

¿SOLO LOS “FRIKIS” PUEDEN INVESTIGAR EN MATEMÁTICAS?

Amparo Govea Fontanilla, *Colegio de San Francisco de Paula, Sevilla*

M^a Reyes Nogales Castilla, *Colegio de San Francisco de Paula, Sevilla*

Inmaculada Otero Mateos, *Colegio de San Francisco de Paula, Sevilla*

RESUMEN.

El objetivo de esta comunicación es animar a otros profesores a introducir la investigación matemática en el currículo de Bachillerato. Nuestra experiencia empezó con un grupo reducido de alumnos, con ciertas características especiales, entre ellas la motivación (hoy en día poco frecuente). Vistos los buenos, e incluso a veces sorprendentes resultados, nos planteamos adaptar el formato para todos los públicos. Es decir, diseñar tareas de investigación asequibles a cualquier alumno de Bachillerato y que permita llegar a cada uno a su máximo nivel de desarrollo en habilidades tales como la búsqueda de información, la síntesis, la reflexión, la presentación y comunicación matemáticas..., no siempre presentes en nuestras aulas, comidas día a día por los contenidos y la falta de tiempo.

Nivel educativo: Bachillerato, aunque trasladable a los últimos años de E.S.O.

1. INTRODUCCIÓN.

El origen de esta propuesta está en uno de los requisitos de la asignatura de Matemáticas NM del Programa del Diploma del Bachillerato Internacional (PD) (www.ibo.org/es).

Uno de los objetivos generales de las Matemáticas en el Programa del Diploma es “*Valorar la contribución de las matemáticas a otras disciplinas y como un área de conocimiento específica en la Teoría del Conocimiento*” (BI, 2014) y uno de sus objetivos de evaluación es “*investigar situaciones desconocidas, abstractas y concretas, que conllevan la organización y el análisis de información, la formulación de conjeturas, la extracción de conclusiones y la comprobación de su validez*” (BI, 2014)

En ese sentido, uno de los requisitos de dicha asignatura y que tiene un valor del 20% en la nota final del alumno es realizar a lo largo de los dos años del Programa una **Exploración o Indagación Matemática**, “*una exploración individual que consiste en un trabajo escrito basado en la investigación de un área de las matemáticas*”. (BI, 2014)

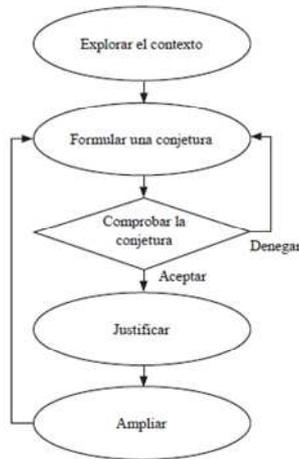


Figura 1 (BI, 2014)

Para ello se insiste en un enfoque de indagación permanente, tanto en el desarrollo de la materia como en las posibles investigaciones que se planteen, y es nuestra obligación como profesores ofrecer oportunidades para que los alumnos desarrollen estas habilidades de indagación. Ver Figura 1.

Paralelamente, debemos enfocar a los alumnos en la resolución de situaciones reales, introducirlos en el uso de modelos matemáticos en la investigación científica haciéndoles partícipes de sus ventajas y de sus limitaciones. Ver Figura 2.

De nuevo, esta investigación es una buena forma de introducir y fomentar estas herramientas.

Partiendo de estos objetivos, principios e ideales, el profesor de Matemáticas NM del BI se enfrenta a la Exploración Matemática, y porque creemos que justo esto debería ser algo que cualquier alumno de Bachillerato debería conocer de nuestra materia, tras la experiencia con los alumnos que cursan el Programa del Diploma, decidimos adaptar esta Exploración Matemática al resto de nuestros alumnos de Bachillerato, yendo más allá de los contenidos oficiales de las distintas programaciones que fluctúan constantemente según el gobierno de turno.

