

ERRORES DE LOS ESTUDIANTES A MAESTRO CUANDO TRABAJAN CON FRACCIONES

Carmen León-Mantero, *Universidad de Córdoba*

Alexander Maz-Machado, *Universidad de Córdoba*

María José Madrid, *Universidad de Córdoba*

José Carlos Casas, *Universidad de Córdoba*

RESUMEN.

Presentamos un trabajo sobre los errores que cometen los estudiantes del Grado de Educación Primaria de la Universidad de Córdoba cuando se enfrentan a ejercicios con fracciones a partir de un cuestionario de respuesta múltiple. Los resultados muestran que, aunque conocen el significado de fracción en su relación parte- todo, no distinguen la noción "partes congruentes" de la noción "partes iguales". También destaca la ausencia de justificaciones a la hora de elegir la respuesta correcta.

Nivel educativo: Universitario

1. INTRODUCCIÓN.

La aritmética ocupa un lugar significativo en la formación de las persona, ya que su comprensión es fundamental para poder extender los conocimientos matemáticos (Maz y Gutiérrez, 2008). Diversos estudios han demostrado que uno de los ámbitos que más dificultades provoca dentro de las matemáticas son las fracciones.

Del mismo modo, los maestros en formación deben dominar todos los conocimientos matemáticos que han de enseñar en sus aulas, a sus futuros alumnos, para que puedan ejercer su labor docente con calidad (Segovia y Rico, 2011).

Esto ha motivado la realización de diversas investigaciones que buscan por ejemplo detectar los diversos errores y dificultades en la aplicación del algoritmo de la sustracción que cometen entre otros los estudiantes de magisterio (Rodríguez y Sánchez, 2015). En cuanto a las fracciones se han detectado dificultades entre los maestros en formación para identificar la unidad en el conjunto de los números racionales y para representar fracciones mayores a la unidad (Llinares y Sánchez, 1991). Así mismo, Maz y Gutiérrez (2008) identificaron los tipos de errores cometidos por estudiantes del Grado de Educación Primaria en la resolución de ejercicios y problemas de porcentajes y detectaron las situaciones que les supone mayor dificultad.

Los estándares curriculares del NCTM (2003) señalan la importancia de comprender tanto la equivalencia entre fracciones, decimales y porcentajes como

la información que se deriva de cada una de las representaciones utilizadas en cada caso. Freudenthal (1983) afirma que el objeto matemático que importa es el número racional más que la fracción, no obstante las fracciones son el recurso fenomenológico del número racional.

El Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria incluye para las Matemáticas dentro del bloque de Números los siguientes contenidos sobre fracciones:

- Concepto de fracción como relación entre las partes y el todo.
- Fracciones propias e impropias. Número mixto. Representación gráfica.
- Fracciones equivalentes, reducción de dos o más fracciones a común denominador.
- Relación entre fracción y número decimal, aplicación a la ordenación de fracciones.
- Operaciones con fracciones.
- Correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes.

Las fracciones se encuentran dentro de los contenidos que los maestros de Educación Primaria deberán explicar a sus alumnos. Por ello, centramos nuestro trabajo en el estudio de los errores cometidos por alumnos del Grado de Educación Primaria cuando están trabajando con un contenido matemático tan relevante como son las fracciones.

2. METODOLOGÍA.

Nuestro estudio consiste en una investigación de corte descriptivo y exploratorio aplicada a estudiantes universitarios del Grado de Educación Primaria mediante una prueba en la que tuvieron 60 minutos de tiempo y en la que no se les permitió el uso de la calculadora para su resolución.

2.1. POBLACIÓN Y MUESTRA.

Escogimos un grupo de 126 estudiantes de la asignatura "Matemáticas" del primer curso del Grado de Educación Primaria de la Universidad de Córdoba durante el curso 2012-2013. La participación de los estudiantes fue voluntaria y anónima y el tipo de muestreo fue intencional y por conveniencia con vistas a una mayor flexibilidad a la hora de recoger los datos.

2.2. INSTRUMENTO DE RECOGIDA DE DATOS.

Para la recogida de los datos, usamos un cuestionario de 14 preguntas de opción múltiple a las que se añadió, anexo a las preguntas, una sección en la que se pedía al alumnado que justificase sus respuestas. Las cuestiones que forman parte del cuestionario fueron diseñadas acordes al currículo de Matemáticas de Educación Primaria y se validó mediante una triangulación con investigadores expertos en investigación en Educación Matemática de las universidades de Córdoba, Huelva y Salamanca. Las múltiples soluciones a las preguntas constan de:

- La respuesta correcta.
- Una respuesta "d" correspondiente a la opción "Ninguna de las anteriores".

