABN ha cumplido ya seis cursos. Se ha recogido un abanico amplio de experiencias, y se ha comenzado a construir un corpus de conocimientos nuevos acerca de cómo los niños aprenden conceptos matemáticos y de qué forma se puede mejorar su enseñanza. Especialmente importantes son los aspectos referidos a la revalorización del papel del cálculo en el aprendizaje matemático, el paso de los algoritmos a heurísticos, el estudio de los descubrimientos que hacen niños y docentes, una disposición natural de los alumnos para el aprendizaje de las matemáticas, y, sobre todo, cómo, con los actuales medios, la innovación y la mejora de los aprendizajes matemáticos son posibles.

Nivel educativo: Educación Infantil. Educación Primaria.

1. INTRODUCCIÓN.

El nuevo método de cálculo echó a andar en el curso 2008-2009, en una solitaria clase de 1º del Colegio "Andalucía", de Cádiz. Seis cursos después los niños que comenzaron la aventura acaban de concluir la Educación Primaria. En esos seis años, se ha incrementado de una forma muy notable el número de centros, docentes y alumnos que trabajan la nueva metodología. Sin temor a ser exagerados, hoy podemos hablar de miles de docentes y de decenas de miles de alumnos.

En estos seis años el método ABN se ha desarrollado conforme a su diseño básico[i], pero ha evolucionado añadiendo nuevas ramas al tronco inicial, dando lugar a un árbol más frondoso. Del seguimiento minucioso de estos seis años hemos extraído muchas conclusiones, pero, sobre todo, hemos aprendido muchas cosas que estábamos lejos de sospechar cuando se realizó el diseño inicial del método o cuando este comenzó a dar sus primeros pasos. Teniendo en cuenta la limitación de espacio y la necesidad de ser sintéticos, lo que se ha aprendido se puede concretar en los aspectos que se enumeran a continuación.

2. SE HA REVALORIZADO EL VALOR DEL CÁLCULO.

Cuando comienza la aplicación del método se perseguían tan solo dos grandes objetivos: que el alumnado comprendiera el desarrollo de las operaciones básicas y que mejorara la resolución de problemas. Ya al comienzo del segundo curso comenzaron a notarse efectos que no esperábamos: el dominio del cálculo mental, la confianza que adquirían los alumnos en el mismo. El dominio venía del aumento de la comprensión y del procesamiento izquierda-derecha, y ésta permitió que lo que el alumno era capaz de hacer en un determinado dominio (los números naturales) lo trasladara a otro, como es el de los números decimales. El poder doblar y hallar mitades de números grandes les abrió la puerta del paso a los algoritmos de la multiplicación y la división con mucha antelación respecto al lugar que estos tenían asignado en el currículum. La capacidad y rapidez de los alumnos en la resolución de los cálculos que implican al menos el producto de números de una cifra por los de dos o más, permitió la creación de un algoritmo de la división basado en la estimación. La nueva destreza de la estimación permitió a su vez abordar de forma diferente la resolución de cuadrados y raíces cuadradas, porcentajes, ecuaciones. La pericia en el cálculo de estructuras aditivas favoreció la aparición de operaciones compuestas que se podían abordar de una vez y no de forma separada. Ello simplificaba el comienzo del tratamiento didáctico de la resolución de problemas de dos operaciones. El algoritmo del reparto igualatorio les permitía, desde el segundo curso, resolver problemas de más de dos operaciones y que en el cálculo tradicional se posponían hasta tres o cuatro cursos después. La concepción profunda del conocimiento de la estructura de la numeración facilitó la variante del cálculo posicional, la introducción de otros sistemas de numeración y que se abordaran con naturalidad los números enteros y las expresiones algebraicas.

