

# RESULTADOS DE PROPUESTA DIDÁCTICA SOBRE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN CON APOYO SOFTWARE

**MSc. Norberto Oviedo Ugalde,**

*ITCR, Instituto tecnológico de Costa Rica y UCR, Universidad de Costa Rica, San José.*

## RESUMEN.

El presente trabajo tiene como finalidad ofrecer los principales resultados obtenidos en un proyecto de investigación, basado en el desarrollo y aplicación de una propuesta didáctica a grupo experimental del curso de ecuaciones diferenciales en la Universidad de Costa Rica.

En dicha investigación se realiza un estudio cuasiexperimental entre el grupo experimental y tres grupos de la misma cátedra de ecuaciones diferenciales, con el propósito de visualizar y comparar si la implementación de la propuesta didáctica con metodología integral permite fortalecer en los educandos su aprendizaje y mejorar su desempeño académico en el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (EDO1) mediante abordaje cualitativo-gráfico y algebraico apoyado con software Mathematica 9.0, entendido este como una integración de distintos enfoques.

**Nivel educativo:** Nivel educativo: Universitario.

## 1. INTRODUCCIÓN.

Las ecuaciones diferenciales constituyen la herramienta matemática más común en la formulación precisa de las leyes de la naturaleza y otros fenómenos descritos por una relación entre una función y sus derivadas. Disciplinas como la mecánica, la astronomía, ciencias físicas, química, biología, economía, etc., así por ejemplo las leyes de conservación de la masa y de la energía térmica, las leyes de la mecánica, etc., se expresan en forma de ecuaciones diferenciales.

Desde épocas atrás pocas ecuaciones diferenciales tienen una solución algebraica sencilla, la mayor parte de las veces es necesario realizar aproximaciones, estudiar el comportamiento de sus soluciones bajo el sistema de ciertos abordajes como el cualitativo y el gráfico.

Por su parte, Poincaré y Lyapunov desarrollaron la llamada teoría cualitativa, que consiste en estudiar las propiedades de las soluciones de una ecuación diferencial sin resolverla. Este método permite obtener gran cantidad de información acerca de las soluciones, aún sin conocerlas, a partir de conceptos claves del cálculo diferencial e integral.

Asimismo, la moderna tecnología a través de software como el Mathematica 9.0, permite trazar con rapidez campos de direcciones, graficar complicadas funciones y ver datos de manera ágil y veraz. Por tanto es importante el uso de la tecnología como herramienta de apoyo para visualizar e interactuar conceptos asociados.

Por ejemplo, si se considera la EDO1  $y' = e^{-x^2}$  no es posible resolverla de forma algebraica en términos de funciones familiares, sin embargo, mediante estudio cualitativo se puede extraer que el comportamiento de sus curvas solución representa funciones estrictamente crecientes, con puntos de inflexión en  $x=0$ , lo anterior se logra complementar de manera visual mediante la representación gráfica de sus curvas solución, campo direccional obtenidos con ayuda del software Mathematica 9.0 y reflejados en la figura 1.

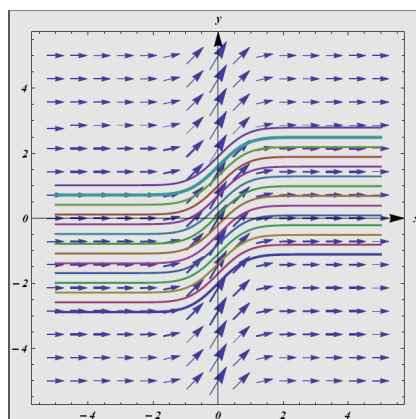


Figura1: campo de direcciones y curvas solución de  $y' = e^{-x^2}$ .

