

TIPOS DE PROBLEMAS ADITIVOS Y SUS VARIABLES: UNA MIRADA DESDE EL PRIMER CICLO DE ENSEÑANZA BÁSICA

Andrea Cruz Verdugo, *Universidad de Granada*

María Eugenia Reyes Escobar, *Universidad de Granada*

Mery Salinas Hernández, *Universidad de Granada*

RESUMEN.

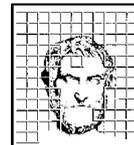
Este trabajo ha sido desarrollado en base a la experiencia docente de las autoras y de su capacidad para identificar problemáticas que surgen en procesos de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas, durante los primeros niveles de educación primaria. Creemos necesario enfatizar la importancia de desarrollar en los estudiantes dicha habilidad para que puedan desenvolverse socialmente y dar solución a las dificultades que se les presente en su vida diaria, como también para proponer a los docentes una forma de abordar los tipos de problemas existentes. La propuesta está orientada a organizar problemas matemáticos de la estructura aditiva, de acuerdo a su nivel de complejidad y variables presentes, según nivel de escolaridad como también dentro del primer ciclo de enseñanza, desde lo más simple a lo más complejo.

Nivel educativo: Primer ciclo de educación, 1º a 4º básico.

1. INTRODUCCIÓN.

Para los integrantes de una sociedad, la educación es la entrada al mundo del conocimiento, por ende, debe mejorar acorde a los avances y cambios sociales, científicos y tecnológicos, con el fin de promover una formación integral en los futuros ciudadanos. Por esto, tanto docentes como estudiantes han de propiciar instancias formativas que permitan alcanzar los objetivos propuestos según los distintos currículos establecidos.

Según las Bases Curriculares chilenas (2012), refiriéndose a la resolución de problemas plantea que, la Matemática contribuye a incorporar una exploración sistemática de alternativas, la aplicación y el ajuste de modelos, la flexibilidad para modificar puntos de vista ante evidencias, la precisión en el lenguaje y la perseverancia en la búsqueda de caminos y soluciones.



Para Brousseau (1986), un problema es una situación que el profesor propone al alumno para adquirir un nuevo conocimiento, la que se plantea al inicio de una lección y su solución es el conocimiento que se quiere enseñar a los estudiantes, quienes en principio no saben que aprenderán un concepto nuevo. Desde este enfoque, el docente es un mediador, en que según Brousseau (1986), debe promover una microsociedad científica para que se construyan los conocimientos mediante las situaciones problemáticas planteadas a través de un aprendizaje significativo.

Esta teoría nos hace reflexionar acerca del uso de las situaciones problemas propuestas al estudiar algún contenido escolar, en donde los problemas matemáticos se intencionan para lograr un objetivo y han de ser contextualizados para promover el aprendizaje significativo. Castro, Rico y Castro (1995) señalan que las situaciones de cada día y los juegos colectivos, proporcionan muchas oportunidades para que los niños piensen y resuelvan problemas.

Consideramos importante que los docentes puedan elaborar y/o seleccionar problemas acordes a los conocimientos de sus estudiantes, que les resulten desafiantes para motivar su resolución y por ende valorar la satisfacción de conseguir una solución. Junto con la anterior, fomentar la conciencia de utilizar un vocabulario adecuado y pertinente por parte de los docentes hacia los estudiantes.

Sin embargo, consideramos la existencia de ciertas dificultades para identificar y seleccionar problemas pertinentes a cada nivel educativo, según los contenidos que se abordan y el grado de complejidad que presentan. Dichas dificultades se evidencian cuando los estudiantes trabajan resolviendo problemas, en que: no comprenden la problemática planteada, muestran confusión en la elección de la operatoria que los llevará a la solución o tienen dificultades en el uso de ciertos rangos numéricos. Los estudiantes comienzan a unir estas dificultades, calificando a todos los problemas matemáticos de "difíciles", produciendo frustración y desánimo para continuar en su tarea. Creemos que los docentes saben que es pertinente abordar tareas que vayan desde lo más simple a lo más complejo, pero ¿cómo hacerlo en la resolución de problemas? Castro y Rico (1995) manifiestan que la estructura inherente de los problemas es el factor crucial para determinar su dificultad.