El cálculo tradicional, debido a los formatos que emplea y a las limitaciones intrínsecas que arrastran estos últimos debido a su diseño, impide que los alumnos alcancen un desarrollo de modelos formales matemáticos que son muy enriquecedores del desarrollo intelectual y que están a la base de la competencia matemática. Se infravalora una herramienta cuando lo que se puede hacer con ella es muy limitado. Con el nuevo método, por el contrario, se accede a una muy poderosa que permite un nivel mucho más elevado de formación matemática en el alumno. Ahora sí que se puede decir del cálculo algo que señalaba Freudenthal para la matemática en general. Parafraseándolo, con algo de osadía, diría: "Pero no preguntéis jamás cuánto cálculo puede aprender un niño. Preguntad más bien cuánto cálculo, en la educación, puede contribuir a la dignidad humana del niño"[ii]

3. LAS OPERACIONES BÁSICAS SE HAN CONVERTIDO EN HEURÍSTICOS.

En un artículo[iii] que en buena medida sirvió de inspiración para el diseño del nuevo método se mostraba cómo la evolución de las operaciones elementales podría llegar a convertirlas en un semialgoritmo o en un heurístico. Algo de esto ha ocurrido con los algoritmos ABN y los formatos en que se plasman. El hecho de que sean abiertos ya crean grandes posibilidades a la creación y al descubrimiento. Pero además de ello, las conexiones que se establecen entre sus distintos elementos una vez concluida la resolución del mismo suponen un ejercicio de comprensión e investigación que, sencillamente, el formato de las operaciones tradicionales impide realizar. Pongamos un ejemplo respecto a una división, como la que ejemplificamos aquí para dar mayor concreción a las preguntas. A partir de la misma se puede preguntar (y el alumno o alumna responder) lo que sigue (entre paréntesis aparecen las respuestas):

		: 32
15.169	**12.800**	**400**
2369	**2240**	**70**
129	**128**	**4**
1		**474**

¿Cuál sería el resultado si el dividendo fuera 2369? ¿Y si fuera 129? (74; 4).
Cuando aún no se han repartido 129, ¿cuántas se le han dado a cada uno? (470)
¿Cuántas necesitamos para dar a cada uno 404? ¿Y 74? ¿Y 470? (12.928; 2368; 15.040)
¿Cuántas podemos repartir a cada uno si tenemos 15.040? ¿Y si fueran 12.928? (470; 404)
¿Cómo tendría que ser el dividendo para que no hubiera resto? (15.168)
Si el dividendo fuera 15.175, ¿cuál sería el resto? ¿Y si el dividendo fuera 15.180? (7; 12)
¿Cuál sería el dividendo para que el resto fuera 0 y el cociente 475? (15.200)
¿Cuántas nos faltan si queremos que el resultado sea 476 y no hubiera resto? (31)
Etc.

4. SE PUEDEN PONER EN CUESTIÓN, Y ROMPER, LAS TRADICIONES Y RUTINAS QUE HAN PESADO COMO LOSAS EN EL DESARROLLO DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS.

Buena parte de las descalificaciones e incluso acusaciones de fraude (pese a que siempre hemos identificado a los niños, al colegio y a la docente) que se han hecho respecto de los testimonios que ofrecíamos sobre los logros de los niños se han apoyado en que muchos de ellos se producían en edades y cursos muy anteriores al fijado por el currículo oficial o al establecido por la práctica tradicional. Una cuestión que resultó muy controvertida fue la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita en 3º de Primaria, de una complejidad similar a las que se resuelven en 2º de ESO. También hubo una cierta polémica y puesta en duda de habilidades y logros del alumnado de Infantil cuando abordaban, aunque fuese de manera informal, aspectos matemáticos que se estudiaban uno o dos cursos más tarde. Nuestra apuesta en Educación Infantil fue fuerte. Los niños de tres años ya superan el listón que la metodología tradicional fijaba para los alumnos de cinco años. Y en cuatro años los niños ya abordan cuestiones de 1º de Primaria. No es infrecuente que al finalizar el segundo trimestre de 1º de Primaria los niños hayan alcanzado el nivel requerido en 2º. En lo que se refiere al cálculo, al finalizar

4º el alumnado puede alcanzar los niveles marcados para toda la etapa. Y cuando acaban la etapa pueden manejarse con soltura con conceptos propios de hasta Segundo y Tercer Cursos de la ESO.