- Dos respuestas cuya solución corresponde con uno o varios de los errores clasificados en la tabla 1.

ERROR 1	Comparación entre las partes en vez de comparación de las partes con un todo (Castro y Torralbo, 2008)
ERROR 2	Comparación entre partes no congruentes (Llinares y Sánchez, 1988)
ERROR 3	Dificultad al dividir un conjunto discreto en subconjuntos (Llinares y Sánchez, 1988)
ERROR 4	No identificación del segmento unidad como el todo (Llinares y Sánchez, 2001)
ERROR 5	Dificultad de relacionar una fracción con un número decimal o tanto por ciento o un número a:b en una situación de reparto (Llinares y Sánchez, 1988)
ERROR 6	Resuelve operaciones de suma y resta usando las propiedades aditivas de los números naturales (Llinares y Sánchez, 1988)
ERROR 7	Modificación en algún paso del algoritmo de suma o resta de fracciones (Llinares y Sánchez, 1988)
ERROR 8	Construcción de un algoritmo erróneo para sumar o restar fracciones de distinto denominador (Llinares y Sánchez, 1988)
ERROR 9	Aplicar al numerador y denominador de la fracción, cuando operamos una fracción con un número entero (Llinares y Sánchez, 1988)
ERROR 10	Reconocimiento de un modelo aditivo para simplificar fracciones (Llinares y Sánchez, 1988)

Tabla 1. Tipos de errores asociados al trabajo con fracciones

3. ANÁLISIS DE RESULTADOS.

La cuestión número 1 tiene como objetivo determinar si los estudiantes realizan correctamente representaciones de las fracciones en contextos continuos o discretos, en diagramas circulares o rectangulares, etc., en partes de mismo tamaño o congruentes, aunque no necesariamente de la misma forma.

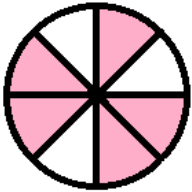
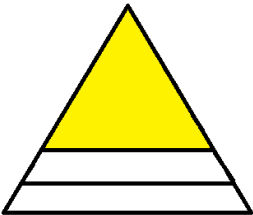

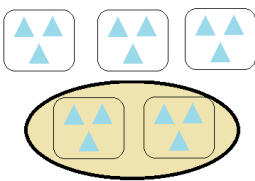
<p>1.1</p>  <p>a. $\frac{5}{8}$ b. $\frac{5}{4}$ c. $\frac{4}{5}$ d. Ninguna de las anteriores</p>	<p>1.2</p>  <p>a. $\frac{1}{3}$ b. $\frac{1}{4}$ c. $\frac{1}{7}$ d. Ninguna de las anteriores</p>	<p>1.3</p>  <p>a. $\frac{1}{2}$ b. $\frac{1}{3}$ c. $\frac{1}{4}$ d. Ninguna de las anteriores</p>	<p>1.4</p>  <p>a. $\frac{6}{5}$ b. $\frac{1}{5}$ c. $\frac{2}{5}$ d. Ninguna de las anteriores</p>
--	--	---	--

Tabla 2. Cuestiones 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4.

Los 126 alumnos contestan correctamente a la cuestión 1.1. Sin embargo el porcentaje de alumnos que cometen el ERROR 2 en la cuestión 1.2 es del 50.8 % y en la cuestión 1.3 es del 57.1%. Una de las dificultades de la cuestión 1.2 radica en que la figura no está dividida en partes congruentes y en la cuestión 1.3 que las partes en las que está dividida la figura son congruentes pero no tienen la misma forma. Con respecto a la cuestión 1.4, los alumnos responden correctamente en un 81.7% de las veces, sin embargo los que no conocen la respuesta, eligen la opción "d" correspondiente a la opción "Ninguna de las anteriores", justificando su respuesta mediante afirmaciones del tipo:

- En el 1.4 no hay fracción.
- Está dividido en partes iguales pero hay partes sombreadas fuera de las casillas.
- Ninguna de las anteriores ya que hay un círculo que les rodea.

Además de los errores mencionados anteriormente, encontramos también errores conceptuales a la hora de simplificar una fracción.

Justifica tu respuesta

1.1. Si la figura se divide en 8 partes y cogemos 5 pues, $\frac{5}{8}$
 1.2. La figura se divide en 3 partes de las cuales cogemos 1, $\frac{1}{3}$
 1.3. Como la figura se divide en 4 partes, cogieramos 2, entonces, $\frac{2}{4}$
 1.4. Si hay 5 figuras de las cuales escogemos 2, pues $\frac{2}{5}$
 * En todas, el denominador indica el número de partes de la figura y el numerador las que cogemos.

