HACER MATEMATICAS

FRANCISCO HERNÁN (del GRUPO CERO de Valencia)

SUMMARY

Reproductive thinking, the habit of using ready-made answers, has two advantages: it is easier both to reach and to test. Productive thinking, creating new answers and using new organizations is more difficult to teach and needs more time and more dynamic teaching relations.

Through the process of two problem-solving situations (one by 14-15 years old pupils and the other by 15-16 years old) some reasons are suggested in this paper which argue in favour of mathematical activities more creative than repetitive.

INTRODUCCION

Una peridista acababa de llegar a casa de Gabriel García Márquez para despertarlo con la nueva de que ya era Premio Nóbel. Enhorabuena, ¿cómo se siente?, ¿está trabajando en algo actualmente? «Pues sí. Estoy escribiendo una novela en la que la gente es feliz. Creo que hay que hacer algo para que la felicidad esté más de moda».

¿Quién no esperará com impaciencia una novela que nace de idea tan bonita? Cabe imaginar paralelamente que con ese talento García Márquez no estará lejos de sentir, si no impaciencia, al menos alguna solidaridad con aquellos que quieran escribir sobre el éxito escolar. A ver si se pone de moda.

Son muchos los que están de acuerdo en que en la enseñanza de las matemáticas se alcanza algún éxito cuando se ven realizados todos —o por lo menos algunos— de los deseos siguientes:

Presentar las matemáticas como una materia para usar y para disfrutar. Las matemáticas, como tantas otras cosas, deben proponerse que quien las practica supere un umbral mínimo de satisfacción. Esa satisfacción puede discurrir por tres canales: el del placer, el del conocimiento, el del uso. Cuando no se alcanza ese umbral mínimo se ha perdido miserablemente el tiempo.

Promover una actitud favorable hacia ellas. Lo cual beneficiará sin duda al profesor igualmente. Para los profesores de alumnos insatisfechos, la expriencia escolar es también generalmente insatisfactoria.

Desarrollar la confianza en su uso. Evitando el rechazo a algo que está fuera de los límites de la comprensión y del éxito, y el amargo sabor de derrota con que gran número de alumnos sale del colegio o del Instituto.

Favorecer el movimiento de puesta en marcha. Comprender la solución de un problema que otra persona ha resuelto es algo muy simple a veces; pero generalmente es mucho más difícil descubrir por uno mismo la solución. En realidad, la parte más difícil de la resolución de un problema matemático es, muy a menudo, «empezar», «ponerse en marcha», «conectar». Y es fácil subestimar las cualidades tanto de determinación como de imaginación que pueden necesitarse para ello.

Ayudar a la solidificación de aspectos psicológicos que propician el aprendizaje:

- interés por el trabajo que se hace
- interés en el propio progreso
- significatividad de la tarea
- atención reflexiva
- ausencia de emoción no pertinente
- pérdida de miedo al ridículo
- eliminación de los mecanismos de defensa que cualquiera tiene ante una situación nueva, en particular un problema.

Fomentar la actitud básica en matemáticas: la de resolver problemas.

Situar a todos los alumnos en igual de condiciones al comienzo de una tarea.

Cuando se propone en clase calcular la ecuación de la tangente a la curva $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$ en el punto de ella que tiene como abscisa $\pi/3$, se establece indefectiblemente una partición que rompe la clase en tres bloques: el de los que tienen los conocimientos técnicos adecuados y la necesaria confianza en sí mismos; el de los que saben que desconocen las herramientas imprescindibles y quedan automáticamente fuera de juego; y un tercer grupo intermedio que probablemente se verá frustado al final por algún error conceptual o algún fallo de memoria.