Lo anterior, nos lleva a reflexionar sobre el por qué los estudiantes presentan tantas dificultades en la resolución de problemas aditivos que, además conlleva al fracaso escolar y desmotivación por la asignatura. Al pensar en estas dificultades, hemos desarrollado una propuesta que permite aportar a la actividad docente, para que puedan crear y/o seleccionar problemas con más simplicidad en los primeros niveles de educación básica y que a la vez, consideramos que ayudará a una ejecución eficaz por parte de los estudiantes.

2. DOCUMENTOS DE REFERENCIA EN LA ENSEÑANZA DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS.

2.1. LOS OBJETIVOS EN LOS PLANES DE ESTUDIO DEL PRIMER CICLO BÁSICO

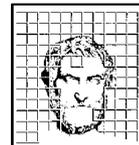
Las Bases Curriculares¹ (2012), mencionan que resolver problemas es tanto un medio como un fin para lograr una buena educación matemática. Se habla de resolver problemas cuando el estudiante logra solucionar una situación problemática dada, contextualizada o no, sin que se le haya indicado un procedimiento a seguir. Mediante estos desafíos, los alumnos experimentan, escogen, inventan y aplican diferentes estrategias (ensayo y error, transferencia desde problemas similares ya resueltos, etc.), comparan diferentes vías de solución y evalúan las respuestas obtenidas y su pertinencia.

La enseñanza formal de la estructura aditiva y las operaciones aritméticas adición y sustracción se inician en los primeros años de escolaridad. En el currículo chileno, se visualiza un trabajo gradual de estas cuestiones, explícitamente durante los cuatro primeros años de educación primaria obligatoria en el ámbito de los números naturales, posteriormente se incorpora el trabajo con decimales, fracciones y enteros.

A continuación, se muestra la progresión del tratamiento de la estructura aditiva en las Bases Curriculares chilenas (2012):

<i>Nivel Educativo</i>	<i>Objetivos de Aprendizaje</i>
Primero Básico	<p>Demostrar que comprenden la adición y la sustracción de números del 0 al 20 progresivamente, de 0 a 5, de 6 a 10, de 11 a 20 con dos sumandos: > usando un lenguaje cotidiano para describir acciones desde su propia experiencia > representando adiciones y sustracciones con material concreto y pictórico, de manera manual y/o usando software educativo > representando el proceso en forma simbólica > resolviendo problemas en contextos familiares > creando problemas matemáticos y resolviéndolos.</p> <p>Demostrar que la adición y la sustracción son operaciones inversas, de manera concreta, pictórica y simbólica. 1º básico Ejes Objetivos de Aprendizaje 100 Bases Curriculares 2.</p>
Segundo Básico	<p>Describir y aplicar estrategias de cálculo mental para adiciones y sustracciones hasta 20: > completar 10 > usar dobles y mitades > "uno más uno menos" > "dos más dos menos" > usar la reversibilidad de las operaciones.</p> <p>Demostrar y explicar de manera concreta, pictórica y simbólica el</p>

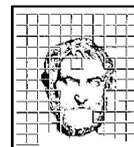
¹ Documento legal que definen los contenidos y objetivos a lograr en la Educación General Básica. En www.curriculumenlinea.cl



	<p>efecto de sumar y restar 0 a un número. Demostrar que comprende la adición y la sustracción en el ámbito del 0 al 100: > usando un lenguaje cotidiano y matemático para describir acciones desde su propia experiencia > resolviendo problemas con una variedad de representaciones concretas y pictóricas, de manera manual y/o usando software educativo > registrando el proceso en forma simbólica > aplicando los resultados de las adiciones y las sustracciones de los números del 0 a 20 sin realizar cálculos > aplicando el algoritmo de la adición y la sustracción sin considerar reserva > creando problemas matemáticos en contextos familiares y resolviéndolos Demostrar que comprende la relación entre la adición y la sustracción al usar la "familia de operaciones" en cálculos aritméticos y la resolución de problemas.</p>
Tercero Básico	<p>Describir y aplicar estrategias de cálculo mental para las adiciones y las sustracciones hasta 100: > por descomposición > completar hasta la decena más cercana > usar dobles > sumar en vez de restar > aplicar la asociatividad. Demostrar que comprenden la adición y la sustracción de números del 0 al 1.000: > usando estrategias personales con y sin material concreto > creando y resolviendo problemas de adición y sustracción que involucren operaciones combinadas, en forma concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o por medio de software educativo > aplicando los algoritmos con y sin reserva, progresivamente, en la adición de hasta cuatro sumandos y en la sustracción de hasta un sustraendo Demostrar que comprenden la relación entre la adición y la sustracción, usando la "familia de operaciones" en cálculos aritméticos y en la resolución de problemas.</p>
Cuarto Básico	<p>Demostrar que comprenden la adición y la sustracción de números hasta 1 000: > usando estrategias personales para realizar estas operaciones > descomponiendo los números involucrados > estimando sumas y diferencias > resolviendo problemas rutinarios y no rutinarios que incluyan adiciones y sustracciones > aplicando los algoritmos en la adición de hasta cuatro sumandos y en la sustracción de hasta un sustraendo.</p>