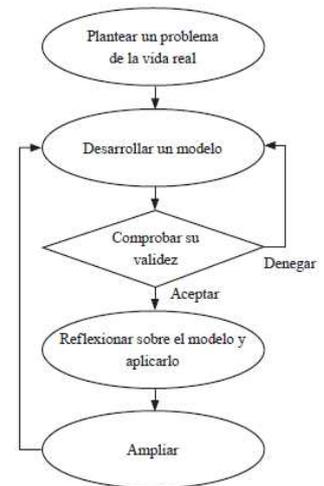


Figura 2 (BI, 2014)

2. INDAGACIÓN MATEMÁTICA SEGÚN LA OBI.

En esta sección describiremos brevemente las características esenciales de esta investigación matemática del PD, sus requisitos, sus criterios de evaluación y cómo se controla la homogeneidad de dicha evaluación, ya que fueron la base e inspiración del resto del proyecto, de ahí que queramos presentarlas como el germen de nuestra idea.

2.1. CARACTERÍSTICAS DE LA INDAGACIÓN MATEMÁTICA.

Se recoge aquí una descripción de la Exploración Matemática basada en lo que describe la Guía de Matemáticas NM publicada por el Bachillerato Internacional.

- "Consiste en un trabajo individual, escrito, basado en la investigación de un área de las matemáticas", se corrige de acuerdo con cinco criterios de evaluación y se evalúa internamente (ver más abajo).
- "El informe final debe tener una extensión aproximada de entre 6 y 12 páginas, incluidos los diagramas y los gráficos, pero sin contar la

bibliografía". No obstante, lo importante es la calidad del trabajo matemático, y no la extensión.

- "Los profesores pueden aconsejar a los alumnos sobre el primer borrador de la exploración. El profesor podrá sugerir maneras de mejorarlo, pero sin llegar a corregirlo o editarlo excesivamente". Es muy importante la labor de acompañamiento, pero evitando interferencias.
- "Se debe cuidar mucho la comunicación matemática (incluidos diagramas, fórmulas, gráficos, etc.) acompañada de comentarios, una buena redacción matemática y reflexiones serias". En este sentido, suelen pecar de falta de un buen análisis crítico. Reflexionar para ellos coincide en muchos casos con resumir lo hecho u opinar sobre lo que les ha gustado el tema tratado.
- Aunque a priori uno no espera que un alumno de Bachillerato descubra una nueva teoría, "sí se espera que el alumno desarrolle su propio enfoque. Los alumnos han de ser capaces de explicar todas las etapas de su trabajo de manera que demuestren una comprensión clara". Ha de estar escrito de modo que sus compañeros puedan seguirlo con relativa facilidad.
- "El informe debe incluir una bibliografía detallada, y es necesario que se incluyan referencias a las fuentes según la política de probidad académica del BI".
- "Se espera que se asigne un total de aproximadamente 10 horas lectivas al trabajo". En estas horas se deberá incluir:
 - El tiempo que necesita el profesor para explicar a los alumnos los requisitos de la exploración.
 - Tiempo de clase para que los alumnos trabajen en la exploración.
 - Tiempo para consultas entre el profesor y cada alumno.
 - Tiempo para revisar el trabajo y evaluar cómo progresa, y para comprobar que es original.

Idealmente, deberían dedicarle 10 horas de trabajo aunque esto es muy discutible y de hecho se está revisando actualmente y tal vez se amplíe a 20.

2.2. CRITERIOS DE EVALUACIÓN.

Como se dijo arriba, hay 5 criterios de evaluación con un peso específico sobre el total de la puntuación según puede verse en la tabla de abajo.

Criterio A	Comunicación	Hasta 4 puntos
Criterio B	Presentación matemática	Hasta 3 puntos
Criterio C	Compromiso personal	Hasta 4 puntos
Criterio D	Reflexión	Hasta 3 puntos
Criterio E	Uso de las matemáticas	Hasta 6 puntos

Puesto que no es el objetivo de esta comunicación, recogemos solo la descripción del mayor nivel de logro para cada criterio, para que el lector se haga

una idea del tipo de habilidades que son evaluadas en cada criterio. Esta información ha sido extraída de la Guía de Matemáticas NM (BI, 2014).

