GUIONES DIDÁCTICOS PARA PRÁCTICAS CON GEOGEBRA EN BACHILLERATO

Miguel Alcaide Calderón, *I.E.S. Poeta García Gutiérrez, Chiclana (Cádiz)*

RESUMEN.

Se presenta una selección de guiones orientados a que los alumnos de Bachillerato de las asignaturas Matemáticas II y Matemáticas Aplicadas a las CCSS II, puedan desarrollar regularmente prácticas con GeoGebra, profundizando en la comprensión, visualizando lo que estudian y desarrollando un modo de trabajo más allá del mero cálculo y más propio de nuestro tiempo.

Nivel educativo: Bachillerato.

1. INTRODUCCIÓN.

Todos los contenidos de la ESO y Bachillerato pueden ser tratados con las versiones actuales de GeoGebra.

En Matemáticas II:

- Análisis (Cálculo diferencial).
- Análisis (Cálculo integral).
- Álgebra lineal.
- Geometría.

En Matemáticas aplicadas a las CCSS II:

- Álgebra (Matrices, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales, Programación lineal)
- Probabilidad.
- Inferencia estadística.
- Análisis.

Para que el aprendizaje de Matemáticas con GeoGebra sea significativo, ha de ser regular y debe ser valorado, realizándose también exámenes con GeoGebra. Nuestra propuesta es:

- Regularidad: una hora semanal.
- Valoración: un examen por cada bloque temático, con un peso en la nota de la asignatura proporcional al tiempo dedicado: 25 % de la nota final.

Cada sesión práctica, estará conectada con la actividad desarrollada en las tres horas semanales de clase convencional: una veces, incidiendo sobre lo más recientemente tratado; otras, profundizando o consolidando lo ya estudiado y otras, anticipándose a lo que se va a tratar en las siguientes sesiones.

Los alumnos parten de diferentes niveles de conocimiento de GeoGebra: algunos lo han usado en algún curso anterior, otros, solo esporádicamente, y otros, nunca. Trabajar y hacer exámenes por parejas, y la facilidad de aprendizaje de esta herramienta, hacen que sorprendentemente pronto, GeoGebra se vuelva tan imprescindible como la calculadora en sus sesiones de trabajo.

2. GUIONES DE MATEMÁTICAS-II.

2.1. ANÁLISIS (CÁLCULO DIFERENCIAL).

1

Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos(x) + b\,\mathrm{sen}(x)}{x^3}$ es finito, calcula b y el valor del límite.

Crea un deslizador b
Define la función en la Barra de Entrada: $f(x) = (x\cos(x) + b\,sen(x)) / x\,\hat{}\,3$
En CAS: Límite[f, 0] y pulsa $\boxed{=}$ (Evalúa)
Mueve el deslizador hasta que en CAS, el límite sea finito.

2

Hacer una construcción con un punto móvil sobre la gráfica de una función, mostrándose las rectas tangente y normal en ese punto. Añadir un texto dinámico con el valor de la derivada en el punto.

- Define cualquier función, por ejemplo, $f(x) = 2x^3 - x^2 - 2x$
- Selecciona la herramienta (Punto en Objeto) y haz clic sobre la gráfica. Con la herramienta (Elige y Mueve) activada, prueba el desplazamiento del punto A.
- Escribe el comando **Tangente[A,f]**
- Selecciona la herramienta (Recta perpendicular) y haz clic en el punto A y en la recta tangente a.
- Edita la función f, la recta tangente a y la recta normal b.
  (Básico: Muestra objeto/Nombre y valor, Color; Estilo; Álgebra: ecuación explícita)
- Escribe: **Pendiente[a]**
  Mueve el punto móvil sobre la gráfica…
- Selecciona la herramienta (Texto) y haz clic en una zona neutra de la *Vista Gráfica*. En la Ventana emergente escribe: **f'(x(A)) = c**, pero el comando **x(A)** en *Casilla Vacía* y **c** como *Objeto*. En Propiedades, marca Posición absoluta en pantalla.
- Ahora, al mover el punto móvil sobre la gráfica se visualiza el valor de la derivada en el punto.
- Define cualquier otra función, con nombre f, para tener la misma aplicación, por ejemplo: **f(x)=sen(x)**.