En ningún caso se ha tratado de adoptar posturas rompedoras o desafiantes, sino de algo muy importante: los niveles que actualmente se juzgan idóneos para ser alcanzados por los niños en cada uno de los cursos o de sus edades no están justificados ni por una metodología adecuada ni por ninguna investigación seria. Se trata, más bien, de estándares fijados por la tradición y, en su mayor parte por las rutinas y por los libros de texto. ¿De dónde se saca que un alumno de 3 años no es capaz de contar más allá del tres, y una alumna de cuatro más allá del seis, cuando se ha comprobado que los cuervos son capaces de contar hasta el siete? Y así sucesivamente.

Lo que hemos aprendido es que en ninguna parte está escrito hasta dónde pueden llegar los niños o cuáles son los conceptos o conocimientos que se han identificado como los propios de una determinada edad. Nosotros mismos tampoco lo sabemos. Tenemos alguna experiencia sobre hasta dónde llegan los alumnos ABN *que han empezado a trabajar el método desde 1º*. Pero no sabemos a dónde pueden llegar los alumnos que han comenzado con el método desde el Infantil de tres años. Sabemos, sin embargo, que a dónde puedan llegar más depende de cómo hayan trabajado los conceptos anteriores que el número de vueltas (o fracciones de la misma) que ha dado la Tierra alrededor del Sol desde la fecha del nacimiento de los niños.

5. LA FUENTE MÁS CERTERA DE CONOCIMIENTO DE CÓMO APRENDEN LOS NIÑOS ESTÁ EN LOS PROPIOS NIÑOS, Y DE CÓMO SE ENSEÑA MEJOR ESTÁ EN LOS PROPIOS DOCENTES.

No se trata de una afirmación demagógica destinada a agradar o a buscar el aplauso fácil. Se trata de algo perfectamente documentado. Que comenzáramos a utilizar la resta con dos sustraendos se le ocurrió a un niño que comunicó su ocurrencia a la maestra a la vuelta de las vacaciones de 1º de Primaria. Le enseñó una operación en la que había dos sustraendos, "*de la misma manera* –vino a decir- *que hay sumas con más de dos términos, también puede haber restas con más de dos términos*". Más tarde, fue otra alumna de 2º la que resolvió una multirresta en la que la suma de los dos sustraendos era mayor que el minuendo. Lo explicó así: La señora no llevaba bastante dinero y lo dejó a deber. Ella misma decía que para distinguir cuándo se debe de cuándo se tiene basta con poner delante el signo menos (¿Quiere esto decir que a partir de 2º se podrían trabajar los números enteros?). Inmediatamente adoptamos la idea y de ahí nació también la sumirresta (o restisuma, como le llaman en otros colegios).

El diseño de la operación de multiplicar por dos cifras era muy engorroso. Véase el caso de 2568 x 53:

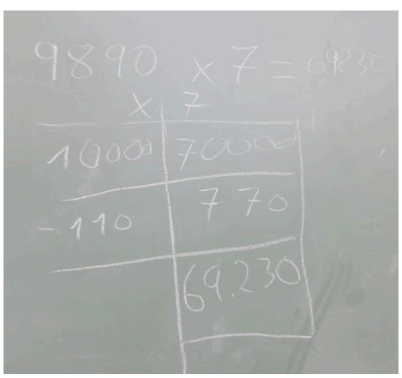
MULTIPLICANDO.	MULTIPLICADOR DECENAS	MULTIPLICADOR UNIDADES	PRODUCTO PARCIAL	PRODUCTO ACUMULADO
	50	**3**		
2000	100000	6000	106000	
500	25000	1500	26500	132500
60	3000	180	3180	133680
8	400	24	424	**134104**

De hecho, hay muestras de nuestra prehistoria en este aspecto. (http://algoritmosabn.blogspot.com.es/search/label/Producto.%205%C2%BA%20de%20Primaria.)

