

# LA REPRESENTACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS COMO DIAGNÓSTICO DE ESTRATEGIAS METACOGNITIVAS

**Blanca Arteaga Martínez**, *Universidad Internacional de La Rioja (UNIR)*

**Jesús Macías Sánchez**, *Universidad Internacional de La Rioja (UNIR)*

## RESUMEN.

La comunicación tiene como objetivo servir de reflexión para los docentes de Educación Secundaria respecto a su labor al utilizar la resolución de problemas en la clase de matemáticas, como elemento exploratorio de las estrategias metacognitivas que el estudiante utiliza y que pueden servirle de información para adecuar la metodología del aula. Para conseguirlo, se aporta un marco teórico centrado en el uso y utilidad de la resolución de problemas, como recurso didáctico que el docente maneja y en las estrategias metacognitivas que el estudiante puede poner en práctica en la tarea, prestando especial atención al uso de las representaciones que los estudiantes utilizan durante la resolución de problemas.

Se aportan datos de una experiencia de análisis con estudiantes del primer curso de Educación Secundaria Obligatoria, que resuelven problemas de forma guiada centrando los contenidos en el manejo numérico y geométrico.

**Nivel educativo:** Educación Secundaria

## 1. INTRODUCCIÓN.

La resolución de problemas es un elemento en los escenarios de aprendizaje que se asocia generalmente a la asignatura de matemáticas. Pero, ¿de qué manera puede servir al profesor no únicamente como estrategia de aprendizaje en sí misma sino como instrumento evaluador para conocer cómo el estudiante pone en práctica estrategias metacognitivas, para así adecuar la metodología empleada a la forma de aprender de cada uno de los estudiantes?.

De acuerdo al modelo definido por Pintrich (2002, citado en Miranda-Casas et al., 2005) todos los tipos de conocimiento metacognitivo pueden ser de utilidad al profesor de matemáticas, dado que en la resolución de problemas se ha de conocer un abanico de estrategias y elegir una de ellas -tarea cognitiva-, siempre teniendo en cuenta el autoconocimiento del estudiante respecto a sus capacidades, recordemos en este sentido la importancia de las emociones en el éxito o no de la tarea matemática; la metacognición influye más en actividades afectivas y actitudinales (Osborne, 2000).

La resolución de problemas vista desde la metacognición podemos decir que tiene en cuenta tres dimensiones: “planificar, monitorizar y evaluar” (Santos y Lozada, 2013: 43), siempre pensando en la reflexión del aprendizaje durante la ejecución de la tarea, situación sin la cual no tendría sentido hablar de metacognición; es necesario por tanto que el estudiante pueda “conocer, controlar y autorregular su propio funcionamiento intelectual” (González, 1996: 2).

Así planteamos esta investigación, con problemas guiados “de carácter numérico, algebraico y geométrico” (Contreras y Del Pino, 2007:27), en tres grupos de edad y con diferentes grados de dificultad en la tarea. En este trabajo se presenta el primer grupo de edad, primero de ESO, y los problemas de carácter numérico y geométrico.

## 2. LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

La resolución de problemas se utiliza como metodología de enseñanza, desde la que queremos partir con una reflexión por el carácter negativo que lleva implícita la palabra problema y que puede ser un condicionante negativo para la actividad de los estudiantes; para evitarlo hay autores que sustituyen el término por “tarea” e incluso dentro de éstas, las clasifican entre “tareas de práctica y tareas problemáticas” (Rodríguez, 2005: 33). En esta comunicación utilizaremos el término problema, con el significado que le dan Vila y Callejo (2004: 31), “designar una situación, planteada con finalidad educativa, que propone una cuestión matemática cuyo medio de solución no es inmediatamente accesible”. La resolución de problemas se utiliza como estrategia de aprendizaje desde tres enfoques distintos: “enseñanza para la resolución de problemas; enseñanza sobre la resolución de problemas y enseñanza vía la resolución de problemas” (Blanco y Cárdenas, 2013: 138); como vemos, ya desde la denominación las diferencias radican en el uso, como aplicación del contenido y como metodología a manejar o como estrategia de aprendizaje. En cualquiera de los casos estaríamos implicando estrategias metacognitivas, en el sentido que tanto planificar como la resolución misma del problema –el proceso de búsqueda, resolución y comprobación–, requiere que el estudiante tome conciencia del propio proceso, eligiendo un procedimiento u otro para seleccionar los datos, elegir una u otra operación, utilizar un algoritmo o no y al término, una evaluación del resultado para saber si responde como solución del problema.