2.2. ANÁLISIS (CÁLCULO INTEGRAL).

1

Hacer una construcción dinámica que muestre las sumas inferiores y superiores para una función cualquiera en un intervalo [a,b]. Hallar la integral definida de esa función en el intervalo.

- Escribe, por ejemplo, la función $f(x)=2x^3-x^2-2x$
- Selecciona la herramienta (Punto en Objeto) y haz clic sobre el EjeX; dos veces, para crear dos puntos en él.

  Para los puntos obtenidos, define sus abscisas: **a=x(A)** y **b=x(B)**. (Propiedades/Avanzado/Capa:1)
- Crea un deslizador: Nombre: n, Mín.: 1; Máx.: 30; Incremento: 1
- En Opciones / Redondeo / 4 cifras decimales
- En la *Barra de Entrada*, escribe los comandos:

SumaInferior[f,a,b,n]
SumaSuperior[f,a,b,n]
Integral[f,a,b]

Editar:
Propiedades/Color/Opacidad
Para las sumas superiores: Avanzado/Capa:1

(Comprueba sus valores al cambiar el número de rectángulos, con el deslizador n).

- Mueve los puntos A y B hasta obtener un intervalo donde la función sea positiva.
- Usando la herramienta (Texto), crea los rótulos dinámicos:[1]

Suma inferior =**c**
Suma superior =**d**
\int_{**a** }^{ **b**}({f(x) })dx=**e** (Activando Fórmula LaTeX)

c, **d**, **e** como Objetos: son los números correspondientes a la suma inferior, superior e integral

Mueve el deslizador para comprobar:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \text{Área}$$

2.3. ÁLGEBRA LINEAL.

8

Discutir, según los valores del parámetro *m*, el sistema:

$$\begin{cases} mx+y+z=2m \\ x-my+z=0 \\ x+my+z=2 \end{cases}$$

- Crea un deslizador de nombre m.
- En la Vista CAS, define las matrices de los coeficientes y ampliada y calcula sus rangos.

1	A:={{m,1,1},{1,-m,1},{1,m,1}} → $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2	C:={{m,1,1,2},{1,-m,1,0},{1,m,1,2}} → $C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
3	RangoMatriz[A] → 2
4	RangoMatriz[C] → 3
5	m x+y+z=2 m → $y + z = 0$
6	x-m y+z=0 → $x + z = 0$
7	x+m y+z=2 → $x + z = 2$
8	{$5, $6, $7}

Usa la Herramienta (Valor exacto) para que *m* se sustituya por el valor del parámetro

- Mueve el deslizador y observa el valor de los rangos.

- Para obtener las soluciones:
  Escribe cada ecuación en una línea
  Crea una lista con las tres ecuaciones (línea 8)

$k para referencia a la línea **k**

Usa la Herramienta (Resuelve)

2.4. GEOMETRÍA.

<u>Ejercicio 3</u>:

Hallar la posición relativa de las rectas:

$$m: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{5} \qquad n: \frac{x}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z}{-1}$$

$m := \text{Recta}[(1,-2,0), \text{Vector}[(2,3,5)]]$
$n := \text{Recta}[(0,4,0), \text{Vector}[(3,5,-1)]]$

Edita el Color y el Grosor de las rectas

Usa las Herramientas de la Vista Gráfica 3D, para mejorar la vista

<u>Ejercicio 8</u>:

Dados el punto, la recta y el plano siguientes:

$$P(1,3,4); \qquad r := \frac{x-1}{2} = y-1 = \frac{z}{3}; \qquad a: x+3y-z=4$$

a) Hallar la distancia del punto a la recta.
b) Hallar la distancia del punto al plano.
c) Hallar la distancia de la recta al plano.

a) $P = (1,2,4)$
$r := \text{Recta}[(1,1,0), \text{Vector}[(2,1,3)]]$

Con la Herramienta (Distancia o Longitud) hacer clic en el punto *P* y en la recta *r*.