De acuerdo en que la mayor parte del trabajo matemático se hace sobre elementos técnicos que hay que tener adquiridos. Y en que no puede permanecerse en el bachillerato en un campo de problemas que no requieran conocimientos previos. Pero la importancia de la adquisición de herramientas técnicas no debería hacer olvidar que la gran limitación que habitualmente rodea las matemáticas escolares y medias es la de proponer trabajos cerrados, de respuesta única y ya respondidos por otros. Explorar, formular preguntas, conjeturar, reorganizar las propias conjeturas, producir generalizaciones, son los rasgos que constituyen la parte más atractiva de la actividad matemática y los que hacen que las matemáticas puedan ser de utilidad.

El pensamiento reproductivo, es decir, el hábito de usar respuestas aprendidas tiene dos ventajas: es más fácil de enseñar y es más fácil de someter a exámenes. El pensamiento productivo, que consiste en crear nuevas soluciones y usar nuevas organizaciones, es más difícil de enseñar, requiere más tiempo y necesita de otros esquemas de temporalización de la enseñanza y de estructuración de la clase.

Ambos constituyen los polos del conflicto entre el principio de inercia y el principio de acción en la enseñanza. Lo que sigue, contado a través de dos historias, quiere sugerir algunas razones para inclinarse a favor del segundo principio.

PRIMERA HISTORIA

Octubre. Tres días de trabajo. Principales personajes: 38 alumnos de primer curso de bachillerato. Comienza así:
Profesor.- «En este cuadro

16	3	2	
5	10	11	8
	6	7	
4	15	14	1

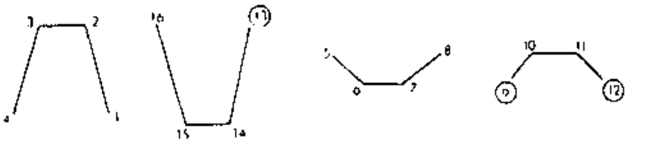
faltan los números 9, 12 y 13. ¿Dónde crees que deben colocarse?»

Siguen unos pocos minutos de silencio y actividad. Se levantan varias manos. El profesor acude a ver lo que quieren decir. «Aquí, aquí y aquí, porque así todas las filas suman lo mismo, 34». Otras manos, «Aquí, aquí y aquí, porque veo que todas las filas y todas las columnas suman lo mismo.» Más manos.
Profesor.- «Quienes han puesto aquí el 9 y aquí el 12, ¿por qué no los han puesto en el otro orden?»

Poco después: «Ya lo tengo. Es mejor cambiarlos porque así...»

El profesor escribe en la pizarra la colocación que la gran mayoría considera adecuada y pregunta «¿Hay alguien que haya encontrado la solución de otra manera, es decir, sin sumas?»

Una alumna: «Sí. Yo los he puesto de ese modo porque he visto que había unas figuras



Profesor.- «Bien.* Ahora, en lugar de recibir el cuadro hecho —o casi hecho— vais a producir vosotros vuestros propios cuadros. Este es el problema:

«Busca un cuadro de tres filas y tres columnas tal que, estando formado por números todos distintos, la suma de cada fila, cada columna y cada diagonal sea la misma.

Sería preferible que no encontrases la solución por casualidad, sino que buscases un método, un procedimiento que te sirviese para más de una ocasión.»
Al cabo de pocos minutos casi todos tienen escrito uno de esos cuadrados mágicos. El profesor pide para el día siguiente que traigan escrita un cuadrado mágico que 'contenga en él infinitos a la vez, es decir que no tenga escritos solamente números sino letras que indiquen algo general'

Muchos llegaron sin tener más que una solución particular. Otros tenían varias, otros tenían un método, pero no sabían hacerlo explícito. Hubo quien tenía la siguiente escritura 'general'.

I	F	D
H	G	C
B	E	A

pensando, sin duda, que generalizar es poner letras sin dar leyes. Otro escribe en la pizarra

* El profesor había esperado que este sería el procedimiento elegido por la mayoría. ¿La razón? Que ese fue el procedimiento que él siguió cuando vio ese cuadrado en «La melancolía», de Albert Durero.