A	<i>"La exploración es coherente, está bien organizada y es concisa y completa"</i>	4 puntos
B	<i>"La presentación matemática es adecuada en su totalidad"</i>	3 puntos
C	<i>"Hay numerosos indicios de un excelente compromiso personal"</i>	4 puntos
D	<i>"Hay indicios contundentes de una reflexión crítica"</i>	3 puntos
E	<i>"Se utilizan unas matemáticas pertinentes y acordes con el nivel del curso. Los aspectos matemáticos explorados son correctos. Se demuestran un conocimiento y una comprensión sólidos."</i>	6 puntos

El profesor del Diploma recibe una información más detallada de estos criterios y es obligatoria la asistencia a talleres de formación sobre su materia en los que dilucidar cualquier duda respecto a los distintos componentes de su asignatura y de la evaluación.

2.3. ¿QUÉ SIGNIFICA EVALUACIÓN INTERNA?

Significa que el profesor corrige los trabajos de sus alumnos según los criterios de evaluación presentados y las directrices del BI. Estas notas deben ser refrendadas por la Organización para asegurarse de que todos los profesores (téngase en cuenta que hay más de 4000 colegios en el mundo que imparten este programa) aplican homogéneamente los criterios descritos.

Para ello introducimos en un sistema online nuestras calificaciones previstas y automáticamente se nos demanda una muestra, 5 ejemplares por cada 20 alumnos, que deben ser enviados corregidos y con un pequeño informe del porqué de nuestra calificación para cada criterio.

Un moderador de la Organización corregirá dicha muestra y eliminará las posibles desviaciones observadas subiendo o bajando la nota predictiva a todo el grupo en base a lo observado en la muestra. Es más, si la valoración del moderador difiere en más de un 10% de la predicha, pasará a un segundo moderador para dirimir al respecto. Es decir, un control de calidad bastante exhaustivo que asegura cierta equidad en nuestras calificaciones. ¿Qué les parecería este control de calidad en nuestras PAU?

2.4. ALGUNOS TÍTULOS Y REFLEXIONES DESDE LA EXPERIENCIA.

Dado que los alumnos tienen libertad para elegir el tema de su investigación la casuística es muy rica y variada. Abajo recogemos 12 ejemplos (4 por cada uno de los tres últimos cursos) que pueden dar una idea de sus intereses.

Título	Tema central
Encriptación: Los hilos que gobiernan el	Criptografía.

mundo.	
¿En qué se parece un donut a una taza? Topología y homeomorfismos de objetos corrientes.	Topología, homeomorfismos e isomorfismos.
Uso del Teorema de Bayes en la Inteligencia Artificial (aplicación en la auto-localización de vehículos móviles).	Teoría de la Probabilidad aplicada a robótica.
Mantener el equilibrio de Nash en el póquer a través de la Teoría de Juegos.	Probabilidad en el juego.
Tensando la cuerda: La armonía de los números.	Análisis Musical mediante transformaciones de funciones trigonométricas.
¿Cómo se establece la relación entre el cáncer de pulmón y el tabaquismo?	Contraste de Hipótesis. Prueba Chi-cuadrado.
Medicina Matemática (EDO en la absorción de sustancias en células u organismos).	Ecuaciones Diferenciales como modelos en Medicina.
La cinta infinita.	Estudio de las propiedades topológicas de la Cinta de Moëbius.
¿Qué matemáticas se esconden detrás de los viajes?	Trigonometría esférica.
¿Cuántos monitores son necesarios para vigilar completamente el patio de mi colegio?	Teorema de la Galería de Arte.
Búsqueda de indicios de fraude fiscal.	La Ley de Bendford (ley logarítmica).
¡El mundo es un pañuelo!	Teoría de Grafos en las redes sociales.