El uso apropiado de la tecnología es indispensable si se pretenden utilizar en el estudio de las ecuaciones diferenciales como herramienta, donde los educandos puedan colaborar activamente en el proceso de aprendizaje y se sientan motivados a pensar, experimentar y comprender. No obstante, esta tecnología es capaz de suministrar soluciones incompletas, equivocadas o incorrectas, de ahí la necesidad de examinar las soluciones desde más de un punto de vista en nuestro caso desde abordajes algebraico, cualitativo y gráfico.

Actualmente en nuestros salones de clase la metodología dominante en el proceso de la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, está

fuertemente orientada hacia la resolución de EDO de una manera mecánica y sin sentido de los conceptos asociados. Al respecto Camacho, Perdomo y Santos Trigo (2007), indican que la idea que tiene los estudiantes de resolver una ecuación diferencial se reduce a la aplicación de algoritmos específicos de clasificación y resolución de las EDO. Es claro que dicha metodología inhibe a los educandos al verdadero entendimiento y visualización de los conceptos involucrados.

En este sentido, es que se plantea una unidad didáctica que rompe con la enseñanza tradicional de las ecuaciones diferenciales, basada en el estudio de las EDO1 desde los abordajes algebraico, cualitativo y gráfico con ayuda de software Mathematica 9.0, con el fin de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, y permita en el educando una mejor comprensión de los procesos de resolución de una EDO1, mayor entendimiento e interpretación de sus curvas solución desde una visión integral, más participativa y significativa.

Es de esta forma que el trabajo de investigación se centra en la siguiente pregunta de investigación:

¿Se logra un mejor desempeño académico por parte de los educandos de la cátedra Ma-1005 en el tema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, a través del desarrollo de una unidad didáctica que aborda dicho tema, mediante el estudio algebraico, cualitativo y gráfico, con uso software como herramienta de apoyo?

## 2. OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN.

### 2.1. Objetivo general:

Elaborar una unidad didáctica para la enseñanza y el aprendizaje del tema Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden (EDO1), a partir de abordaje algebraico, cualitativo y gráfico con apoyo de software, para fortalecer el desempeño académico en educandos de la cátedra MA-1005.

### 2.2. Objetivo específicos

Del objetivo general en la investigación se plantea los siguientes objetivos específicos a saber:

<b>Objetivo 1</b>	Identificar que conocimientos previos son necesarios para la enseñanza y aprendizaje de las EDO1, y de ellos, en cuales los educandos presentan mayores dificultades, para proponer nivelación en los mismos.
	Diseñar una Unidad Didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de las EDO1, a partir de abordajes algebraico,

<b>Objetivo 2</b>	cualitativo y gráfico con apoyo de software, como herramienta para dar respuesta a la pregunta de investigación planteada
<b>Objetivo 3</b>	Evaluar la Unidad Didáctica diseñada, con especialistas en el tema, para valorarla, determinar su viabilidad y mejoras en la misma.
<b>Objetivo 4</b>	Aplicar la Unidad Didáctica a grupo de estudiantes de la Cátedra Ma-1005, para validar dicha unidad en el aula con los educandos.
<b>Objetivo 5</b>	Analizar el desempeño académico obtenido en el grupo experimental y de control para comparar resultados obtenidos entre ambos.

Cuadro 1: objetivos específicos de la investigación.

### 3. ASPECTOS METODOLÓGICOS DE LA INVESTIGACIÓN

En el proceso investigativo, se sigue un diseño cuasi-experimental, en el sentido que se seleccionan 4 grupos de la cátedra Ma-1005 formados por estudiantes que matricularon de manera voluntaria sin ninguna aleatoriedad durante el I semestre del 2014, uno de ellos se le aplica la unidad didáctica propuesta y es llamado el grupo experimental y otros tres grupos a quienes no se aplica unidad didáctica se les llama grupos control.

La investigación se lleva a cabo en seis fases esenciales, una primera de carácter exploratorio para identificar y justificar el porqué de la investigación desarrollada, y posteriormente una fase para cada objetivo específico de la investigación, como se aprecia en el cuadro 2.