El aprendizaje de las matemáticas, introduce a los estudiantes en un mundo nuevo, tanto conceptual como simbólico, pero sobre todo representativo: enunciados dados en las lenguas propias, organizaciones visuales, gráficas, geométricas, icónicas, etc., son algunos de los medios más empleados en la formación, comunicación y transferencia del conocimiento matemático.

El *National Council of Teachers of Mathematics* –NCTM– organismo estadounidense de referencia para la elaboración de los currículos de matemáticas en distintos países, recomienda que los estudiantes en todos los niveles “expliquen su razonamiento, validen sus afirmaciones y discutan y cuestionen su propio pensamiento y el pensamiento de otros” (Lampert, 1990:33). Esto implica una forma de enseñar donde el estudiante ocupe el centro del escenario de aprendizaje, desarrollando su tarea de forma consciente

y reflexiva; esta situación nos permitirá hablar más aún de sus capacidades para reflexionar y describir (Schoenfeld, 1987) sobre la ejecución de la tarea, expresando cómo y por qué se realiza de una u otra forma, y qué procesos pone en práctica el estudiante durante y después de su realización.

Para el docente será importante conocer qué variables se ponen en práctica en la resolución de problemas matemáticos, en relación a las estrategias metacognitivas quizá aún más que las cognitivas.

El modelo definido por Lester (1985) para la resolución de problemas matemáticos (Figura 1), donde se relacionan componentes cognitivos y metacognitivos.

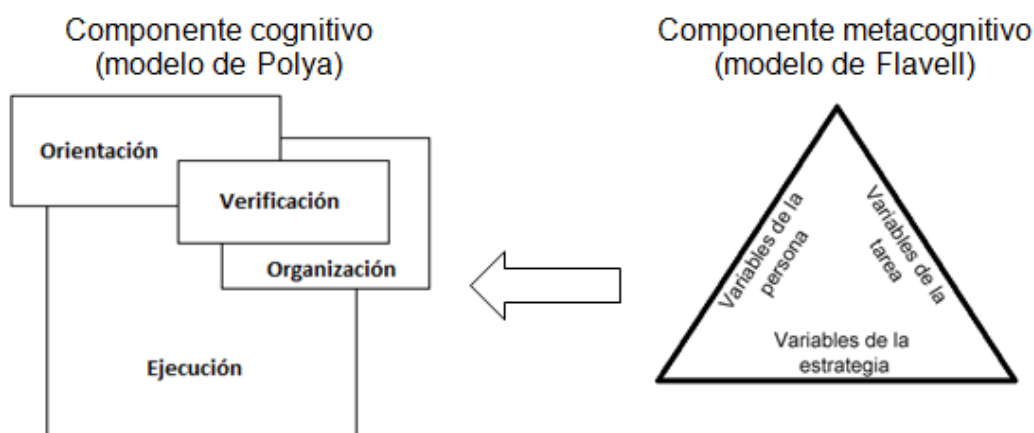


Figura 1. Modelo de Lester. Fuente: Adaptación de Rigo, Paez y Gómez (2010, p. 407)

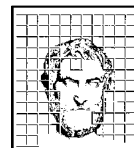
### 3. LA REPRESENTACIÓN COMO ELEMENTO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

La función que desempeñan las imágenes, los dibujos, los símbolos, etc., en el tipo de comprensión que tiene lugar en el estudiante en la enseñanza-aprendizaje de los conceptos matemáticos, ha sido objeto de estudio tanto desde el campo de la didáctica de las matemáticas como desde el campo de la psicología en las últimas décadas, pues las representaciones están estrechamente ligadas a los procesos cognitivos movilizados por los contenidos matemáticos, producto de la naturaleza abstracta de los mismos.

