EN GEOMETRÍA, HABLEMOS DE-ESPACIO

Rafael Ramírez Uclés, *Universidad de Granada, rramirez@ugr.es*

RESUMEN.

La enseñanza de la geometría desde un punto de vista funcional viene reflejada tanto en los documentos curriculares como en las propuestas de investigadores en didáctica de la matemática. El concepto de sentido espacial relaciona estrechamente el manejo de conceptos, elementos geométricos y movimientos que permiten ubicarse en el espacio. La visualización conecta estas componentes y favorece un mayor desarrollo del sentido espacial. El análisis de estas componentes permite diseñar tareas en las que los alumnos pongan en juego su competencia matemática. Como caso particular, presentamos un esquema de diseño de sesiones de enriquecimiento ("reposo curricular") para alumnos con talento matemático.

Nivel educativo: Primaria y Secundaria

1. INTRODUCCIÓN.

Este documento no pretende ser una transcripción de la comunicación oral, pero sí quiere reflejar la esencia de la misma, destacando el discurso visual y no incidiendo en los aspectos formales de redacción. Comenzamos.

Lo primero es dar las gracias. Porque lo mejor de una conferencia son las ideas. Y las ideas de ésta, se las debemos a Pablo Flores y su cuidado e ilusionante trabajo para organizar los elementos que componen el sentido espacial. Como dicen los escritores científicos, según Flores (aquí vienen muchas interesantes conversaciones) hemos aprendido a entender la enseñanza de la geometría desde la perspectiva de desarrollar el sentido espacial. En la primera parte de esta conversación espero trasmitiros qué significa esto: *En geometría, hablemos de espacio*.

Como en los chistes, que tanto le gustan a Pablo, no hay nada peor que tener que explicarlos. Pero esto de utilizar un título dinámico para una conferencia que luego hay que escribir en papel, tiene estas cosas (en el power-point se queda más bonito). En la segunda parte, os propondremos una idea para el enriquecimiento curricular, "el reposo curricular". Es decir: *En geometría, hablemos despacio*.

2. HABLEMOS DE ESPACIO.

Dicen que Platón, en la entrada de la Academia, recibía a los visitantes con una frase que venía a decir algo así: "Que nadie que no sepa geometría, entre en mi casa". En griego, la culpa de esta falta a la atención a la diversidad la tiene una letra alpha, que niega la palabra geométrica a la que precede. Pues de estas dos cosas queremos hablar, de geometría y atención a la diversidad.

Para empezar, vamos a analizar, de un modo muy superficial, casi simplemente echándole un vistazo, diferentes tipos de problemas de geometría a los que se vienen enfrentando nuestros alumnos: Problemas de Olimpiadas de Bachillerato, Problema 4 de Selectividad, Problemas de Olimpiadas Thales de 2º de ESO y problemas de Olimpiadas Thales de 6º de Primaria.

Primera reflexión: ¿Qué elementos tienen en común? ¿Es algún problema más de geometría que otro? ¿Qué nivel pediría Platón para atendernos en sus clases?

2.1. IDEA INTUITIVA.

Antes de comenzar a presentar las componentes del sentido espacial, os proponemos una tarea. Esto también se pierde en el papel, porque en el discurso oral es más interactivo. Incluso se presentan diapositivas en blanco para que las rellene el público. Aquí las puede imaginar y rellenar el lector.

Imagina que estás enamorado y en una acto de exaltación decides escribir TE QUIERO en un puente (por supuesto con permiso del ayuntamiento) por el que pasará mañana tu amor cuando se marche de tu lado. Tienes que asomarte a la baranda y escribir en la pared para que lo lea de frente. ¿Te orientas? ¿Qué criterios utilizas para hacerlo? Estás tan contento, que quieres ir más allá. ¿Y si le escribes en la otra cara del puente para que también lea tu mensaje por el espejo retrovisor? Imagina el experimento. Hay una interesante relación de simetrías entre las dos oraciones. ¿Crees que has puesto en juego tu sentido espacial? ¿Tiene sentido espacial el autor de esta pintada?

Figura 1. Por no tener sentido espacial.

Según el NCTM, en su Estándar número 7, Geometría y sentido espacial, éste es un sentido intuitivo para la forma y el espacio (NCTM, 2000). Implica los conceptos de geometría tradicional, incluyendo una habilidad para reconocer, visualizar, representar y transformar formas geométricas.