	FASE 1	FASE 2	FASE 3	FASE 4	FASE 5	FASE 6
<b>Propósito</b>	Planteamiento y justificación del problema de investigación	Objetivo investigación 1	Objetivo investigación 2	Objetivo investigación 3	Objetivo investigación 4	Objetivo investigación 5
<b>Participantes</b>	5 docentes cátedra Ma-1005 de II semestre 2012	6 docentes cátedra Ma-1005 II semestre 2013 y 2 docentes con	Principalmente investigador, guiado por director tesis y lectores	6 docentes expertos en el tema y con experiencia en el curso Ma-1005	Grupo 07 (grupo experimental) de la cátedra Ma-1005 I S 2014	Investigador, director tesis, lectores y grupos de la cátedra Ma-1005 I S 2014:

		experiencia en el curso.				02,05 y 08 (grupos control)
<b>Tec.-Inst. Inv.</b>	Estadísticas cátedra Ma-1005 y Cuestionario a docentes de cátedra Ma-1005 II S 2012	Cuestionario docentes cátedra Ma-1005 II S 2013	Unidad didáctica según Ambros (2009) y apoyada de teoría Socio-interaccionista de Vygostsky (2003) y teoría aprendizaje significativo de Ausubel (2003).	Cuestionario de valoración mediante escala Likert a docentes expertos de las distintas etapas de cada lección que comprende la unidad didáctica	Cuestionario de validación mediante escala Likert a grupo experimental (grupo 07) de las distintas etapas que comprende la unidad didáctica y observación participante del director de tesis en el aula.	Cuestionario información general y prueba corta sobre tópicos EDO1

Cuadro2: fases metodológicas en la investigación.

La unidad didáctica diseñada para cuatro lecciones (dos en laboratorio de tres horas y dos en clase normal sin uso de computador de dos horas), comprende las siguientes tres etapas:

I Etapa: uso de conocimientos previos para estudio cualitativo de EDO1, esto se realiza durante la primera sesión de clase del curso para visualizar y reforzar los conocimientos previos útiles en el estudio de EDO1.

II Etapa: realización de guías didácticas en el laboratorio mediante uso de páginas interactivas desarrolladas en software Mathematica 9.0 como herramienta de apoyo, la cual tiene el propósito que el educando interactúe, explore, deduzca y visualice los conceptos por tratar en cada lección previamente.

III Etapa: formalización e institucionalización de parte del docente en un aula normal sin laboratorio de los conceptos teóricos tratados en las etapas anteriores.

La figura 2 muestra estudiantes del grupo experimental en una clase llevada a cabo en el laboratorio de matemática de la Universidad de Costa Rica.

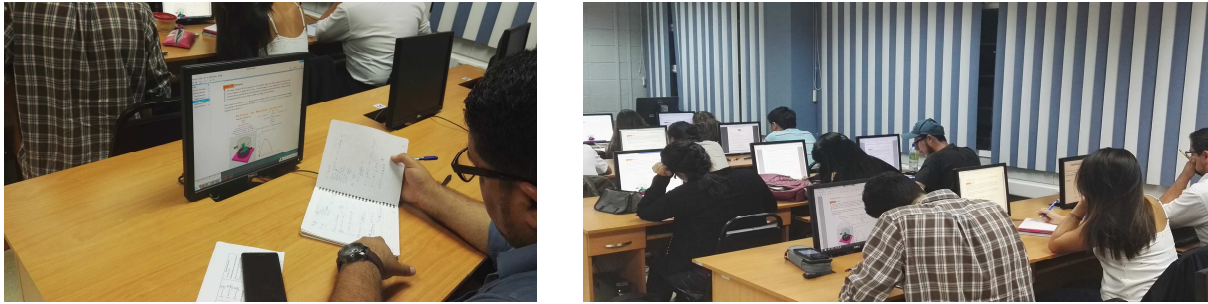


Figura 2: estudiantes en clase de laboratorio del curso de ecuaciones diferenciales MA-1005.