Lo único que podemos decirle al respecto es que se centren en algo muy concreto. Por ejemplo, no puedes investigar *La teoría de grafos*, pero sí acercarte a cómo los grafos modelan las redes sociales (12). Que elijan temas afines a sus intereses personales, ya sean por aficiones o por conexión con sus futuros estudios universitarios. De ahí que surjan relacionados con la Medicina (6 y 7), con la Ingeniería (3), con problemas de su entorno (9, 10, 11 y 12), o con la Música (5). Y que deben mantener en el desarrollo un equilibrio entre el lenguaje técnico, el formalismo matemático y cierto nivel científico, con "crear una historia atrayente", que entienda un compañero y en la que se note que ha comprendido todos y cada uno de los pasos del proceso.

En la Comunicación mostraremos algunos ejemplos que nos llamaron la atención.

3. CÓMO APROVECHAR ESTA EXPERIENCIA CON ALUMNOS DEL BACHILLERATO ESPAÑOL.

Porque consideramos que lo que nuestros alumnos del Diploma hacen, debería ser asequible a cualquiera de nuestros estudiantes, y porque pensamos que un esfuerzo nuestro puede redundar en vocaciones científicas aún no descubiertas, optamos por adaptar el modelo que usamos en el Diploma a las características del Bachillerato Español (BE).

Hablamos, de manera general, de alumnos menos motivados, mayor ratio profesor-alumno, con intereses muy dispersos según las opciones del Bachillerato.... De ahí que nuestra primera preocupación fuese diseñarlo bien para no caer abrumados por el trabajo ingente que representa para el profesor y para diseñar algo asequible al alumno medio de Bachillerato.

Después de pulir el modelo durante los últimos cuatro años, les presentamos en el siguiente epígrafe cómo ha quedado el equivalente a lo ya presentado para el Diploma.

Nótese que una primera restricción es la libertad en la elección del tema (el número de alumnos dificultaría la homogeneización de la evaluación) y se les dan unas pautas mucho más restrictivas (características del alumnado y de nuevo ratio).

3.1. CARACTERÍSTICAS DE LAS INVESTIGACIONES DE LOS ALUMNOS.

Se evaluará con una única nota en cada evaluación que supone el 10% de la nota trimestral (salvo en la última de 2º) que se obtendrá de un trabajo de investigación matemática desarrollado a lo largo de todo el curso y con las siguientes características:

- Los profesores facilitarán un guion aclaratorio al inicio del trabajo.
- De realización individual y con un plazo máximo de entrega de 10 días lectivos.
- Con una extensión de entre 10 y 12 carillas (sin contar portada ni bibliografía).
- Con temática afín a la desarrollada durante el trimestre en la programación oficial o/y en cursos precedentes o/y generando temas nuevos de investigación.
- Evaluado atendiendo a: comunicación, presentación matemática, compromiso personal, reflexión y uso de las matemáticas.
- En cada trimestre junto con lo requerido, deberá entregarse la parte del trabajo de las evaluaciones previas con las correcciones del profesor, además de la nueva versión ya mejorada.
- La copia total o parcial del trabajo implicará un cero en la calificación (se pasará por Turnitin).
- Aspectos que se evaluarán en el trabajo:
 - Utilización sistemática de notación y terminología adecuadas.
 - Coherencia y profundidad de los razonamientos.

- Uso de formas de representación adecuadas a cada caso (tablas, gráficos, diagramas,...), utilizando eficazmente los medios tecnológicos.
- Comprobación de la validez de los resultados a partir de un número suficiente de datos.
- Creación de ejemplos originales.
- Justificación de las proposiciones.
- Presentación.
- Bibliografía correctamente citada (APA).
- En el desarrollo teórico las explicaciones y ejemplos deben ser propios en todos los casos valorándose la creatividad y profundidad de la investigación.