Editar el Color y Grosor de la recta

El resultado aparece en la Vista Algebraica y en la Vista Gráfica 3D

1	Longitud[AP⊗d_r]/Longitud[d_r] → $\sqrt{6}$
2	$1 ≈ 2.45

Comprueba que definiendo:
un punto de la recta: A=(1,1,0) y
los vectores AP=Vector[A,P] y dr=Vector[(2,1,3)],
se obtiene el mismo resultado que con los cálculos habituales

En la Vista Algebraica, desactiva la visibilidad de el punto A y los vectores AP y d_r

b) $a: x+3y-z=4$

Con la Herramienta (Perpendicular), haz clic en el punto *P* y en el plano *a*.
$C = \text{Interseca}[a,b]$

Edita el color del plano y gira la Vista Gráfica 3D, para comprobar que el punto no está en el plano

Con la Herramienta (Distancia o Longitud) clic en el punto *P* y *C*. (Comprueba el valor exacto en la Vista CAS).

c) Para comprobar que la recta y el plano dados se cortan, (distancia 0), activa la *Representación 2D del plano a*.

3. GUIONES DE MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II.

3.1. ÁLGEBRA.

Ejercicio 7:

En un instituto I hay alumnos de tres pueblos; A, B y C. La distancia entre A y B es 6 km, la de B a C es 7 km, la de A a C es 10 km y la de A a I es 8 km. Una empresa de transporte escolar hace dos rutas:

ruta 1: $B \to C \to A \to I$

ruta 2: $C \to B \to A \to I$

a) Determina la matriz M, 2x3, que expresa los kilómetros que recorren los alumnos de cada pueblo por cada ruta.

b) El número de alumnos que siguen cada ruta de cada pueblo es:

Pueblo A: 10 alumnos la ruta 1 y 9 alumnos la ruta 2.

Pueblo B: 15 alumnos la ruta 1 y 8 alumnos la ruta 2.

Pueblo C: 5 alumnos la ruta 1 y 9 alumnos la ruta 2.

determina la matriz N, 3x2, que indique los alumnos que siguen cada ruta de cada pueblo.

c) Si la empresa cobra 12 céntimos por km a cada persona, determina la matriz $P = 0.12 \cdot M \cdot N$ e interpreta cada uno de sus elementos.

Activar la Vista Hoja de Cálculo para crear las matrices:

	A	B	C
1	8	25	18
2	8	14	21

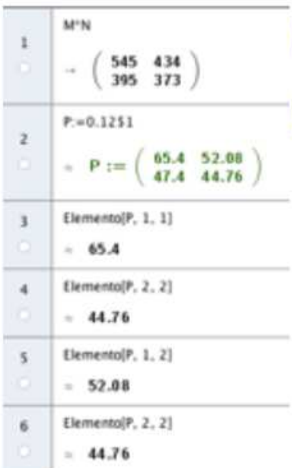
Selecciona las seis celdillas y con el botón derecho: Crea / Matriz
En la Vista Algebraica, botón derecho: Renombra (con M)

3	10	9
4	15	8
5	5	9

Selecciona las seis celdillas y con el botón derecho: Crea / Matriz
En la Vista Algebraica, botón derecho: Renombra (con N)

También se pueden definir las matrices directamente en la Vista CAS como listas de listas (igual que en los ejercicios anteriores)

Activar la Vista Cálculo Simbólico (CAS) para hacer los cálculos:



= (Evaluación exacta)

≈ (Aproximación numérica)

Elemento[matriz,fila,columna]

- ¿Cuánto ingresan en la ruta 1?.......
- ¿Cuánto ingresan en la ruta 2?...... Ingreso total:........
- Si los alumnos que siguen la ruta 1 hubieran tomado la ruta 2, ¿cuánto habrían ingresado en la ruta 2?......
- Si los alumnos que siguen la ruta 2 hubieran tomado la ruta 1, ¿cuánto habrían ingresado en la ruta 1?......

Ejercicio 10:

Un comerciante acude al mercado a comprar naranjas. dispone de 2000 € y en su furgoneta caben 1400 kg.

En el mercado disponen de naranjas de tipo A a 1.10 € y de tipo B a 1.60 €. Él las podrá vender a 1.20 € las del tipo A y a 1.75 € las del tipo B.