Muchas de estas investigaciones se han centrado, y se centran, en analizar y estudiar en como el incremento del número de conexiones que se pueden establecer entre diferentes sistemas de representación, está fuertemente relacionado y favorece la comprensión que tiene lugar en el estudiante en relación a los conceptos puestos en juego, siendo esta más sólida y completa.

Atendiendo a los trabajos presentes en la literatura previa, y centrándonos principalmente en el trabajo de Duval (1993), podemos agrupar los sistemas de representación en siete principalmente:

- Registro de la Lengua Natural (RLN): El registro de la lengua natural permite introducir definiciones, así como hacer descripciones o designaciones nominales.



- Registro Figural-Icónico (RFI): Engloba dibujos, esquemas, bosquejos, líneas, marcas, etc., que intentan representar el objeto de conocimiento sin dar cuenta de la cualidad de los elementos involucrados.
- Registro Numérico (RN): Las representaciones de tipo numérico ofrecen un gran nivel de concreción resultado de las posibilidades de manipulación que brinda el sistema decimal de numeración, lo que permite apreciar algunas de las características y elementos identificados de los objetos matemáticos. También permite realizar operaciones de cálculo y aplicar propiedades como pueden ser la distributiva, conmutativa, etc., necesarias para la resolución de diversas tareas.
- Registro Tabular (RT): Los datos se presentan a través de un conjunto de filas y de columnas que responden a un ordenamiento lógico. Permite visualizar la información de manera global, establecer relaciones y comparaciones entre los diferentes datos que en ella se recogen.
- Registro Algebraico (RA): Permiten realizar generalizaciones, modelizaciones y señalar características particulares del objeto que representa.
- Registro Geométrico (RGe): El registro geométrico admite operaciones de reconfiguración y manipulación que facilitan la comprensión y el establecimiento de conexiones entre diferentes objetos.
- Registro Gráfico (RGr): El registro gráfico posibilita inferir, con un simple vistazo, el comportamiento que va seguir una determinada función, así como efectuar tratamientos propios de su registro como son las traslaciones, reflexiones, simetrías, contracciones, dilataciones, etc.

#### **4. LA IMPORTANCIA DE CONOCER CÓMO APRENDE EL ESTUDIANTE.**

En relación con la resolución de problemas y la regulación metacognitiva en matemáticas que dividimos en tres momentos principales (Planeación, Control y Evaluación), los sistemas de representación van a ser indicadores del grado de comprensión del problema (Kapa, 2007), pues cuanto más comprensión haya del problema, las representaciones utilizadas que hacen referencia al enunciado del mismo serán más completas o complejas y, por tanto, más útiles a la hora de establecer una secuencia o pasos de resolución.

Basándonos en ello, podemos establecer las siguientes categorías para establecer la relación existente entre la representación efectuada por el alumno y el enunciado del problema propuesto y como consecuencia, nos permitirá clasificar del nivel de comprensión que dicho alumno tiene del mismo:

- No evidencia comprensión: descriptivo, sin ningún tipo de conocimiento matemático asociado o estrategia vinculada.
- Evidencia comprensión parcial: utiliza un registro o registros asociados a una estrategia pero con ausencia de algún dato imprescindible o algún error.
- Evidencia comprensión total: utiliza un registro o registros asociados a una estrategia de manera completa.

## 5. ESTUDIO DE UN CASO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN SECUNDARIA.

La experiencia de análisis está basada en el marco teórico previo, y se desarrolla con una muestra de estudiantes de Secundaria, de primer curso.