En la práctica estas características generales, que solo constituyen un marco de referencia de los objetivos de esta tarea, se concretan mucho más para el alumno, en particular el guion facilitado este curso para los alumnos de 1º es:

“ESTUDIO ESTADÍSTICO DE LA PRESIÓN ARTERIAL” (1º Bachillerato cursando Anatomía Aplicada, opción Ciencias de la Salud)

Este trabajo se desarrollará de forma conjunta desde las asignaturas de Anatomía Aplicada y Matemáticas.

(*) NOTA EXPLICATIVA DE LA 3ª EVALUACIÓN: Para la obtención del intervalo de confianza será necesario considerar la población como el conjunto de datos obtenido por todos los alumnos del grupo. Posteriormente, cada alumno deberá extraer conclusiones sobre su media muestral en relación al intervalo de confianza hallado.

NOTA para el lector: Para los alumnos de la Opción Tecnológica se diseñaron dos guiones relacionados con Complejos y sus aplicaciones y sobre Cónicas y sus aplicaciones.

1ª evaluación	2ª evaluación	3ª evaluación (*)
Desarrollo de los contenidos teóricos: -Conceptos generales de Estadística. -Muestreo. -Inferencia estadística. -Intervalos de confianza. (3- 4 carillas)	Planteamiento razonado del muestreo a realizar. Recogida y organización de datos. (3-4 carillas)	Tratamiento estadístico de los datos (cálculo de medidas de centralización y dispersión, intervalo de confianza para la media poblacional). Conclusiones. (3-4 carillas)

“MATEMÁTICAS FINANCIERAS” (1º Bachillerato cursando Economía, opción CCSS)

Los Números Índice son un tema muy interesante de Matemáticas Financieras y con amplia aplicación a situaciones reales en la Economía:

1ª Evaluación: Haz un estudio teórico de este tema, inicio, evolución, aplicación...:

- Concepto de Número Índice. Distintas formas de calcular los Números Índice. Ventajas e inconvenientes de cada una. Cálculo teórico del IPC.
- Ejemplos sencillos de cálculo de Números Índice comparando los distintos resultados.

Se atenderá entre otros a la calidad de las explicaciones, la creación de ejemplos ilustrativos originales y a la correcta cita de fuentes.

2ª Evaluación:

- Haz una tabla con los datos mensuales del tipo de cambio al euro de las siguientes monedas: dólar americano, libra, franco suizo, dólar canadiense y yen.
- Elige una de las monedas anteriores y explica cómo ha evolucionado el tipo de cambio mensual según la tabla anterior. No olvides:
 - Explicar la teoría que necesites para estudiar la evolución.
 - Dar los resultados en una tabla.
 - Explicar dichos resultados ayudándote de gráficas.
- ¿Crees que las variaciones que se han producido se deben a factores económicos, políticos u otros?

3ª Evaluación:

- Elige 5 artículos de tu vida cotidiana. Conociendo su precio actual, aplica el tipo de cambio para saber cuánto costarían los mismos artículos en las distintas monedas del primer apartado, teniendo en cuenta los impuestos aplicados en cada uno de los países en los que se utilizan dichas monedas.
- Elige 5 países de la CEE y explica cómo ha evolucionado en cada uno de ellos el IPC en los últimos 10 años.
- Estudia cómo ha variado en el último año el salario mínimo en los 5 países elegidos. Comparándolo con la evolución del IPC, ¿en qué país ha subido más y en cual menos?

NOTA: Las instrucciones dadas al alumno son las mismas que las recogidas en el caso anterior.

3.2. ALGUNOS TÍTULOS Y REFLEXIONES DESDE LA EXPERIENCIA.

Con la experiencia acumulada en estos tres últimos cursos hemos ido depurando nuestros objetivos iniciales hasta llegar al modelo que hemos presentado.

Por ejemplo, empezamos dando la opción de elegir el tema de manera libre, pero el número de alumnos, los diferentes niveles de implicación, las opciones cursadas,..., hicieron que restringiéramos la temática ofrecida ya que era casi imposible homogeneizar la evaluación.