2n	-n	2n
-2n + 1	2n + 1	2n + 1
2n	2n + 1	-2n

Profesor.— «Pon un ejemplo». Y rápidamente escribe

8	-1	2
-3	3	9
4	7	-2

confundiendo así dos números pares que, en su cabeza, son distintos, con dos números pares que en la escritura son el mismo. Y revelando ese dato básico para la enseñanza que consiste en que la cantidad de conocimientos de que cada uno de nosotros es *consciente* es muy inferior a la cantidad de lo que sabemos, y que la cantidad de conocimientos de los que somos conscientes es muy superior a la cantidad de conocimientos que sabemos *verbalizar*.

Preguntada la clase cómo se sale de tal situación, algunos señalan que la escritura 'general' es incorrecta.
Profesor.— «¿Alguien tiene alguna que sea correcta?»
Tres alumnos escriben cosas como esta:

A-1	A-2	A + 3
A + 4	A	A-4
A-3	A + 2	A + 1

P.— «Yo puedo escribir otras. Voy a empezar desde el centro, poniendo *a* y luego poco a poco y con cuidado iré ajustando lo que sea conveniente, así:

a-1	a-4	a + 5
a + 6	a	a-6
a-5	a + 4	a-1

[1]

Y hora podéis hacer vosotros otras más generales, manteniendo la *a*, pero quitando importancia a los números que la rodean.»

Casi en seguida alguien escribe en la pizarra

a-z	a-4z	a + 5z
a + 6z	a	a + 6z
a-5z	a + 4z	a + z

P.— «La clase ha terminado. El trabajo que propongo para que traigáis mañana es: a elegir entre escribir cuadrados mágicos 3 x 3 aún más generales o escribir cuadrados mágicos 4 x 4.»

A la mañana siguente traen algunas cosas interesantes:

a-z	a + z-y	a + y
a + z + y	a	a-z-y
a-y	a-z + y	a + z

a + 1	a + 14	a + 15	a + 4
a + 12	a + 7	a + 6	a + 9
a + 8	a + 11	a + 10	a + 5
a + 13	a + 2	a + 3	a + 16

y comentamos ambas:
En el de 4 x 4, «¿cómo lo has hecho», «Muy fácil, he mirado el primero que hicimos.»
En el de 3 x 3, «Estupendo, aquí tenemos tres posibilidades en lugar de dos. ¿Cómo lo has hecho?»; «He partido del cuadro [1] y donde pone 1 he puesto z, y donde pone 5 he puesto y.»; «Pon un ejemplo»; «Elijo, a capricho, a = 5, y = 3, z = 0, con lo cual queda

5	2	8
8	5	2
2	8	5

P.— «¡Pero eso no es un cuadrado mágico! No pueden elegirse a capricho a, z, y. Es preciso imponer condiciones. Mejor será que lo vuelvas a mirar en casa con atención.»

En efecto, lo miró con más atención e impuso las siguientes condiciones: «y es cualquier número; z es impar; a = zy.»

Esa decisión de no darse por vencidos podria ser lo más destacable de esta historia si no hubiese habido algo aún más reconfortante: el hecho de que afrontaron las diversas etapas que fueron presentándose sin buscar desesperadamente en su memoria y sin pedir con ansiedad la solución a otra persona.

SEGUNDA HISTORIA

Un día de diciembre. Personajes: 30 alumnos de segundo curso de bachillerato. En esta historia no hay conversaciones, sino escritura. El hilo de la trama fue el siguiente:

«44 es un *número feliz* porque

$$44 \rightarrow 4^2 + 4^2 = 32 \rightarrow 3^2 + 2^2 = 13 \rightarrow 1^2 + 3^2 = 10 \rightarrow 1^2 + 0^2 = 1$$

Investiga sobre número felices.»

El trabajo había de hacerse en casa, sin limitación de tiempo, pero entregando por escrito el producto de la investigación.

Se observará que el enunciado tiene un carácter ambiguo: no se dice, por ejemplo, cuantas cifras ha de tener un número feliz; más aún, no se da una definición precisa de lo que es un número feliz. Pero ¿es siempre conveniente eliminar toda ambigüedad en la presentación de un problema? La polivalencia es una característica generalmente consustancial a las situaciones ricas en contenido. Es del estudio de esas situaciones de donde debe venir la supresión de la ambigüedad, si ello es posible, precisando las condiciones iniciales y llevando a la consideración de las diversas opciones.