Vamos a utilizar el siguiente ejemplo para explicar las componentes de este sentido espacial. Imagina que quieres situar una lámpara en el centro del techo de una habitación. En un rectángulo se presentan dos alternativas que llevan a la misma solución. Cruce de diagonales o intersección de los segmentos que unen los puntos medios de lados opuestos. Pero, ¿qué ocurre si la habitación es un cuadrilátero cualquiera? ¿Y si es un pentágono? ¿Qué es el centro de un polígono? ¿Qué propiedad tiene que me sirva para colocar lámparas?

2.2. COMPONENTES DEL SENTIDO ESPACIAL.

En el sentido espacial destacamos tres componentes (Flores, Ramírez, Del Río, en prensa): a) propiedades de formas y figuras, b) relaciones geométricas y c) ubicación y movimientos.

a) **Conocer las propiedades de formas y figuras** es algo bastante clásico en la enseñanza de la geometría. En esta componente se identifican las figuras por sus nombres, se trabaja la definición, la construcción, la representación, caracterización, etc. Por ejemplo, ¿nuestros alumnos saben definir lo que es un triángulo o lo que es una mediana?
b) Para **reconocer y establecer relaciones geométricas** es necesario saber apreciar las cualidades en las formas y cuerpos geométricos. También está estandarizado hablar de longitud, semejanza, perpendicularidad, paralelismo, etc. Por ejemplo, ¿nuestros alumnos saben que en un triángulo la longitud de un lado siempre es menor que la suma de los otros dos? ¿O por qué una mediana divide a un triángulo en dos partes de igual área?
c) La **ubicación y los movimientos** convierten la geometría en algo dinámico. Los alumnos deben buscar referentes para situarse en el plano y en el espacio, manejar las coordenadas y saber aplicar movimientos y detectar regularidades en las figuras. Por ejemplo, ¿sabemos calcular las coordenadas del baricentro de un triángulo? ¿Cuándo una mediana se convierte en un eje de simetría?

Estas tres componentes de un modo aislado nos darían un "débil" sentido espacial. La principal idea que os queremos transmitir es que la visualización permite establecer conexiones y "dar fuerza" a estas componentes.

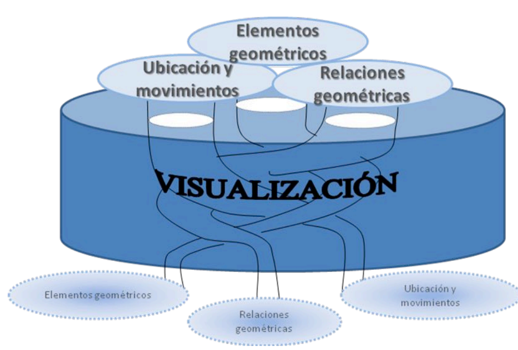

Figura 2. Visualización: conexión y fortaleza de las componentes.

Puesto que la visualización adquiere un papel relevante en el sentido espacial, vamos a describir los elementos que la componen

2.3.VISUALIZACIÓN.

Utilicemos una definición contextualizada en el ámbito de la educación matemática. Según Gutiérrez (2006) la visualización es el conjunto de imágenes, representaciones, procesos y habilidades para producir, analizar, transformar, y/o comunicar información visual sobre objetos reales, modelos y conceptos geométricos.

Sin entrar en detalle, vamos a familiarizarnos con estos elementos. La mejor forma es utilizar diapositivas en blanco, esto es, que esta parte de la presentación la pone el público. Imaginación.

<u>Imágenes y representaciones</u>. Imaginemos un cubo. Un poquito más grande. ¿Alguien puede justificar que el suyo es el mayor? ¿Alguna imagen similar a las que han pensado los compañeros? Buscamos la riqueza de imágenes y representaciones.

<u>Procesos</u>. Bishop (1980) distinguía VP e IFI. Es decir, comprender la información visual o convertir en visual información que aparentemente no lo es. ¿Alguna vez os habéis peleado montando un mueble?

<u>Habilidades</u>. Aquí nos vamos a detener un poco más. Seleccionamos las siete que Del Grande (1990) recogió de otros autores: Coordinación ojo-motor, Percepción de la figura-Contexto, Conservación de la percepción, Percepción de la posición en el espacio, Percepción de las relaciones espaciales, Discriminación Visual y Memoria Visual.

Para explicar cada una de ellas, vamos a ponerlas en práctica en la actividad propuesta de las lámparas y en algunas otras un poco más complejas.

Coordinación ojo-motor. Empecemos dibujando este plano "con la otra mano".