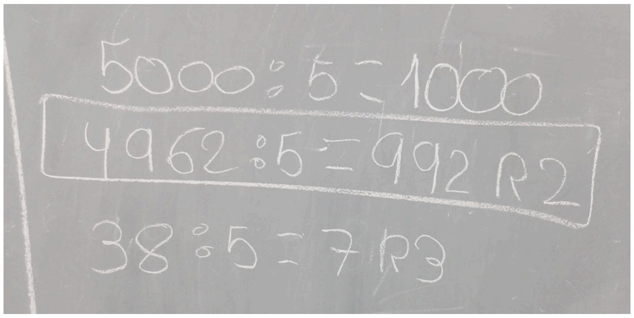
Pues bien, fue una niña cuando a comienzo de 3º nos dio la pista de la simplificación en dos columnas y de la adopción del formato actual. ¿Qué hizo? La siguiente multiplicación:

	x 5	
4200	30 000	
30	150	6150
8	40	6190

Enseguida caímos. Si se era capaz de multiplicar un número de dos cifras por otro de una, también era capaz de hacerlo a la inversa. Es decir, que haya una cifra u orden de unidades en el multiplicando y dos en el multiplicador. Esto no sólo nos facilitó la simplificación del formato eliminando dos columnas y dejándolo con la misma estructura que el correspondiente al producto por una cifra, sino que pudimos llevar la idea al formato de la división por dos cifras, simplificándola de la misma manera.



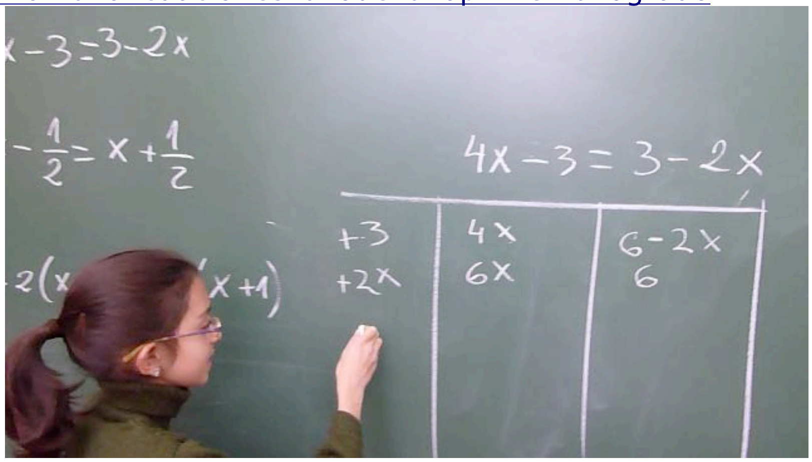
Finalmente, otro niño nos mostró la aplicación práctica de la aplicación de la propiedad distributiva del producto respecto a la suma, que todos habíamos enseñado pero que nunca se había puesto en práctica, salvo para la realización de ejercicios teóricos. Hizo lo siguiente, como se muestra en la fotografía: en lugar de multiplicar 9890 por 7, multiplicó 10.000, y al resultado obtenido le restó lo que había multiplicado de más. No sólo adoptamos corriendo tal alternativa, sino que la llevamos a la división y se aumentaron enormemente la simplificación conceptual de los cálculos. La fotografía siguiente es más explícita que todas las explicaciones que podamos dar.



Tenemos muchos más casos, que la falta de espacio no nos permite exponer.

Muchos de los ejercicios y variantes que han enriquecido el acervo del método provienen de los maestros y maestras. Sobre todo en Educación Infantil. Pero quiero reseñar una innovación de una maestra, que es aparentemente sencilla pero que puede simplificar mucho el proceso de aprendizaje de las ecuaciones de primer grado. El proceso fue el siguiente:

En un curso de expertos explicaba los dos métodos por los que se podían trabajar las ecuaciones de primer grado en 3º o, preferiblemente, en 4º de Primaria. Uno era el convencional, aunque explicando el proceso de transposición, y el otro era el de aproximación y estimación. Entonces, la maestra en cuestión, me hizo ver que si en el primer método utilizábamos el formato de rejilla de los algoritmos ABN, se facilitaba mucho la comprensión, sobre todo para los alumnos menos aventajados. Nos sonó bien, pero lo cierto es que no se prestó mayor atención. Hasta que llegaron los primeros vídeos con el trabajo de los niños. Era evidente que se facilitaba la comprensión y el sentido del proceso, y la introducción de algo tan sencillo puede suponer una elevada mejora en los resultados que se obtienen en este apartado del álgebra. Los vínculos que siguen muestran con hechos lo que hemos descrito, y la fotografía también ayuda a lo mismo.
http://algoritmosabn.blogspot.com.es/search/label/Experimentos.%204%C2%BA%20de%20Primaria.%20Ecuaciones%20de%20primer%20grado.