¿Qué cantidad debe comprar de cada tipo para que el beneficio sea máximo?

Preparar la Vista Gráfica:
Vista Gráfica…/Básico, **x Mín**: -200; **x Máx**: 2200; **y Mín**: -200; **y Máx**: 2200

Región Factible:

- En la Barra de Entrada, definir las cuatro inecuaciones:[1]

$$x+y\leq 1400$$
$$1.1x+1.6y\leq 2000$$
$$x\geq 0$$
$$y\geq 0$$

$$Max.\ f(x,y)=0.1x+0.15y$$
$$s.a\begin{cases}x+y\leq 1400\\ 1.1x+1.6y\leq 2000\\ x\geq 0;\quad y\geq 0\end{cases}$$

- En la Barra de Entrada, definir también las rectas:

$$x+y=1400$$
$$1.1x+1.6y=2000$$

- Usar la Herramienta (Intersección) para obtener los vértices.[2]
  Seleccionar todos los Puntos obtenidos: Propiedades / Básico: mostrar Nombre y Valor
- Usar la Herramienta (Polígono) para dibujar la región factible.

Cálculo del optimo:
En el Menú Vista, abrir la Hoja de Cálculo y escribir las coordenadas de los vértices obtenidos:

A	B
0	0
0	1250
480	920
1400	0

En la celdilla C1, definir la *Función Objetivo*, para el primero de los puntos:

$$\boxed{0.1*A1+0.15*B1}$$

y arrastrar dicha celdilla hasta C4 para pegar.
En la columna C obtenemos los valores de la función objetivo en cada vértice.

3.2. PROBABILIDAD.

6

La proporción de personas de una población que tiene una determinada enfermedad es de 1 por cada 500 personas. Se dispone de una prueba para detectar dicha enfermedad. La prueba detecta la enfermedad en el 90% de los casos en que la persona está enferma, pero también da como enfermas al 5% de las personas sanas.

a) Se elige al azar una persona y se le hace la prueba.¿Cuál es la probabilidad de que haya sido diagnosticada correctamente?

b) Si la prueba ha diagnosticado que la persona está enferma, ¿cuál es la probabilidad de que realmente lo esté? ¿Y de que esté sana?

Método 1: GeoGebra, Vista Hoja de Cálculo
Opciones/Redondeo/4 cifras decimales
Abre la Vista Hoja de Cálculo e introduce los datos:

- celdillas de títulos: → **A2**: enfermo; **A3**: sano; **B1**: positivo; **C1**: negativo
- *La proporción de … enfermedad es de 1 por cada 500*: → **D2**: 1; **D3**: 499; **D4**: D2+D3
- *La prueba detecta la enfermedad en el 90% de los casos en que la persona está enferma*: → **B2**: 0.9 D2; **C2**: 0.1 D2;
- *da como enfermas al 5% de las personas sanas*: → **B3**: 0.05 D3; **C3**: 0.95 D3
  completar la tabla: → **B4**: B2+B3; **C4**: C2+C3

a) (B2+C3)/D4
b) (cambia el color de la columna B, corresponde a condicionamiento de dar positivo),B2/B4
¿Y de que esté sano?, B3/B4

Método 2: GeoGebraTube, nº 2495819

A_1: "estar enfermo"
A_2: "estar sano"
H: "positivo en la prueba diagnóstica"

Probabilidades a priori:

$$p(A_1)=$$
$$p(A_2)=$$

Verosimilitudes:

$$p(H/A_1)=$$
$$p(H/A_2)=$$

$$p(\bar{H}/A_2)=$$

Teorema de la Probabilidad Total: $p(H)=$

Probabilidades a posteriori:

$p(A_1/H)=$ $\qquad$ $p(A_2/H)=$

a) *Probabilidad de que haya sido diagnosticado correctamente:*

- Probabilidad de estar enfermo Y dar positivo: $p(A_1\cap H)=p(H/A_1)\cdot p(A_1)=$
- Probabilidad de estar sano Y y dar negativo: $p(A_2\cap \bar{H})=p(\bar{H}/A_2)\cdot p(A_2)=$