A continuación se muestra a través de las figuras 3 y 4 capturas de pantalla de algunas páginas interactivas desarrolladas e implementadas en las clases de laboratorio para el estudio gráfico e interactivo de EDO1.

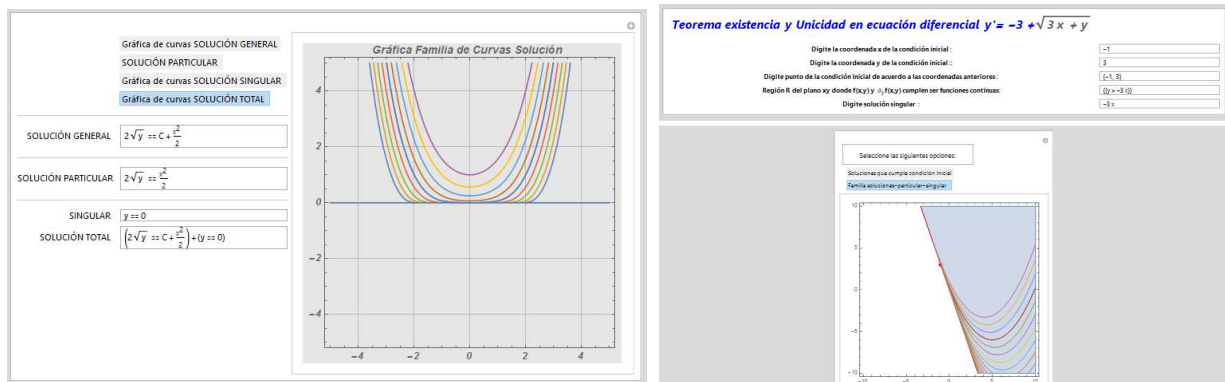


Figura 3: tipos de soluciones en EDO1 y ejemplo ilustrativo en teorema existencia unicidad.

## ECUACIÓN DIFERENCIAL EXACTA

### Exactitud de ecuación diferencial

**EXACTITUD EN ECUACIÓN DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN:  $m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0$**   
 Ingrese los siguientes datos:

m(x,y):

n(x,y):

Figura 4: página interactiva para estudio exactitud en EDO1 de la forma:  $m(x,y) dx + n(x,y) dy = 0$



Es importante hacer saber que la unidad didáctica elaborada fue sometida previamente a valoración por medio de juicio de expertos conocedores del tema, los cuales emitieron sus observaciones y valoraron mediante un cuestionario con escala Likert subdividido en tres etapas, cada una de ellas con afirmaciones alusivas a uso de conocimientos previos, guías didácticas con uso de software y aspectos teóricos. Según la apreciación el experto marca: 1. Totalmente en desacuerdo, 2. En desacuerdo, 3. Neutral, 4. De acuerdo, 5. Totalmente de acuerdo.