Los principales logros de esta experiencia para nuestros alumnos son:

- Ven la aplicación real de algunos temas, tan demandada por ellos mismos.
- Estudiar temas de fuera del programa hace que tengan mayor interés y además son introductorios para los futuros estudios.
- Al trabajar de forma transversal, ven las aplicaciones de las Matemáticas en otras asignaturas.
- Les ayuda a aprender a investigar buscando información y discriminándola tanto en internet como en libros.

Algunos de los temas trabajados en estos años son:

- Grafos (El Problema del Viajante).
- Resolución de Ecuaciones No Lineales.
- Aplicaciones de las E. D. O.
- Aplicaciones de las integrales al cálculo de áreas.
- Aplicación de la Matemática Financiera en la Economía.
- Aplicación de la Estadística en la Medicina.

En la Comunicación mostraremos algunos ejemplos que nos llamaron la atención.

4. CONCLUSIONES.

Ha resultado una experiencia muy enriquecedora tanto para los alumnos como para las profesoras ya que nos ha permitido explorar otros temas con nuestros estudiantes, viendo cuáles eran sus inquietudes y guiándolos en la búsqueda de nuevas aplicaciones en la vida real de lo trabajado en clase. Además, estos trabajos les proporcionan información sobre lo que pueden encontrar en las distintas carreras universitarias, ayudándoles, en algunas ocasiones, a orientar su carrera profesional. Entre las habilidades que desarrollan cabe destacar la capacidad de búsqueda de información, seleccionándola en función de la calidad de la fuente, así como destreza y rigurosidad en el uso del lenguaje matemático.

Hay varios aspectos en los que se puede mejorar la puesta en práctica de este tipo de actividades: buscar otros temas susceptibles de ser estudiados por los alumnos de forma independiente, darles información inicial más detallada de los contenidos que deben desarrollar, ya que a veces se pierden en la búsqueda de información y no saben detectar hasta qué punto deben extenderse en el desarrollo, y seguir mejorando en la homogeneización de la evaluación de los trabajos.

Una tarea siempre pendiente para los profesores de Matemáticas es contestar a la eterna pregunta de los alumnos: "Y esto... ¿para qué sirve?". Con estos trabajos se consigue acercar las Matemáticas a los alumnos, contextualizándolas y haciendo que, en ocasiones, sean más cercanas. Este efecto se intensifica si los trabajos se hacen de forma interdisciplinar, como ha sido el caso del trabajo de Matemáticas Financieras con Economía o el de Estadística con Anatomía Aplicada.

Por último, permite que alumnos que no destacan en la materia encuentren temas de su interés y cercanos a su entorno que los motiva extraordinariamente para enfrentarse a nuevos retos en su día a día, y con el formato flexible de la investigación cubrimos casi todo el espectro de alumnos, desde los medios a los "frikis", que no se ven limitados por los contenidos o los exámenes estándar.

"Las Matemáticas no consisten en seguir instrucciones, sino en crear nuevas direcciones que seguir" (Paul Lockhart, 2008).

REFERENCIAS.

LOCKHART, P. (2008) *El lamento de un matemático*, LA GACETA de la Real Sociedad Matemática Española, 11, nº 4, 739-766.

MOCHÓN, F. (2006). *Economía, Guía Didáctica*, Mc Graw Hill, Madrid.

ORGANIZACIÓN DEL BACHILLERATO INTERNACIONAL BI (2014). *Guía de Matemáticas NM, Programa del Diploma, Reino Unido*.

ORGANIZACIÓN DEL BACHILLERATO INTERNACIONAL BI (2016). *Enfoques del aprendizaje, Programa del Diploma*. Consultado el 20 de febrero en https://xmltwo.ibo.org/publications/DP/Group0/d_0_dpatl_gui_1502_1/static/dpatl//es/guide-introduction.html.

PEDRINACI, E Y OTROS. (2011). *Biología Y Geología*, SM, China.