Probabilidad de ser diagnosticado correctamente:

$$p\left[(A_1\cap H)\cup(A_2\cap \bar{H})\right]=$$

b) Si en la prueba positivo, probabilidad de estar enfermo, $p(A_1/H)=$
¿Y de que esté sano? $p(A_2/H)=$

3.3. INFERENCIA ESTADÍSTICA.

4 CICIO 4

La concentración de arsénico en los moluscos de una zona costera sigue una ley Normal con desviación típica 6 mg/kg. Para verificar la calidad de estos moluscos se toma una muestra aleatoria de tamaño 36 para contrastar si la media poblacional no supera el límite máximo de 80 mg/kg permitido por la normativa sanitaria $(H_0 : \mu \leq 80)$.

a) **(1.5 puntos)** Determine la región crítica de este contraste a un nivel de significación del 5%.

b) **(1 punto)** ¿Debe rechazarse esta hipótesis nula, al nivel del 5%, si en esa muestra de 36 moluscos se encuentra una concentración media de arsénico de 82 mg/kg?

GeoGebraTube, nº 3024881

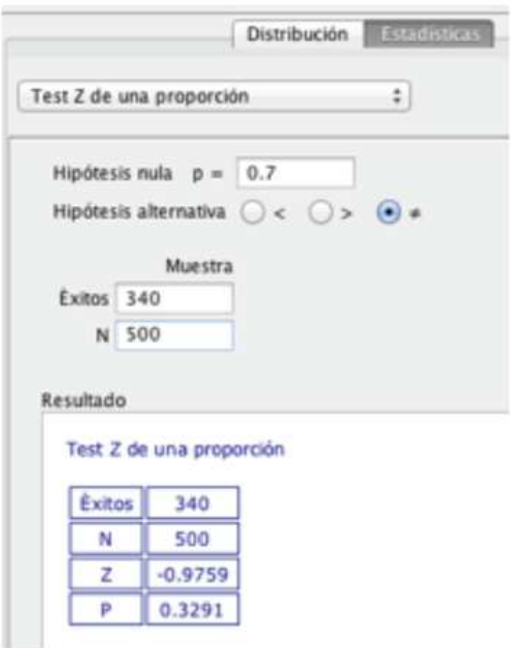
7 CICIO 4

(2.5 puntos) Un titular de prensa afirma que el 70% de los jóvenes de una ciudad utilizan las redes sociales para comunicarse.

Para contrastar la veracidad de tal afirmación se toma una muestra aleatoria de 500 jóvenes de esa ciudad, y se obtiene que 340 de ellos utilizan la red para comunicarse.

Analice mediante un contraste de hipótesis bilateral, $(H_0 : p = 0.7)$, si se puede aceptar, con un nivel de significación del 1%, que dicha afirmación es cierta.

- Vista/Calculadora de probabilidad/Estadísticas
  Selecciona: **Test Z de una proporción**
- Teclea la proporción a contrastar, marca el tipo de contraste y los datos de la muestra.



Estadístico:

p-valor:

Conclusión:

3.4. ANÁLISIS.

4

Hacer una construcción para colorear la gráfica de una función según sea creciente o decreciente.

- Define, por ejemplo, la función $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x^2+1}$
- Selecciona la herramienta (Punto en Objeto) y haz clic sobre la gráfica.
- Escribe el comando **Tangente[A,f]**
- Escribe: **Pendiente[a]**
- Edita el punto A: activa su rastro y, en la pestaña Avanzado/Colores dinámicos, escribe:
  - Para Rojo: **Si[f'(x(A))>0,1,0]**
  - Para Verde:
  - Para Azul: **Si[f'(x(A))<0,1,0]**

Arrastra el punto A sobre la gráfica (*Para Limpiar el rastro: **Ctrl+F***).[1]

Prueba con otras funciones, por ej.: $f(x)=x\cdot\ln x$; $f(x)=\tan x$; $f(x)=\sqrt[4]{x^2+1}$.[2]

REFERENCIAS.

Manual de GeoGebra 5.0.

GeoGebra Quickstar.