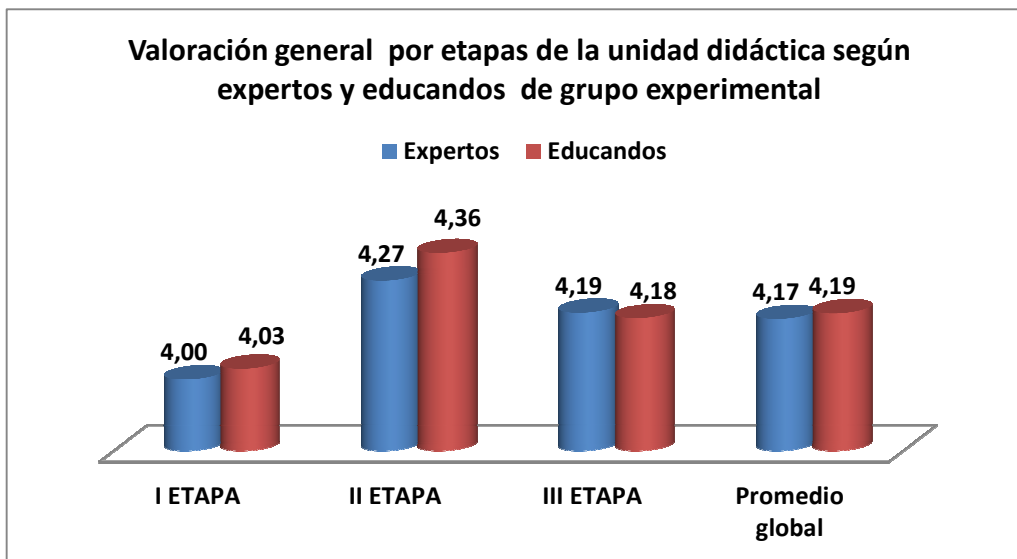
De igual forma una vez aplicada la unidad didáctica a un grupo experimental de la cátedra Ma-1005 de ecuaciones diferenciales, para la validación de la misma se aplicó en la última clase (lección 4) un cuestionario con una escala de Likert, subdividido en las mismas tres etapas y afirmaciones que valoraron los expertos, donde según la apreciación del educando este marca: 1. Totalmente en desacuerdo, 2. En desacuerdo, 3. Neutral, 4. De acuerdo, 5. Totalmente de acuerdo.

#### **4. PRINCIPALES RESULTADOS OBTENIDOS EN LA INVESTIGACIÓN**

Como resultados de la aplicación de la unidad didáctica, se puede señalar que tanto docentes como educandos consideran idóneo hacer en un primer momento un breve repaso y retroalimentación de los conocimientos previos tales como: concepto de derivación y técnicas de integración, útiles para aprendizaje de las EDO1.

Asimismo, pese al tiempo disponible para el desarrollo de las diversas actividades de las guías didácticas en el laboratorio, los resultados obtenidos en los cuestionarios aplicados a docentes y educandos indican que las páginas didácticas elaboradas en el software Mathematica 9.0 favorecieron el aprendizaje, y por ende permitió una mejor comprensión, visualización e interpretación de los conceptos tratados. Además, indican que la teoría tratada en la unidad didáctica, está bien estructurada, ejemplos acordes a los objetivos planteados, ejercicios tienen un nivel significativo según el desarrollo teórico y con vínculos a páginas interactivas como forma de verificación y visualización de los procesos involucrados en el estudio y resolución de las EDO1.

Los resultados anteriores se reflejan en el cuadro 3 que muestra los promedios generales obtenidos en las diversas afirmaciones de los cuestionarios de escala Likert aplicados a expertos y educandos del grupo experimental en las diferentes etapas que comprende la unidad didáctica.



Cuadro 3: promedios obtenidos en las afirmaciones por etapa según expertos y educandos

Finalmente, los resultados obtenidos en la prueba corta demuestran que los educandos del grupo experimental logran tener mejores resultados en los procesos de resolución, entendimiento e interpretación de las EDO1, fortaleciéndose de esta forma el desempeño académico en dichos educandos, como así se muestra en la figura 5.