2.2. LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EL NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM).

En el National Council of Teachers of Mathematics (2000), por medio de los Principios y Estándares, se pretende "describir las características particulares de una educación matemática de gran calidad" como también, "describir los contenidos y procesos matemáticos que deberían aprender los estudiantes". Para lograrlo se proponen los Principios de: igualdad, curricular, enseñanza,



aprendizaje, evaluación y tecnológico para las matemáticas escolares como también, un conjunto de competencias matemáticas que buscan desarrollar la capacidad de pensar y razonar matemáticamente. De ahí nacen los Estándares de Contenidos que deberían aprender los estudiantes desde el Prekindergarten al Nivel 12 en Números y Operaciones, Álgebra, Geometría, Medida y Análisis de Datos y Probabilidad; y Estándares de Procesos que exponen distintas formas de adquisición y uso de los contenidos en el currículo escolar por medio de: resolución de problemas, razonamiento y demostración, comunicación, conexiones y representación.

En el NCTM (2000) se explicita que la resolución de problemas es una característica notable de la actividad matemática y un medio importante para desarrollar el conocimiento matemático. Consiste en encontrar una manera de alcanzar un objetivo que no es directamente asequible. Es algo natural para los niños, ya que el mundo es nuevo para ellos y muestran curiosidad, inteligencia y flexibilidad cuando se enfrentan a situaciones nuevas. En estos niveles el reto consiste en construir sobre sus innatas inclinaciones a resolver problemas y en preservar y estimular esta favorable disposición al respecto. Los profesores deberían animar a sus alumnos a usar la matemática que van aprendiendo para desarrollar una amplia serie de estrategias de resolución de problemas, plantear problemas retadores y aprender a controlar sus propias ideas sobre la resolución de problemas y reflexionar sobre ellas

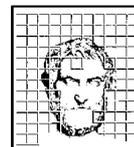
Debido a que este trabajo se centra en la propuesta de una estrategia para el Estándar de Procesos Resolución de Problemas, especificamos los objetivos comunes a los niveles que se encuentran presentes en forma gradual a lo largo de todo el currículo escolar.

Los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para:

- Construir nuevos conocimientos matemáticos a través de la resolución de problemas.
- Resolver problemas que surjan de las matemáticas y de otros contextos.
- Aplicar y adaptar una variedad de estrategias para resolver problemas.
- Controlar el proceso de resolución de los problemas matemáticos y reflexionar sobre él.

En el Estándar Números y Operaciones se menciona que los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para:

- Comprender los significados de las operaciones y como se relacionan unas con otras.
- Comprender distintos significados de la adición y sustracción de números naturales y la relación entre ambas operaciones.



- Comprender los efectos de sumar y restar números naturales.

A medida que los alumnos de los primeros niveles trabajan con tareas complejas en diversos contextos, también construyen la comprensión de las operaciones numéricas.

Puede generarse una interpretación de la adición y de la sustracción cuando los alumnos resuelven problemas de "juntar" y de "separar" modelizando directamente la situación o usando estrategias de conteo como contar hacia adelante o hacia atrás. Se amplía la comprensión de la adición al resolver problemas del tipo "hallar el sumando que falta", que pueden plantearse a partir de situaciones reales. En cuanto a la sustracción, pueden sugerirse nuevas interpretaciones mediante situaciones en las que se necesita igualar dos colecciones o hacer una colección con un tamaño determinado.

Tomar conciencia de la relación inversa entre la suma y la resta puede permitir a los estudiantes ser reflexivos al usar estrategias para resolver problemas

3. TIPOS DE PROBLEMAS ADITIVOS Y SUS VARIABLES.

3.1. TIPOS DE PROBLEMAS.

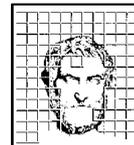
En Segovia y Rico (2011), se explicita que la resolución de problemas supone la aplicación de las operaciones matemáticas a la vida cotidiana desde la etapa Primaria, en que las oportunidades de aprendizaje cubran todos los tipos de problemas distinguiendo sus grados de dificultad.