6. NO SABEMOS LO QUE LOS NIÑOS SON CAPACES DE HACER HASTA QUE NO INTENTAN HACERLO.

Los niños y niñas son una fuente de sorpresas. Cuando son puestos ante la tarea, surgen formas de realizarla que ni siquiera sospechábamos. Hemos aprendido que nada se puede dar por imposible cuando se trata de aprendizajes matemáticos a realizar por los niños. Hemos comprobado dos cuestiones. Una, que si a los niños se les trabajan los conceptos de forma adecuada, son capaces de aprenderlos aunque se crea que están muy lejos de ellos. La otra, que hay un conjunto de conceptos y saberes que los niños aprenden sin ningún tipo de esfuerzo, y que son como si los tuvieran dentro y no necesitaran de tratamiento didáctico especial.

En el primer caso, hemos visto que los niños en Primero pueden escribir los números en código binario a partir de pequeños ejercicios de introducción. En 2º ya lo pueden hacer sin referencias externas. En 3º pueden escribir cualquier número en cualquier base de numeración, y operar con las bases más bajas. En 4º y 5º pueden sumar y restar en cualquier base, y los más aventajados multiplicar y dividir. Los alumnos más aventajados de 4º pueden resolver raíces cuadradas mentalmente, y tal aprendizaje lo consigue el ochenta por ciento de los alumnos de 5º. Buena parte de los alumnos de 6º pueden trabajar radicales que no aparecen hasta 2º o 3º de ESO.

En el segundo caso, hemos comprobado que no hace falta enseñar (o casi) lo que sigue, porque inmediatamente los alumnos se comportan como si ya lo supieran:

-Suma y resta con decimales en cualquiera de los casos en que se puedan presentar (y desde 2º de Primaria).

-Equivalencias, composiciones y descomposiciones muy complejas con los órdenes de magnitud y con las unidades, múltiplos y submúltiplos de las diferentes magnitudes.

-Los números enteros y las operaciones con los mismos. El aprendizaje de la regla de los signos lo realizan en minutos, y comprendiendo el por qué.

-A las potencias apenas hay que dedicarles tiempo. El producto y la división de potencias de la misma base lo aprenden (y lo comprenden) de inmediato. La potencia de una potencia y la raíz de una potencia tan solo lo hemos trabajado con el grupo experimental de niños, y han llegado a extraer potencias de raíces de raíces, y a introducirlas en las mismas.

-Derivado de lo anterior, las descomposiciones factoriales las realizan con gran velocidad. Como son capaces de hallar la fracción equivalente común a otras dadas, se utiliza esa base experiencial para que alcancen el sentido y utilicen el m.c.m. y el m.c.d. en números que a los que ellos no pueden alcanzar con su sistema de cálculo.

-Convierten cualquier número en un polinomio ordenado de una indeterminada. A partir de ahí, suman y restan prácticamente todos los alumnos, multiplican más de la mitad y divide la cuarta parte superior (si se tuviera más tiempo se extendería lo suficiente este dominio).

-Los alumnos más aventajados entienden de forma casi instantánea el proceso de solución de los sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

7. PERO LO MÁS IMPORTANTE DE TODO LO QUE HEMOS APRENDIDO ES que se puede cambiar, se puede hacer de verdad, y no con meras palabras, que podemos hacerlo con nuestros maestros y maestras, con los niños y niñas, y que lo pueden hacer con apenas materiales y con independencia de la extracción social de los mismos. ¿Hay acaso mejor muestra del poder transformador de la educación?

REFERENCIAS.