Figura 3. Plano para situar las lámparas

O seguimos practicando con la mano habitual:

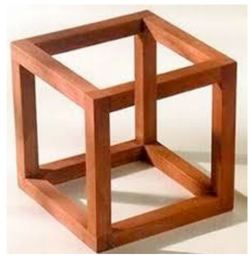

Figura 4. Para practicar la coordinación ojo-mano.

Percepción de la figura contexto. Identifiquemos qué tipo de cuadrilátero es la habitación.

Figura 5. Reconocer una figura en un contexto.

La magia de la siguiente imagen (si subes una escalera no deberías llegar al inicio) se esconde en identificar el "truco" del cubo de la figura 4.

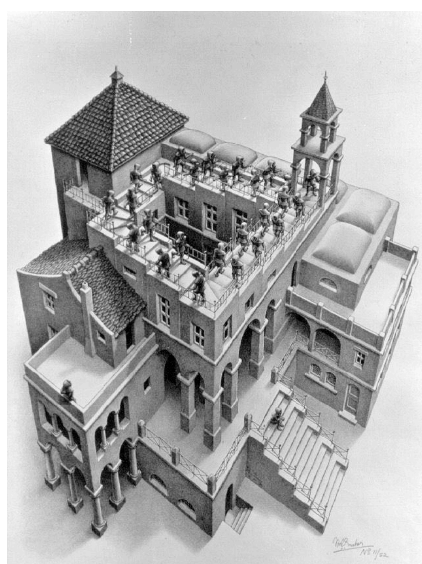

Figura 6. Escalera infinita de Escher.

Conservación de la percepción. Sabemos que hay propiedades que se conservan aunque cambiemos la posición. La forma en la que observemos el plano no debería afectar para colocar las lámparas.

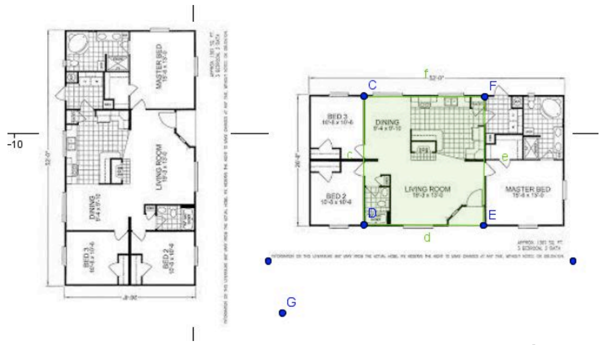

Figura 7. Hay propiedades invariantes por giros, simetrías y traslaciones.

Aunque a veces, no parece tan evidente que las cosas sean iguales "se miren por donde se miren"

Figura 8. Giros de 180 grados en las historias de Verbeek.

Percepción de la posición en el espacio. Podemos distinguir figuras congruentes y relacionar los objetos desde el punto de vista que estemos utilizando. Por ejemplo, distinguir triángulos semejantes para distribuir las lámparas.

Figura 9. La zona iluminada en la derecha es semejante a la izquierda.

Aunque tampoco es fácil relacionar siempre un objeto respecto a nuestra posición.

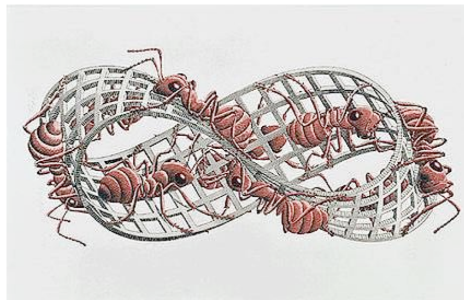

Figura 10. En esta cinta de Escher hay que saber seguir el camino.

Percepción de las relaciones geométricas. Si la habitación es rectangular, el centro se puede obtener trazando las diagonales o como intersección de los segmentos que unen puntos medios opuestos. ¿En todas las habitaciones ocurre esto?

Figura 11. Una forma habitual para hallar el centro de una habitación.

Esta habilidad nos permitiría hallar relaciones de paralelismo, perpendicularidad, relaciones de longitud, etc. Probemos en un omnipoliedro:

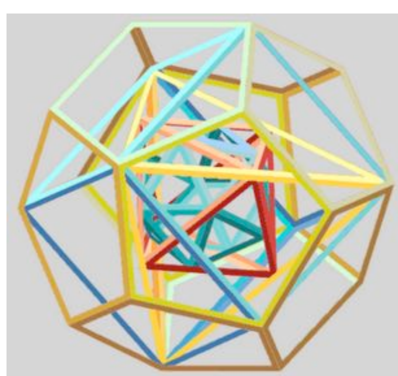

Figura 12. Aquí están todos los poliedros regulares.