De acuerdo con ello, los personajes han interpretado con libertad. No todos los papeles pueden traerse aquí, pero incluiremos algunos significativos.

Alfredo.

Los números felices son aquellos en que la sucesiva suma de sus cuadrados da 1.

Por ejemplo:

$44 \Rightarrow 4^2 + 4^2 = 32 \Rightarrow 3^2 + 2^2 = 13 \Rightarrow 1^2 + 3^2 = 10 \Rightarrow 1^2 + 0^2 = 1.$

Son números felices:

el 44, el 23, el 32, el 31, el 13, el 10 y la unidad seguida de ceros. Todos los números que contengan las anteriores cifras y que las restantes sean ceros:

44000; 40004; 400400; etc.

Todos los números que al sumr sus cuadrados nos dé la unidad seguida de ceros.

Cosme.

1º) Todas las potencias de 10 son «numeros felices».

$10^n \rightarrow 1^2 + 0^2 + 0^2 + \ldots + 0^2 = 1$

2º) Si tenemos un «número feliz» de dos cifras, y las permutamos o invertimos sus posiciones, obtenemos otro «número feliz».

$13 \rightarrow 1^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10 \rightarrow 1^2 + 0^2 = 1$

$31 \rightarrow 3^2 + 1^2 = 9 + 1 = 10 \rightarrow 1^2 + 0^2 = 1$

$32 \rightarrow 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13 \rightarrow 1^2 + 3^2 = 10 \rightarrow 1^2 + 0^2 = 1$

$23 \rightarrow 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13 \rightarrow 1^2 + 3^2 = 10 \rightarrow 1^2 + 0^2 = 1$

3º) Un «número feliz» multiplicado por 10 o por potencias de 10 se transforma en otro «número feliz»:

$13 \,.\, 10^n \rightarrow 1^2 + 3^2 + 0^2 + \ldots 0^2 = 1 + 9 = 10 \Rightarrow 1^2 + 0^2 = 1$

Antonio A.

El 44 es un número feliz porque:

$44 \rightarrow 4^2 + 4^2 = 32 \rightarrow 3^2 + 2^2 = 13 \rightarrow 1^2 + 3^2 = 10 \rightarrow 1^2 + 0^2 = 1$

La definición de un número feliz es cuando la suma de los cuadrados de las componentes es 1

Números felices:

— Todos los números que estén compuestos por la unidad seguida de ceros. Ej.:

$1000 \rightarrow 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 = 1$

— El cuadrado de 3 más el cuadrado de 1 da 10, por lo que todos los números que la suma de sus cuadrados da 13 o 31, o estos mismos números son números felices.

$31 \rightarrow 3^2 + 1^2 = 10 \rightarrow 1^2 + 0^2 = 1$

$13 \rightarrow 1^2 + 3^2 = 10 \rightarrow 1^2 + 0^2 = 1$

— El cuadrado de 8 más el cuadrado de 6 da 100, por lo que todos los números que la suma de sus cuadrados da 68 o 86, o estos mismos números son números felices.

$68 \rightarrow 6^2 + 8^2 = 100 \rightarrow 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1$

$86 \rightarrow 8^2 + 6^2 = 100 \rightarrow 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1$

Conclusión:

Vamos a tomar como números felices todos los números cuya suma de los cuadrados de las componentes de los siguientes números: 31, 13, 68, 86. También dichos números seguidos de ceros, ó que los ceros vayan entre medias de las dos cifras.

Emilio.

— Los números felices del 1 al 100 son

1,7,10,13,19,23,28,31,32,44,49,68,70,79,82,86,91, 94,97,100.