BRACHO, R. (2013). MENOS REGLAS Y MÁS SENTIDO: ALTERNATIVAS METODOLÓGICAS A LOS ALGORITMOS DE CÁLCULO TRADICIONALES PARA EL DESARROLLO EL SENTIDO NUMÉRICO EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA. PAPER PRESENTED AT THE VII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACION MATEMATICA, MONTEVIDEO (URUGUAY).

MARTÍNEZ MONTERO, J. (2000). UNA NUEVA DIDÁCTICA DEL CÁLCULO PARA EL SIGLO XXI. BARCELONA: CISSPRAXIS.

MARTÍNEZ MONTERO, J. (2001). LOS EFECTOS NO DESEADOS (Y DEVASTADORES) DE LOS MÉTODOS TRADICIONALES DE APRENDIZAJE DE LA NUMERACION Y DE LOS ALGORITMOS DE LAS CUATRO OPERACIONES BASICAS. EPSILÓN, 49, 13-26.

MARTÍNEZ MONTERO, J. (2010A). ENSEÑAR MATEMÁTICAS A ALUMNOS CON NECESIDADES EDUCATIVAS ESPECIALES. MADRID: WOLTERS KLUWER.

MARTÍNEZ MONTERO, J. (13 DE ABRIL DE 2010B) BLOG ABN. POR UNAS MATEMATICAS SENCILLAS, NATURALES Y DIVERTIDAS. HTTP://ALGORITMOSABN.BLOGSPOT.COM.ES/2010/2004/QUE-ES-ESO-DE-ABN.HTML.

MARTÍNEZ MONTERO, J. (2011). EL METODO DE CÁLCULO ABIERTO BASADO EN NUMEROS (ABN) COMO ALTERNATIVA DE FUTURO RESPECTO A LOS METODOS TRADICIONALES CERRADOS BASADOS EN CIFRAS (CBC). BORDÓN. REVISTA DE PEDAGOGÍA, 63(4), 95-110.

MARTÍNEZ MONTERO, J. (2013A). LA ATENCION A LA DIVERSIDAD EN EL ÁREA DE MATEMATICAS. UN ENFOQUE METODOLOGICO Y CURRICULAR. VALLADOLID: LA CALESA.

MARTÍNEZ MONTERO, J. (2013B). OPERACIONES O "CUENTAS". UNA PRÁCTICA OBSOLETA. VALLADOLID: LA CALESA.

MARTÍNEZ MONTERO, J. (2013C). ALGORITMOS ABN VS MÉTODOS TRADICIONALES DE CÁLCULO EN NIÑOS Y NIÑAS DE PRIMER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA. VALLADOLID: LA CALESA.

MARTÍNEZ MONTERO, J., Y SÁNCHEZ CORTÉS, C. (2011). DESARROLLO Y MEJORA DE LA INTELIGENCIA MATEMÁTICA EN EDUCACIÓN INFANTIL. MADRID: WOLTERS KLUWER.

MARTÍNEZ MONTERO, J., Y SÁNCHEZ CORTÉS, C. (2013). RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y MÉTODO ABN. MADRID: WOLTERS KLUWER.

RAMÍREZ MARTÍNEZ , A., Y USÓN VILLALBA, C. (1996). …POR LOS TRILLADOS CAMINOS DE LA ARITMÉTICA ESCOLAR DE LAS CUATRO OPERACIONES. SUMA, 21, 63-71.

---

[i] Martínez Montero, J. (2000). Una nueva didáctica del cálculo para el siglo XXI. Madrid. CISS-Praxis, y Martínez Montero, J. (2002). Enseñar matemáticas a alumnos con NEEE. Madrid. CISS-Praxis.

[ii] La cita original es “Pero no preguntéis jamás cuánta matemática puede aprender un niño. Preguntad más bien cuánta matemática, en la educación, puede contribuir a la dignidad humana del niño”. Freudenthal, H. (1976). Palabras pronunciadas con motivo de su marcha del IOWO. Utrecht.

[iii] Ramírez Martínez , A., y Usón Villalba, C. (1996). *…Por los trillados caminos de la aritmética escolar de las cuatro operaciones.* Suma, *21, 63-71.*