Discriminación visual: Parece un juego identificar semejanzas y diferencias entre objetos. Si dos habitaciones son iguales, podemos aprovechar el trabajo hecho.

Figura 13. ¿Hay dos habitaciones iguales?

Aunque a simple vista, estas dos figuras se obtienen con todas las piezas del tangram.

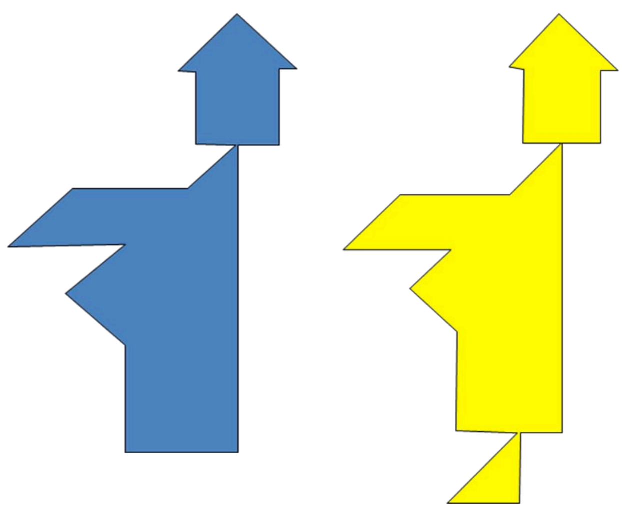
Figura 14. ¿Dónde está el truco?

Memoria visual. Simplemente tenemos que recordar. ¿Dónde estaba el baño en el plano? Como siempre, ¿al fondo a la derecha?

2.4. CONEXIÓN DE LAS COMPONENTES.

Vamos a proponer tres ejemplos en los que se ponen de manifiesto que las habilidades de visualización dan fuerza a cada una de las componentes. Hagamos el ejercicio de analizar las habilidades en estas tareas:

Relaciones geométricas: ¿Es posible construir un cuadrado en un geoplano de trama isométrica?

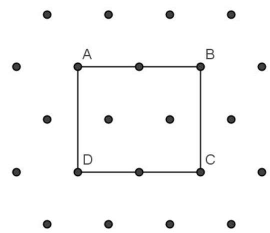

Figura 15. ¿Es un cuadrado?

Elementos geométricos:¿Un rombo o un cuadrado?

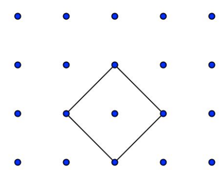

Figura 16. Geoplano de trama cuadrada.

Ubicación y movimientos: ¿Es posible obtener una figura mediante un giro de la otra?

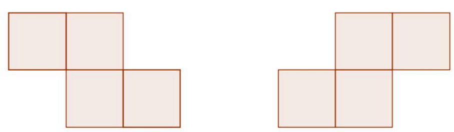

Figura 17. ¿Tetris o tetraminós?

Aunque en las anteriores hemos resaltado una de las componentes, está claro que intervienen todas ellas en la mayoría de tareas que requieren visualización. Por ejemplo, en la localización en el desarrollo plano del camino marcado en el cubo, es necesario poner en juego la conexión de las tres componentes y casi todas las habilidades de visualización. Hagamos la prueba.

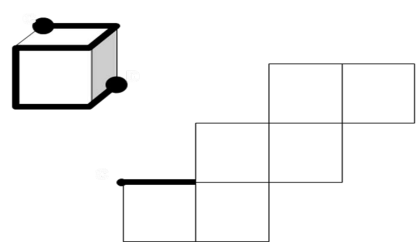

Figura 18. El camino en el desarrollo plano.

3. HABLEMOS DESPACIO.

Llegados a esta parte, vamos a proponer un esquema para diseñar sesiones en las que "desarrollemos" el sentido espacial. Las hemos contextualizado en sesiones de enriquecimiento para alumnos de alta capacidad matemática, pero, con ligeras modificaciones, podemos llevarlas a cabo en cualquiera de nuestras aulas.

La esencia para el diseño de la sesión es el enriquecimiento curricular, pero entendido de un modo muy especial. No consiste en adelantar contenidos ni proponer tareas excesivamente complejas. Nuestra propuesta es la de "reposo curricular". Consiste en dar un paso atrás para coger carrerilla (como en las mejores carreras de velocidad). Mejor que definirlo, veamos un ejemplo.