Se reconocen los siguientes tipos de problemas:

- a. *Problemas de una etapa o problemas simples*: los que se resuelven con una operación aritmética y una sola vez.
- b. *Problemas de dos o más etapas*: los que se resuelven con dos o más operaciones para llegar a su solución.

Cada una de estos problemas se corresponde con adiciones y/o sustracciones en problemas de una etapa y en los de dos o más, se analizan en cada una de las etapas que los componen. En los problemas aditivos de una etapa hay tres cantidades involucradas, pero para que se puedan resolver se necesita conocer dos datos, el tercer dato desconocido se le llama incógnita.

Cuando los estudiantes dominan la resolución de los problemas de una etapa, el posterior trabajo es introducir problemas de dos o más etapas complejizando las actividades.



En los problemas de estructura aditiva de una etapa, podemos considerar una clasificación semántica distinguiendo cuatro tipos:

1. Problemas de Cambio.

Se distinguen tres momentos diferentes: Hay una cantidad inicial sometida a una acción o transformación que la modifica para llegar a una cantidad final.

Además, se incluyen los problemas de aumento y de disminución, en que en ambos casos la incógnita puede estar en el estado inicial, en el estado final o en el de transformación.

2. Problemas de Combinación.

Hay una cantidad que es el total de dos cantidades que no se modifican. Hay dos cantidades estáticas (A y B) que forman parte de un todo que las incluye y lo conforman en su totalidad.

Se pone en juego una concepción binaria de las operaciones, se conocen como problemas parte-todo. Este tipo de problemas no conlleva acciones físicas que transformen una cantidad por lo que se consideran problemas estáticos. Se distinguen dos tipos: problemas en que se trata de obtener el todo a partir de las partes y problemas en que se trata de hallar el valor de una de las partes conocida la otra y el todo.

3. Problemas de Comparación.

Se dan simultáneamente dos cantidades independientes que se relacionan mediante la comparación.

Los problemas son estáticos y también ponen en juego una concepción binaria de las operaciones. Una cantidad actúa de Referente y la otra de Comparado o Referido, el resultado de la comparación es la cantidad Diferencia. Hay dos posibles comparaciones: según si el referente es menor o según si el referente es mayor.

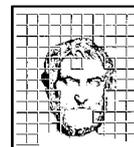
En cada posibilidad de comparación hay tres posibles problemas según cuál sea la incógnita: Referente, Comparado o Diferencia. Por lo que existen seis posibles problemas de comparación aditiva.

La relación de las cantidades se expresa con términos comparativos: más que, menos que o similares, también acompañados de un adjetivo como, por ejemplo, más viejo que, menos largo que, etc.

4. Problemas de Igualación:

Exponen una acción física, necesaria para que una cantidad sea igual a otra. En cada posibilidad de problemas se pueden obtener tres posibles problemas, según dónde sea la incógnita.

Para cerrar este punto, se hace mención que los conocimientos de la estructura aditiva son factibles de utilizar en contextos reales, cuyos ámbitos de actuación contempla las situaciones personales, educativas o laborales, públicas y científicas, entre otras (Rico, Lupiañez y Gómez; 2008).



3.2. DIFICULTADES

Castro, Rico y Castro (1995), se mencionan que algunos de los resultados proporcionados por los estudios realizados sobre dificultades en la resolución de problemas son:

- En los primeros niveles resultan más sencillos los problemas, si se presentan con materiales, grabados o dibujos.
- La longitud del enunciado, el número de oraciones, la posición de la pregunta, son variables útiles para explicar la dificultad del problema.
- El tamaño de los números y la presencia del símbolo en vez de números concretos incrementa la dificultad del problema.
- La relación entre el orden de aparición de los datos en el enunciado y el orden en que deben de ser colocados a la hora de realizar con ellos la operación necesaria para resolver el problema, es también una fuente de dificultad

4. ESTRATEGIA DE FORMULACIÓN Y APLICACIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS

Consideramos necesario establecer las variables que inciden en la complejidad y el orden que los docentes han de otorgar a los problemas que se trabajarán en la enseñanza de la resolución de problemas.

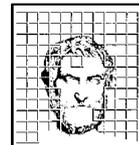
Estas variables son:

- El abordaje metodológico: Concreto, Pictórico o Simbólico.
- Acciones que se realizan: juntar, separar, agregar, quitar.
- El dato oculto: posición de la incógnita.
- El número de operaciones: cantidad de operaciones que se realizan.
- El ámbito numérico: el tamaño de los números.
- La longitud del enunciado: varía de acuerdo al curso.