Figura 1. Justificación de un alumno a las cuestiones 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4.

Con la cuestión 2 podemos determinar si el alumno realiza representaciones de las fracciones en la recta real como extensión del conjunto de los números naturales, ya sean fracciones propias o impropias. El porcentaje de alumnos que cometen el ERROR 4 es del 39.7% en la cuestión 2.1 y del 27.8% en la cuestión 2.2.



<p>2.1</p>  <p>a. $\frac{2}{5}$ b. $1+\frac{2}{5}$ c. $\frac{7}{10}$ d. Ninguna de las anteriores</p>	<p>2.2</p>  <p>a. $\frac{3}{10}$ b. $1+\frac{3}{5}$ c. $\frac{3}{5}$ d. Ninguna de las anteriores</p>
---	--

Tabla 3. Cuestiones 2.1 y 2.2.

Además encontramos alumnos que no relacionan al intervalo $[0,1]$ como un todo y contabilizan todas las separaciones dibujadas en el esquema como el total.

Justifica tu respuesta

2.1. Porque al dividir en partes en 10 partes iguales, está señalado el total 7.

2.2. Porque de 10 partes, está señalado el total 3.

Figura 2. Justificación de un alumno a las cuestiones 2.1 y 2.1.

En la cuestión 3, pedimos al alumno que ordene las fracciones de mayor a menor estableciendo la equivalencia entre la fracción y el número decimal correspondiente.

Cuestión 3

¿Qué fracción es mayor $\frac{23}{22}$ o $\frac{24}{23}$?

- $\frac{24}{23}$
- $\frac{23}{22}$
- Son iguales
- Ninguna de las anteriores

Un 34.4 % de los alumnos cometen el ERROR 5 al responder a esta cuestión. Además detectamos alumnos que simplificaban ambas fracciones buscando una ley aditiva.

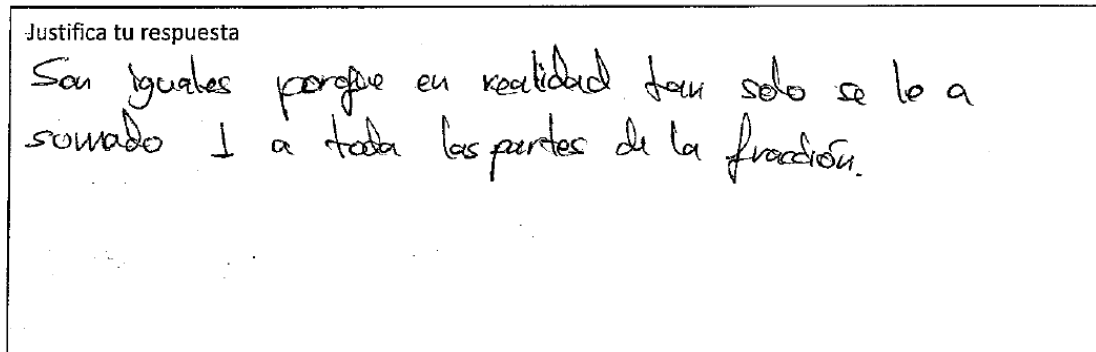


Figura 3. Justificación de un alumno a la cuestión 3.

El objetivo de la cuestión 4 es comprobar si los alumnos aplican de forma correcta los algoritmos de cálculo. En las cuestiones 4.1 y 4.2:

- El 15.1% de los alumnos cometen el ERROR 6.
- El 8.7% de los alumnos cometen el ERROR 7.
- El 7.1% cometen el ERROR 9.

<p>4.1 El resultado de $2/5+6/10$ es</p> <p>a. 8/10 b. 8/15 c. 8/50 d. Ninguna de las anteriores</p>	<p>4.2 El resultado de $2 \cdot \frac{2}{3}$ es</p> <p>a. 10/9 b. 7/9 c. 10/18 d. Ninguna de las anteriores</p>	<p>4.3 El resultado de $1+2/5$ es</p> <p>a. 3/5 b. 7/5 c. 3/6 d. Ninguna de las anteriores</p>
---	--	---

Tabla 4. Cuestiones 4.1, 4.2 y 4.3.

Sin embargo en la cuestión 4.3 el error más común consiste en elegir la opción "Ninguna de las anteriores" (57,9%) en los que los alumnos modifican algún paso del algoritmo de suma, resta o multiplicación.