Elijamos un contenido que queramos enriquecer. Por ejemplo, el concepto de mediana. El reposo curricular consiste en profundizar sobre la esencia de este contenido. Paso a paso. Fortaleciendo las componentes del sentido espacial con riqueza de imágenes y representaciones y con las correspondientes habilidades (en caso de no ser conceptos geométricos, se procede de modo análogo con el sentido correspondiente, como puede ser el numérico en el caso de las fracciones).

Por ejemplo. Ya está definida la mediana: segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto. Pero ¿por qué aparece una palabra que hemos estudiado en estadística? ¿Qué propiedad tiene la mediana que tenga que ver con el 50 %? Vale, divide al triángulo en dos partes de igual área.

Si tuviésemos que definir la mediana en un cuadrilátero, utilizamos la definición o la propiedad anterior. ¿Cómo definirías la mediana de un polígono? ¿Serviría para algo?.... Y así, pregunta tras respuesta (mejor que respuesta tras pregunta), llegar a ver qué tiene que ver todo esto con el centro geográfico de una región, la localización de infraestructuras entre ciudades, etc.

También a modo de ejemplo, mostramos el esquema para montar una sesión de reposo curricular.

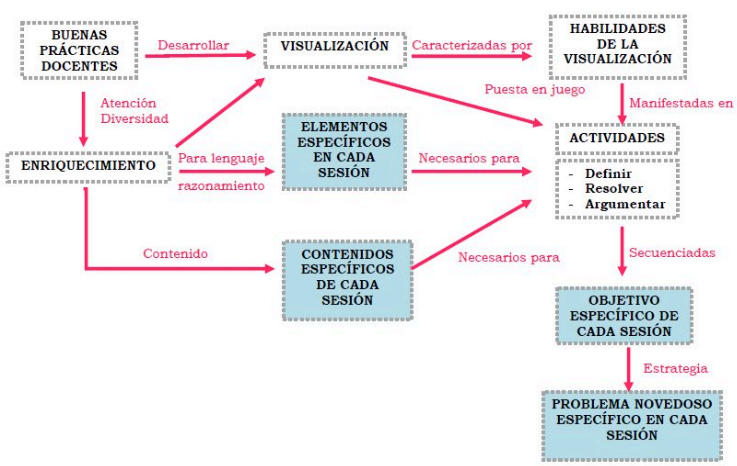

Figura 19. Esquema de diseño de sesiones de enriquecimiento curricular.

Empezando por el final, os explicamos lo de los "problemas novedosos". Es cuestión de mostrar la funcionalidad y plantear retos a nuestros estudiantes. Para enriquecer los puntos notables de un triángulo, podemos preguntarnos dónde es justo colocar un hospital, una cárcel, un colegio o un parque de bomberos entre tres localidades. O localizar el centro geográfico de Andalucía por nuestra cuenta (con un poquito de Geogebra).

Previamente hay que localizar los elementos específicos de la sesión que serán las correspondientes componentes del sentido espacial. Y las habilidades de visualización que queremos que manifiesten los alumnos. Siempre acompañados de elementos de razonamiento matemático, como la utilización de contraejemplos, lenguaje matemático, condiciones necesarias y suficientes, etc.

Os ilustramos otros ejemplos de sesiones para que nos familiaricemos con el esquema: Si queremos reposar curricularmente el concepto de volumen, podemos diseñar una sesión sobre la relación entre el volumen de un tetraedro regular y una pirámide sin utilizar fórmulas y manipulando puzzles. Para reposar el concepto de diámetro, podemos preguntarnos por qué las tapas de las alcantarillas son redondas y llegar hasta la anchura constante viendo qué polígonos regulares se cuelan en su propio interior. ¿Qué es el diámetro de un polígono?

Visto que ya somos expertos, os proponemos el diseño de vuestras propias sesiones de "reposo curricular". Os damos una pista sobre el final del esquema, el problema novedoso, y el resto es cosa vuestra. Lo de elegir 10 es en homenaje a Hilbert, porque en ellos hay problemas que merecen ser premiados (algunos son interesantes problemas aún por descubrir)

3.1.DIEZ SESIONES DE REPOSO CURRICULAR.

1.- REPARTO DE TARTAS: Cortar un polígono en dos partes de igual área con una recta.