No es fácil abordar la resolución de problemas en la clase, debido al escaso tiempo destinado a la preparación de la enseñanza. Creemos que es conveniente simplificar la teoría y hacerla más operativa, con una herramienta que permita facilitar la labor en el abordaje de la resolución de problemas, sus tipos en relación a las acciones y en combinación con las variables.

A continuación, la Tabla 1 muestra las variables a considerar en cada nivel del primer ciclo de enseñanza que dan la graduación de complejidad correspondiente a cada curso y, por ende, al primer ciclo básico.

CURSO	TIPOS DE PROBLEMAS	VARIABLES
-------	--------------------	-----------



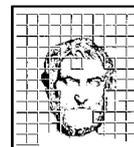
Primer año básico	Cambio	<ul style="list-style-type: none"> - Método Concreto, Pictórico y Simbólico. - Ámbito Numérico 0-100 - Una operación: suma o resta. - La incógnita se encuentra en el resultado. - Frases cortas. - Acciones: Juntar y Separar.
Segundo año básico	Cambio y Combinación	<ul style="list-style-type: none"> - Método Concreto, Pictórico y Simbólico. - Ámbito Numérico 0-500. - Dos operaciones: suma-suma, resta-resta, suma-resta, resta-suma. - La incógnita se encuentra en el resultado. - Frases medianamente cortas. - Acciones: Juntar, separar, agregar y quitar.
Tercer año básico	Cambio, Combinación y Comparación	<ul style="list-style-type: none"> - Método Pictórico y Simbólico. - Ámbito Numérico 0-1000. - Dos a tres operaciones. - La incógnita se encuentra en el resultado. - Frases medianamente largas. - Acciones: Juntar, separar, agregar y quitar
Cuarto año básico	Cambio, Combinación, Igualación y Comparación	<ul style="list-style-type: none"> - Método simbólico. - Ámbito Numérico 0-10.000. - Dos o más operaciones. - La incógnita se encuentra en uno de los dos sumandos, minuyendo o sustrayendo. - Frases largas - Acciones: Juntar, separar, agregar y quitar

Tabla 1.

Es importante, que luego del análisis de la tabla propuesta, los docentes puedan identificar los tipos de problemas y las variables involucradas y para ello, se ejemplificará con una clasificación de acuerdo al curso que corresponde.

Ejemplo:

Javier tenía 50 lápices y su hermano le regala 30, ¿Cuántos lápices tiene ahora? En este ejemplo, la cantidad aumenta porque se realiza la acción de *agregar*. Se conoce la cantidad inicial y la transformación, la incógnita es la *cantidad final*. El ámbito numérico es menor que 100 en los sumandos y en su resultado. La frase es corta. Se necesita sólo una operación para su resolución. Por tanto, de



acuerdo a las variables utilizadas, este problema es adecuado para el primer año básico.

5. CONCLUSIÓN.

Consideramos que potenciar el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas es uno de los objetivos fundamentales de la enseñanza de las matemáticas, que se considera útil porque sirve en su aplicación a la vida diaria en otros problemas cotidianos. Constituye un proceso de razonamiento que ayuda a pensar mejor y desarrollar estrategias factibles de utilizar en diversas situaciones, además, la formulación de problemas es otro aspecto con mucho potencial educativo que ha recibido poca atención explícita en el currículo de matemáticas.

En nuestra opinión, las propuestas curriculares de referencia, carecen de estrategias y orientaciones claras que faciliten la labor docente, por lo que en este trabajo se muestra una herramienta que ayudará a ordenar los elementos a considerar en el abordaje de los problemas que se plantean en el primer ciclo educativo, cuyos aprendizajes logrados serán la base de toda la etapa escolar.

REFERENCIAS.

Brousseau, G. (1986). "*Fondements et methods de la didactique des mathématiques*"., Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 7.2, 33-115.

Castro, E., Rico, L. y Castro En. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. Editorial: Iberoamericanas. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación. (2013). *Programas de Estudio. Unidad de Currículum y Evaluación*. Santiago, Chile; Autor.

Ministerio de Educación. (2012). *Bases Curriculares. Unidad de Currículum y Evaluación*. Santiago, Chile: Autor.

National Council of the Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: The Council.

Segovia I.; Rico L., (2011). *Matemáticas para Maestros de Educación Primaria*. Madrid: Ediciones Pirámide.