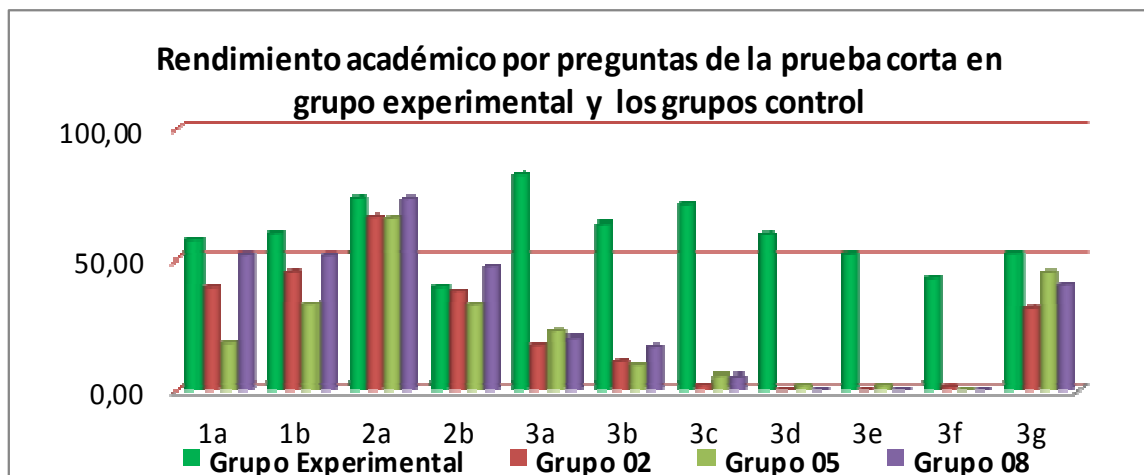


Figura 5: notas promedio por pregunta en la prueba corta en grupo experimental y grupos de control



## 5. CONCLUSIONES MÁS SOBRESALIENTES EN LA INVESTIGACIÓN

1. La metodología predominante en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las EDO1 en docentes de la cátedra Ma-1005 está basada en clases magistrales, la cual inhibe el verdadero sentido de interpretación y entendimiento de los procesos y resultados encontrados en las EDO1.
2. Los alumnos siguen presentando dificultades para resolver de manera algebraica una ecuación diferencial debido a los errores cometidos en los cálculos que involucran las matemáticas elementales y cálculo diferencial e integral, principalmente en técnicas de integración.
3. Las diversas actividades realizadas en las guías didácticas apoyadas con las páginas interactivas desarrolladas mediante software Mathematica 9.0, ayudaron a los educandos a una mejor comprensión, y visualización de los conceptos relacionados con las EDO1, sin embargo, no pareció ser suficiente para los alumnos pues el tiempo invertido en las soluciones algebraicas se ha reducido.
4. La adaptación de los educandos a la metodología utilizada durante el desarrollo de la unidad didáctica implementada es más lenta a la usual, pues exige un comportamiento más activo y más interpretación de parte del educando a lo que están acostumbrados.
5. La metodología adoptada basada en la integración de abordajes algebraico, cualitativo y gráfico mostró resultados positivos en relación a la participación y la interacción de los alumnos entre sí, y con el profesor, con la materia de enseñanza y los recursos computacionales.
6. En términos generales, la unidad didáctica propuesta, ejecutada y evaluada mostró ser un medio viable para conducir a los educandos a una mejor comprensión, resolución e interpretación de las EDO1, fortaleciendo por ende su desempeño académico.

## REFERENCIAS.

Abell, Martha L. y Braselton James P. (2004). *Differential Equations with Mathematica*, Elsevier Science & Technology Books.

Blanchard, P. (1994). *Teaching Differential Equations with a Dynamical Systems Viewpoint*. The College Mathematics Journal, 25(5), pp. 385-395.

Camacho, M., Perdomo, J. y Santos Trigo, M. (2007). *La resolución de problemas en los que interviene el concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria: Un estudio exploratorio*, en Camacho, M., Bolea, P., Flores, P., Gómez, B., Murillo, J. y González, M.a T. (eds.). Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM. Tenerife, Pp 87-106.

Coddington E.(1968). *Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias*. Compañía Editorial Continental, S.A.

Gollwitzer, H. (1991). *Visualization in differential equations*, en, W. y Cunnigham, S. (eds.). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Mathematical Association of America, USA, pp. 149-156.

James R. Brannan y William E. Boyce (2007). *Ecuaciones diferenciales, una introducción a los métodos modernos y sus aplicaciones*. 1 st ed. Copyright 2007, John Wiley & Sons. México.

Lomen D. y Lovelock D. (2000). *Ecuaciones Diferenciales a través de gráficas, modelos y datos*. Primera edición. Compañía editorial Continental, México.