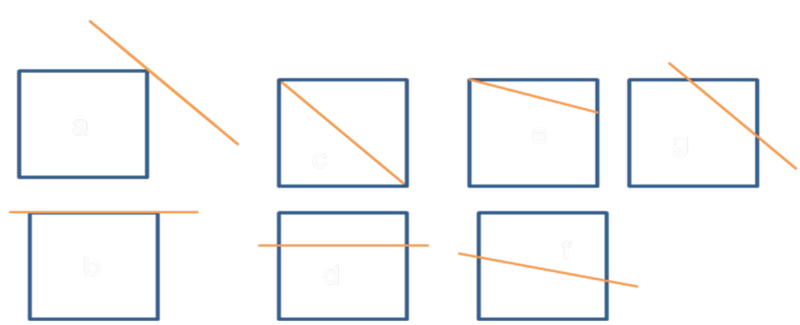

Figura 20. Cortes de un cuadrado con una recta.

2.- PUNTOS INSUFICIENTES DE UN TRIÁNGULO: Recta que divide un triángulo en dos partes de igual perímetro.

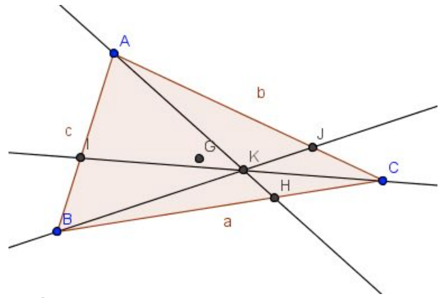

Figura 21. ¿Por qué no se estudia el punto de corte de estas rectas?

3.- CENTROS EN EL ESPACIO. ¿Qué es la mediana de un poliedro?

4.- EQUIDAD: ¿Dónde colocar una instalación entre n puntos del plano? ¿Cómo optimizar un recurso?

5.- TRANSPORTE Y ALMACENAJE: ¿Rellenan los tetraedros el espacio?

6.- VISIÓN 4D. ¿Podemos ver las constelaciones en cuatro dimensiones? En tres dimensiones y viajando en el tiempo.

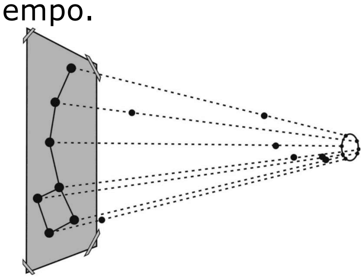

Figura 22. En el espacio tridimensional no parece un carro ni una cuchara.

7.- BRICOLAJE: Colocar n lámparas en una habitación

8.- BILLAR: Carambolas a n bandas en un billar (cuestión de espejos)

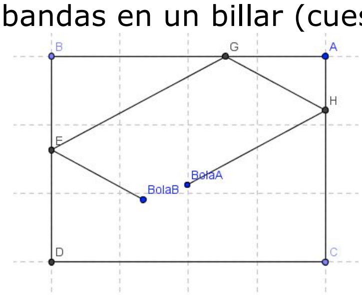

Figura 23. Simulación con Geogebra de un billar rodeado de espejos.

9.- VOLUMEN: Sin fórmulas, ¿qué relación existe entre el volumen de un tetraedro y la pirámide de base cuadrangular?

10.- VECINOS: Colocar n puntos en una región separados lo más posible.

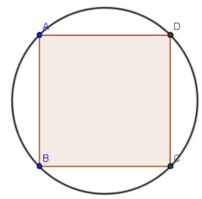

Figura 24.Conjetura de cuatro puntos en una circunferencia.

REFERENCIAS.

BISHOP, A.J. (1980). Spatial Abilities and Mathematics Education: A Review. *Educational Studies in Mathematics, 11* (3), 257–269.

DEL GRANDE, J. J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic teacher*, 37 (6), 14-20.

FLORES, P., RAMÍREZ-UCLÉS, R. Y DEL RÍO, A. (en prensa). *Sentido espacial.*

GUTIÉRREZ, A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En Flores, P., Ruíz, F. y De la Fuente, M. (Eds.), *Geometría para el siglo XXI* (pp.13-58). Badajoz: Federación Española de Profesores de Matemáticas y SAEM THALES.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (2000). *Principios y estándares para la educación matemática*. Cádiz: SAEM THALES.

RAMÍREZ-UCLÉS, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático.* Tesis doctoral inédita. Universidad de Granada.

Galería de imágenes (recuperadas el 4 de julio de 2014)

http://www.mcescher.com
http://es.wikipedia.org/wiki/Gustave_Verbeek
http://sac.csic.es/unawe/Actividades/constelaciones%20en%203D.pdf
http://es.paperblog.com/construyendo-el-omnipoliedro-en-proyecto-integrado-de-mates-1374949/