— Todos los demás van dando sumas parciales que se repiten constantemente y que siempre acaban en el Nº 4

Ejemplo:

$15 \Rightarrow 1^2 + 5^2 = 1 + 25 = 26 \Rightarrow 2^2 + 6^2 = 4 + 36 = 40 \Rightarrow 4^2 = 16 \Rightarrow 1^2 + 6^2 = 1 + 36 = 37 \Rightarrow 3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58 \Rightarrow 5^2 + 8^2 = 25 + 64 = 89 \Rightarrow 8^2 + 9^2 = 64 + 81 = 145 \Rightarrow 1^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 16 + 25 = 42 \Rightarrow 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20 \Rightarrow 2^2 = \boxed{4}$

$66 \Rightarrow 6^2 + 6^2 = 36 + 36 = 72 \Rightarrow 7^2 + 2^2 = 49 + 4 = 53 \Rightarrow 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34 \Rightarrow 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow 2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29 \Rightarrow 2^2 + 9^2 = 4 + 81 = 85 \Rightarrow 8^2 + 5^2 = 64 + 25 = 89 \Rightarrow 8^2 + 9^2 = 64 + 81 = 145 \Rightarrow 1^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 16 + 25 = 42 \Rightarrow 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20 \Rightarrow 2^2 + 0^2 = \boxed{4}$

— Por tanto, podemos decir que si en un nº cualquiera efectuamos las primera sumas y no nos da alguno de los números felices del 1 al 100, *es que no es feliz*

ejem. $1582 \Rightarrow 1^2 + 5^2 + 8^2 + 2^2 = 1 + 25 + 64 + 4 = 94$

si que es feliz, luego 1582 es feliz.

$2327 \Rightarrow 2^2 + 3^2 + 2^2 + 7^2 = 4 + 9 + 4 + 49 = 66$

no es feliz, luego 2327 tampoco lo es.

Antonio B.

El 44 es un número feliz.

A un número de dos o más cifras se le considera feliz cuando la suma del cuadrado de cada una de sus cifras da un número al cual aplicamos la misma fórmula y así sucesivamente hasta que de el número final 1.

Como ejemplo más sencillo diremos que el 10, 100, 1000 etc. son números felices ya que la suma del cuadrado de sus cifras es 1 por eso diremos como primera ley que todo número que sea un 1 seguido de los ceros que se quiera es un número feliz.

Deducimos así que números felices hay infinitos pero no sólo de múltiplos de 10 elevado a h sino que con esto deducimos una segunda ley que será que cualquier número que de como suma del cuadrado de sus cifras un número que sea un 1 seguido de ceros, será número feliz.

Ejem.

$94111 \Rightarrow 9^2 + 4^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 100 \Rightarrow 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1$

$564331 \Rightarrow 5^2 + 6^2 + 4^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 = 100 \Rightarrow 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1$

$103 \Rightarrow 1^2 + 0^2 + 3^2 = 10 \Rightarrow 1^2 + 0^2 = 1$

$99999986 \Rightarrow 9^2 + 9^2 + 9^2 + 9^2 + 9^2 + 8^2 + 6^2 = 1000 \Rightarrow 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 = 1$

Número super feliz es:

99999999999999999999999 y 100 nueves más y seguidamente 61 $\Rightarrow 9^2 + 9^2$ etc. .... $= 10000 \Rightarrow 1$

Si se atreve y tiene tiempo compruébelo.

Otra conclusión a la que podemos llegar es que es también número feliz aquel al cual aplicando la fórmula acostumbrada nos da un número que a su vez nos da un número que sea 10^n y así seguidamente.

Ejem. $622 \Rightarrow 44 \Rightarrow 32 \Rightarrow 13 \Rightarrow 10 \Rightarrow 1$

Y como última conclusión diré que para sacar más números felices podemos cambiar y revolver el orden de las cifras ya que hay un dicho que dice «El orden de los sumandos no altera la suma».