Se utilizaron varios tipos de problemas, todos ellos analizados con unas mismas pautas; a continuación se describe la experiencia con dos de ellos.

Participaron un total de 41 estudiantes (Figura 2), de un colegio concertado del centro de Madrid.

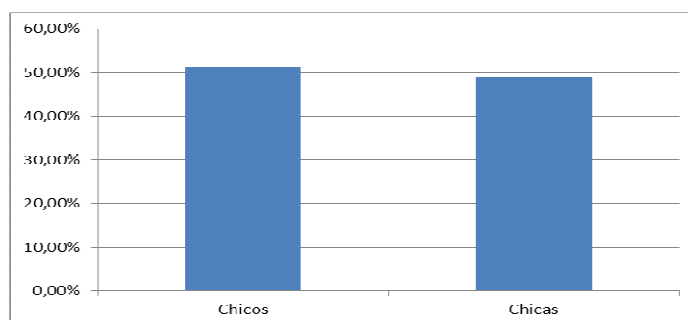


Figura 2. Descripción de la muestra

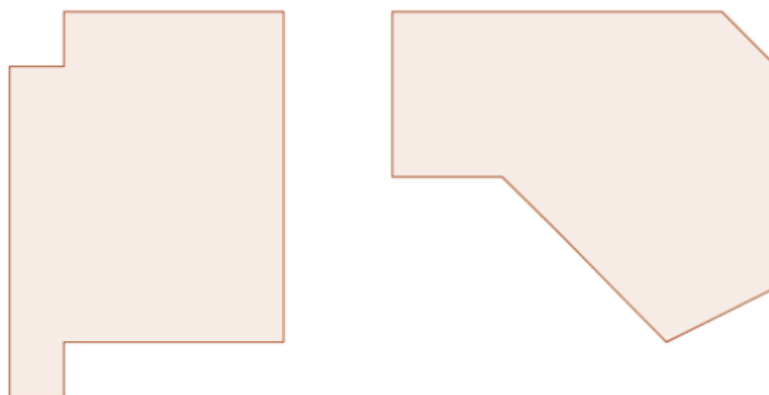
Cada uno de los problemas se pauta en su resolución de acuerdo a siete cuestiones, que tienen además un espacio limitado en el documento para su resolución. Con cada curso se trabajaron dos problemas, uno de carácter numérico y otro de carácter geométrico.

El problema de carácter numérico (Tipo A) para primero de ESO fue:

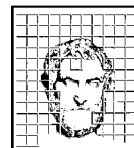
*El año pasado había 92 chicos y 83 chicas en el Colegio Atlas. Este año hay 210 estudiantes, de los cuales 97 son chicos. ¿Cuántas chicas más hay este año que el año pasado?*

El que utilizamos con base geométrica (Tipo B),

*Un agricultor dispone de dos terrenos para plantar trigo. Como no tiene semillas suficientes para plantar en los dos, decide hacerlo únicamente en el terreno de mayor superficie. ¿En qué terreno plantará el trigo?*



Las pautas que se dieron para resolver el problema, así como la codificación que se hizo para el análisis se registran en la Tabla 1,