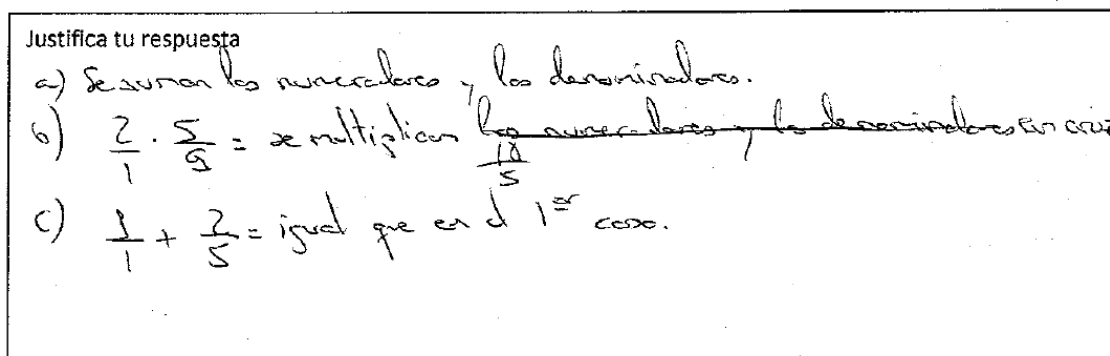


Figura 4. Justificación de un alumno a la cuestión 4.

La cuestión 5 pretende determinar si los alumnos conocen el concepto de fracción equivalente. En este caso solo se cometen errores de tipo 10 en un 4.8% y 6.3% respectivamente

5.1 Identifica la fracción equivalente a $\frac{3}{7}$	5.2 Intercala una fracción entre $\frac{5}{4}$ y $\frac{6}{4}$
a. $\frac{9}{13}$	e. $\frac{3}{2}$
b. $\frac{7}{3}$	f. $1 + \frac{1}{4}$
c. $\frac{9}{21}$	g. $\frac{11}{8}$
d. Ninguna de las anteriores	h. Ninguna de las anteriores

Tabla 5. Cuestiones 5.1 y 5.2.

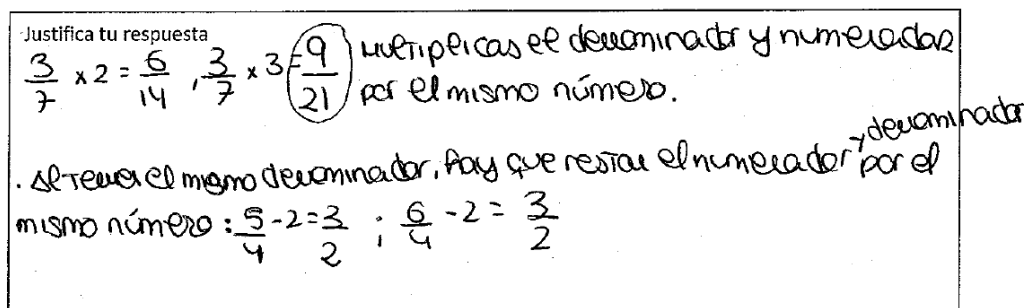

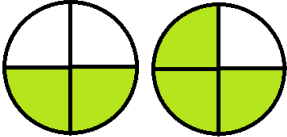









Figura 5. Justificación de un alumno a la cuestión 5.

La cuestión 6 pretende determinar si el alumno realiza correctamente representaciones de las fracciones, números decimales y tantos por ciento, en un contexto continuo en diagramas circulares o rectangulares en partes del mismo tamaño o congruentes. En este caso, llama la atención que el 56.3% cometen el error tipo 5 en la cuestión 6.2 y es que, los alumnos no entienden cómo pueden tomar cinco partes si la figura solo está dividida en cuatro.

6.1 0,25	6.2 $\frac{5}{4}$	6.3 75%
a. 	a. 	a. 
b. 	b. 	b. 
c. 	c. 	c. 
d. Ninguna de las		

anteriores	d. Ninguna de las anteriores	d. Ninguna de las anteriores
------------	------------------------------	------------------------------

Tabla 6. Cuestiones 6.1 y 6.2.