Es lo mismo poner 94111 que 104119 o 41911 etc. Si nos ponemos en este plan no dejamos de hacer números felices hasta el día del juicio final

$94111 \Rightarrow 100 \Rightarrow 1$

$104119 \Rightarrow 100 \Rightarrow 1$

$41911 \Rightarrow 100 \Rightarrow 1$

Y terminando con los números felices yo diré que también soy feliz porque mi cuadrado da 1 y porque por fin lo he sacado.

La lectura de los 30 trabajos permite observar una gradación de dificultades —y de éxitos— en la investigación:

- La etapa empírica (ver si tal y tal otro número son o no felices).

Buena parte de los alumnos no pasa de esta etapa.

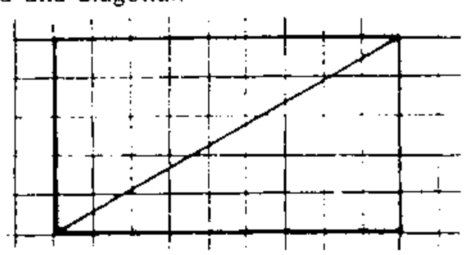
- El descubrimiento de leyes generales: ceros intercalados, permutaciones de las cifras,...

Pero este descubrimiento es sólo una parte dentro de la investigación porque hay que advertir la necesidad de considerar todos los casos, o dicho de otro modo, encontrar

- La manera de generar números felices. El hallazgo de un método: 'comenzar desde el final' como forma de salir de lo empírico (a partir del 1 llego al 10, del 10 llego al 13 o al 31 —y al 310 y al 103...— del 103 llego al...); (a partir del 1 llego al 100 o al 1000...)
- El sacar partido de circunstancias fortuitas: el hecho imprevisto y chocante —señalado solmaente por un alumno— de que si no se llega al 1 se llega al 4. (No estaría bien ignorar que este alumno, Emilio, tenía un rendimiento 'académico' por debajo de la media.)
- La escritura final de los resultados. En la que se advierte en no pocos casos una destreza completamente inhabitual en las situaciones que hemos llamado de pensamiento reproductivo.

Quizás le agrade al lector participar como un personaje más en una tercera historia. Basta con que dedique un poco de su tiempo (algunos alumnos de 3° han dedicado mucho) a este problema:

«En un papel cuadriculado se toma un rectángulo con sus vértices situados en puntos del retículo.
Se traza una diagonal.



¿A cuántos cuadrados unidad corta esa diagonal?

Generaliza. Demuestra.»

Seguramente tendrá ocasión de comprobar que gran parte de las dificultades y de las recompensas que halle al resolverlo serán muy semejantes a las que tienen los alumnos.

No exagera Dienes cuando afirma que la enseñanza de las matemáticas tal como suele hacerse no mejora ninguna parte de la mente, excepto posiblemente la memoria, porque ni la inventiva, ni la investigación, ni la imaginación están presentes en su aprendizaje habitual.

De ahí que el fracaso escolar no es sólo el de los que suspenden los exámenes, sino también el de los que los aprueban. Y yo no veo que se pueda despegar hacia el éxito más que desde dos puntos de partida que se apoyan mútuamente: I) las matemáticas son un modo de conocer y no un modo de observar lo que otros conocen; II) lo que pueda haber de estimulante en la labor de un profesor proviene menos de su pasión por enseñar que de su pasión por aprender, menos de su habilidad para impartir conocimientos que de su capacidad para subordinar éstos a la *actividad cognoscitiva* de sus alumnos.

Bellas palabras tiene Caleb Gattegno ('Mathematics Teaching', n° 100, Septiembre de 1982) para convocar a esa tarea:

«EL futuro exigirá más y más implicación en el estudio del aprendizaje por parte de todos aquellos que aprenden (entre los cuales se incluyen los profesores), de modo que la enseñanza pueda ser desarrollada como la ayuda que las viejas generaciones ofrezcan a las más jóvenes con objeto de favorecer la evolución humana sobre la tierra. No hay ningún otro significado para la educación. Hacer cualquier otra cosa es perder el tiempo.

¿Deseas tú, querido lector, hacer realmente eso?»