Pregunta	Estrategias	Codificación de las preguntas		
¿Qué te pide el problema?	<b>PLANEACIÓN</b>	Reconoce la pregunta S: Sí N: No	Modo de expresión A. La expresa tal cual está en el enunciado B. La expresa utilizando sus propias palabras pero no manifiesta parte de la estrategia C. La expresa utilizando sus propias palabras manifestando parte de la estrategia	
Representa mediante un dibujo.		Tipo de Representación A. RFI B. RLN C. RN D. RGeo E. RA F. RT G. RGC	Relación de la representación con el enunciado A. No evidencia comprensión: descriptivo, sin ningún tipo de conocimiento matemático asociado o estrategia vinculada B. Evidencia comprensión parcial: utiliza un registro o registros asociados a una estrategia pero con ausencia de algún dato imprescindible o algún error. C. Evidencia comprensión total	
¿Qué pasos vas a seguir para resolver el problema? Numéralos.	<b>CONTROL</b>	Orden de los pasos A. Ordenados B. No ordenados	Identifica datos S: Sí N: No A: Alguno	Corrección en los pasos S: Sí N: No A: Alguno
Siguiendo los pasos del punto anterior resuelve el problema. Si durante el proceso encuentras un "atajo" señala en <b>otro color</b> , si te surge		Resolución	Resuelve: B: Correcto M: Incorrecto Sigue pasos: S: Sí N: No Encuentra atajo: S: Sí N: No Surge duda: S: Sí	

alguna duda señala con el símbolo ¿.			N: No
¿Has utilizado algún plan no previsto?	<b>EVALUACIÓN</b>	Utiliza plan no previsto S: Sí N: No	
La respuesta que has dado ¿tiene relación con la pregunta del problema?		Relaciona respuesta con pregunta S: Sí N: No	
		Justifica la respuesta S: Sí N: No	
¿Algún paso te resultó más difícil?		Dificultad: S: Sí N: No	

Tabla 1. Descripción y codificación de las preguntas

### 5.1. RESULTADOS MÁS DESTACABLES.

La mayoría de los estudiantes reconocen la pregunta, siendo ligeramente superior el porcentaje para A (A. 78,05%; B. 77,56%). A la hora de reconocer el planteamiento de la pregunta, mientras que en A la mayoría la expresan tal cual está en el enunciado 65,86%; en B, la expresan utilizando sus propias palabras, pero no parte de la estrategia, 53,66%.

Respecto al registro de representación, cambia de un problema a otro, en el tipo A, la mayoría es figural icónico (58,53%), que podemos entender como "dibujo infantil", mientras en B es geométrico (51,21%), "utilizan alguna figura geométrica".

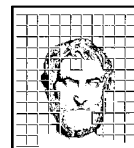
Coincide en los dos tipos de problemas que la mayoría de estudiantes, al relacionar la representación con el enunciado no evidencian comprensión, presentándolo sin ningún tipo de conocimiento matemático asociado o estrategia vinculada.

En ambos problemas, los estudiantes no utilizan un plan de resolución previsto (A. 90,24%; B. 82,93%), relacionan la respuesta con la pregunta (A. 87,80%; B. 75,61%), no justifican la respuesta (A. 90,24%; B. 82,93%) y no consideran que tenga dificultad; llama la atención como la percepción de la dificultad es superior en el problema de carácter geométrico (A. 7,3%; B. 29,26%).

En cuanto a la resolución, se tiene en cuenta, la resolución equivocada por utilizar un procedimiento erróneo (A. 33,33%; B. 18,92%), o por equivocarse en algún paso habiendo elegido el procedimiento acertado (A. 12,82%; B. 35,14%).

Lo resuelven de forma correcta, un 53,84% del problema A, y 45,95% el B.





## 6. CONCLUSIONES.

La resolución de problemas constituye una importante y potente herramienta dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, pues nos permite no solo evaluar el nivel de adquisición y aplicación de conceptos y procesos por parte del alumno, sino estudiar y analizar las estrategias metacognitivas que cada estudiante pone en funcionamiento a la hora de enfrentarse a tareas problemáticas, como hemos podido verificar a través de la experiencia descrita.

El estudio de la comprensión de enunciados, de la relación que se establece entre los datos que constituyen el problema y la cuestión a resolver, así como de los procesos de razonamiento que el estudiante debe articular a modo de engranaje con capacidades y habilidades como son la síntesis, el análisis, la visualización, la argumentación, la fluidez, la audacia, la autonomía, etc., fundamentales en la resolución de este tipo de tareas; nos aporta una visión bastante completa sobre aquellos aspectos en los que es necesario incidir para subsanar aquellas carencias o necesidades que manifiesten los alumnos en este quehacer que tan útil es en la vida, pues facilita una comprensión más general, detallada y efectiva de todo lo que nos rodea para así poder afrontar situaciones complejas de nuestro día a día con mayor garantías de éxito.