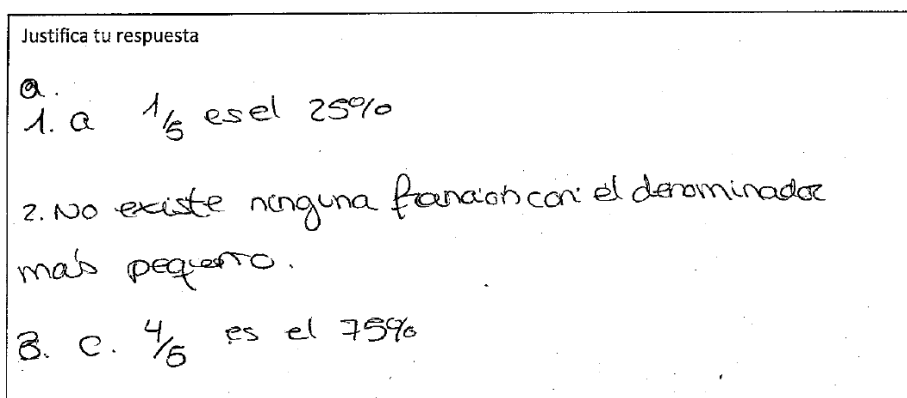


Figura 6. Justificación de un alumno a la cuestión 6.

Cabe destacar que ningún alumno contestó de forma correcta a las 14 cuestiones, solo uno de ellos, contestó bien a 13 de ellas y tres de los alumnos contestaron correctamente solo a tres preguntas.

4. CONCLUSIONES.

Debemos tener en cuenta que el estudio realizado es local, con alumnos de una única Universidad y Grado, por tanto no podemos generalizar nuestras conclusiones a todos el conjunto de estudiantes de grado de Educación Primaria.

Teniendo en cuenta que los conocimientos que hemos intentado detectar en los futuros maestros corresponden al currículo oficial de la Educación Primaria, el hecho de que ningún alumno contestara a las 14 cuestiones de manera correcta refuerza la preocupación de investigadores de la línea del conocimiento profesional del profesorado, sobre las carencias y debilidades matemáticas que poseen nuestros alumnos.

Con respecto a los errores cometidos por los alumnos, esperábamos encontrar muestras de los once errores clasificados. Sin embargo todos los alumnos eligieron la respuesta correcta en la cuestión 1, por tanto, los resultados nos dicen que conocen el significado de fracción en su relación parte- todo. Esto puede estar relacionado con el hecho de que los maestros introducen el concepto de fracción en la escuela desde esta representación y esperan a introducir las demás en el resto de años escolares. Sin embargo, si se potencia mucho la representación parte- todo y la introducción del resto de interpretaciones es más tardía, puede que el alumno no sea capaz de relacionar las interpretaciones de la fracción como representaciones de un mismo concepto.

Nos gustaría destacar el número de respuestas erróneas provocadas por la no comprensión de la noción "partes congruentes" de una figura. En las figuras de

las cuestiones 1.2 y 1.3, el triángulo no está dividido en partes congruentes y el cuadrado sí lo está (no tienen la misma forma, pero son partes congruentes). Pues bien, en la cuestión 1.2 hay el mismo número de respuestas correctas que de erróneas y en la cuestión 1.3 hay un 57% de respuestas erróneas. Desde nuestro punto de vista, los estudiantes no distinguen la noción "partes congruentes" de la noción "partes iguales". De hecho, en algunos cuestionarios pueden verse intentos de reducir el triángulo a "partes iguales" para intentar contar las partes correspondientes a la zona sombreada. Sin embargo contestan con gran confianza a la cuestión 1.3 argumentando que las partes en la que está dividida la figura no son "iguales".

Llama nuestra atención la falta de argumentos de los estudiantes ante la justificación de la respuesta dada. Las respuestas del apartado 2.2 son significativas, es más, no hemos conseguido entender la razón de alguna de ellas. Curiosamente, la respuesta "lo he hecho por lógica" aparece acompañada de una respuesta correcta en la mayoría de las ocasiones.

Como señalan Maz y Gutiérrez (2008) es necesario continuar explorando la comprensión de conceptos matemáticos y los procesos algorítmicos en los estudiantes para maestro de Primaria, pues más adelante serán ellos quienes los enseñarán a los escolares.

REFERENCIAS.

CASTRO, E. y TORRALBO, M. (2001). *Fracciones en el currículo de la educación primaria*. En E. Castro (Ed.) *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*, (pp. 285-314), Síntesis, Madrid.

FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Reidel, Dordrecht.

LLINARES, S., SÁNCHEZ, M.V. (1988). *Las fracciones*, Síntesis, Madrid.

MAZ, A. Y GUTIÉRREZ, M. P. (2008). *Errores de los estudiantes de magisterio frente a situaciones que implican porcentajes*, *Enseñanza de la Matemática* 17, 59-69

NCTM (2003). *Principios y estándares para la Educación Matemática*, NCTM-S.A.E.M. THALES, Sevilla.

REAL DECRETO 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.

RODRÍGUEZ, M. Y SÁNCHEZ, A. B. (2015). *Errores en la sustracción cometidos por estudiantes universitarios*. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.) *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 585). Alicante: SEIEM.