Además, toda actividad y proceso matemático, y la resolución de problemas en particular, lleva consigo la necesidad de cambiar y coordinar distintos registros de representación. La importancia que guardan tales procesos de conversión y coordinación con la comprensión significativa de las nociones matemáticas que subyacen en los problemas planteados, convierte a estos procesos en una pieza clave del proceso de enseñanza en nuestro área de conocimiento a la par que evita el establecimiento y creación de obstáculos en el proceso de aprendizaje de los objetos matemáticos. De aquí su pertinencia dentro de este estudio.

Eligiendo los problemas apropiados, adecuados al nivel de nuestros estudiantes, lo suficientemente motivadores y accesibles, y trabajándolos desde un enfoque más experimental persiguiendo el gusto por la investigación, el descubrimiento y el hacer frente a los retos, se consigue un aprendizaje significativo y de mayor calidad de las matemáticas, a la par que se forman personas más capaces y competentes para afrontar todo obstáculo que se encuentren.

## REFERENCIAS.

BLANCO, L.I. Y CÁRDENAS, J.A. (2013). *La resolución de problemas como contenido en el currículo de primaria y secundaria*. Campo Abierto 32 (1), 137-156.

CONTRERAS, J. Y DEL PINO, C. (2007). *Resolución de problemas den contextos matemáticos*. Unión. Revista iberoamericana de Educación Matemática, 12, 27-36.



DUVAL, R. (1993). *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. Annales de Didactique et de Science Cognitives, 5, 37-65. Traducción: Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. E. Hitt, (Ed.) Investigaciones en Matemática Educativa II, 173-201, Grupo Editorial Iberoamérica, México.

GONZÁLEZ, F. (1996). *Acerca de la metacognición*. Paradigma, XIV-XVII.

KAPA, E. (2007). *Transfer from structured to open-ended problem solving in a computerized metacognitive environment*. Learning and Instruction 17, 688-707.

LAMPERT, M. (1990). *When the Problem Is Not the Question and the Solution Is Not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching*. American Educational Research Journal, 27(1), 29-63.

MIRANDA-CASAS, A.; ACOSTA-ESCARREÑO, G.; TÁRRAGA-MÍNGUEZ, R.; FERNÁNDEZ, M.I. Y ROSEL-REMÍREZ, J. (2005). *Nuevas tendencias en la evaluación de las dificultades de aprendizaje en matemáticas. El papel de la metacognición*. Revista Neural 40(1), 97-102.

OSBORNE, J. (2000). *Assesing metacognition in the classroom: The assessment of cognition monitoring effectiveness*. Tesis doctoral. Universidad de Oklahoma.

RIGO, M., PAEZ, D.A. Y GÓMEZ, B. (2010). *Prácticas metacognitivas que el profesor de nivel básico promueve en sus clases ordinarias de matemáticas. Un marco interpretativo*. Enseñanza de las Ciencias 28(3), 405-416.

RODRÍGUEZ, E. (2005). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas. Una propuesta integradora desde un enfoque antropológico*. Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid.

SANTOS, D. A. Y LOZADA, G. A. (2013). *¿Es posible hacer evidentes los procesos de metacognición en la resolución de problemas, fase 2?*. Revista Científica, 42-45.

SCHOENFELD, A. H. (1987). *What's all the fuss about metacognition?*. En A. H. Schoenfeld (Ed.), Cognitive science and mathematics education (pp. 189-215), Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ.

VILA, A. Y CALLEJO, M.L. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar. El papel de las creencias en la resolución de problemas*, Narcea, Madrid.