

# EL APRENDIZAJE DE LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DE PLANTEO ALGEBRAICO\*

GASCON PEREZ, J.  
Grup Aresta. Barcelona

\* Este trabajo forma parte de una investigación más amplia que el Grupo Aresta está llevando a cabo con el soporte del I.C.E. de la Universidad de Barcelona.

---

## SUMMARY

Our purpose in this paper is to identify the *most relevant cognitive factors of the traineeship in the algebraic problem solving* when the traineeship is reached through specific Didactics applicable in the class-room. *Didactics* have been experienced during the academic year 83/84 with 300 students in their first year. They essentially consist on a conjunct of strategies which are intended to make possible the assimilation of a *general resolvent method* which may be represented through a structured set of heuristics. Some previous knowledge and *four «primary abilities»* have been obtained among the most explicative cognitive factors. The interpretation of these abilities under the intelligence pattern of J.P. Guilford has given us a *founded criterion* to elaborate introductory didactic materials and make corrections on Didactics.

---

## 1. INTRODUCCION

### 1.1. La investigación del aprendizaje en el aula

En la investigación del aprendizaje que tiene lugar en el aula deberían tenerse en cuenta múltiples factores. Entre las posibles clasificaciones de estos factores, Ausubel (1982) da una que nos parece especialmente clarificadora y que, ligeramente modificada en los detalles, es la siguiente:

- (a) *Factores intrapersonales* (internos del alumno)
- (b) *Factores situacionales* (de la situación del alumno)

Entre los primeros cabe destacar: los *factores cognitivos* (estructura y nivel de los conocimientos y de las capacidades intelectuales previas), los *factores motivacionales y actitudinales* (el deseo de saber, la necesidad de logro y de autosuperación y la involucración del yo) y los *factores de personalidad*.

Entre los factores situacionales se citan: la *metodología didáctica* (planificación del curriculum y diseño de la instrucción), los *factores de grupo y sociales* (la atmósfera de aula, la cooperación y la competencia, la estratificación social, etc.) y las *características del profesor* (capacidades cognitivas, conocimiento de la materia, competencia pedagógica, personalidad y conducta).

Como dice Gagné (1967) cualquier investigación del aprendizaje consiste en hallar las relaciones que deben darse entre factores internos y externos para obtener un cambio de rendimiento. De ahí que, ante la evidente disparidad de los factores intrapersonales en el aula, quepa preguntarse: ¿cuál es la incidencia efectiva de dichos factores sobre un aprendizaje concreto al fijar (en la medida de lo posible) los factores situacionales? Y sobre todo ¿qué consecuencias se pueden extraer del conocimiento de los factores intrapersonales más relevantes en un aprendizaje, de cara a modificar los factores situacionales para que interactúen en grado óptimo con los factores internos?

Estas son preguntas demasiado ambiciosas que no pueden ser respondidas en toda su generalidad.

Aquí sólo estudiaremos la incidencia de algunos factores cognitivos (en los dos sentidos mencionados) sobre el rendimiento en el aprendizaje de los métodos de resolución de una clase concreta de problemas, una vez fijada la metodología didáctica y controladas algunas otras variables situacionales.

Nos interesamos, en particular, por los criterios de modificación de la metodología didáctica (en el sentido

de mejorar su eficacia) que pueden extraerse del conocimiento e interpretación de dichos factores.

## 1.2. La resolución de problemas

G. Polya (1965) ha mostrado que, en general, la actividad de resolver problemas puede analizarse en cuatro fases y que, dentro de cada una de ellas es posible dar sugerencias válidas y más o menos útiles para toda clase de problemas.

Nuestra opinión es que, en las condiciones de aprendizaje del aula, es más útil restringir la clase de problemas a fin de poder dar indicaciones más concretas y específicas capaces de guiar la conducta de la mayoría de los alumnos delante del problema.

Asimismo pensamos que el objetivo fundamental del aprendizaje de la resolución de problemas radica en la asimilación y puesta en práctica de *métodos generales (transferibles no de forma mecánica o algorítmica)*, lo cual obliga a considerar clases de problemas suficientemente amplias o abiertas.

Los criterios para resolver este dilema y determinar cuál debe ser la amplitud más adecuada de una clase de problemas cuyo aprendizaje se quiere potenciar, deberán fundarse en el conocimiento de los correspondientes procesos de resolución (1).

Entre tanto nos vemos obligados a partir de una «directriz» (conjunto estructurado de indicaciones o «heurísticas») que constituye un modelo del método general que pretendemos que el alumno asimile. Una directriz determina a su vez, con bastante precisión, la amplitud de la clase de problemas que, en consecuencia, dependerá de las modificaciones sucesivas de la directriz.

Para diseñar una directriz es fundamental el análisis empírico de la actividad de resolución tal como indica Landa (1972). Utilizaremos también la particularización de algunas de las heurísticas que se dan en Polya (1965 y 1967) (2).

## 2. PROPOSITO

Este trabajo pretende contribuir a la investigación del aprendizaje en el aula de la resolución de problemas de planteo algebraico mediante:

1. La exposición de una Didáctica específica, el análisis e interpretación de los resultados obtenidos con ella y la definición de diferentes índices para cuantificar su eficacia.
2. La obtención de criterios fundados para modificar la Didáctica en el sentido de mejorar su eficacia.

En cuanto a la exposición de la Didáctica hay que decir que sólo detallaremos el contenido, la metodología y los procedimientos internos de evaluación, en la me-

didáctica en que sea útil para futuras contrastaciones con otras didácticas entre las que no se excluyen versiones más afinadas de ésta (3).

## 3. RESUMEN DE LA DIDACTICA

### 3.1. Objetivo

El objetivo fundamental de esta Didáctica consiste en que el alumno mejore efectivamente su rendimiento en la resolución de una cierta clase de problemas mediante la *asimilación de un método general*.

### 3.2. Contenido y prerequisites

Aunque algunos aspectos de este método pueden ser útiles en el aprendizaje de la resolución de otras clases de problemas, aquí nos limitaremos a aquellos (4) cuya dificultad esencial radica en la *traducción del enunciado al lenguaje algebraico* y sólo requieren los siguientes conocimientos matemáticos previos:

- (a) el cálculo aritmético elemental
- (b) la resolución de ecuaciones y sistemas (2x2) de primer y segundo grado
- (c) la geometría elemental del triángulo y del cuadrilátero.

### 3.3. Metodología didáctica

Al diseñar la instrucción se han distinguido cuatro etapas (5):

#### 3.3.1. Etapas de evaluación

Son dos etapas paralelas, cronológicamente la primera y la cuarta, cada una de las cuales ocupa dos sesiones. En ellas se pretende medir, mediante puntajes diversos (ver apartado 4), los rendimientos inicial y final en la resolución de esta clase de problemas. El alumno intenta resolver los problemas del pretest en la primera etapa y los del postest en la cuarta (ver Apéndice I).

#### 3.3.2. Etapa de ejemplificación

Se desarrolla durante tres sesiones. En ella el profesor muestra, *razonando en voz alta* y mientras resuelve una serie de seis problemas cuidadosamente elegidos, cuáles son las preguntas y sugerencias más útiles para recorrer las cuatro fases del proceso de resolución de esta clase de problemas. De esta forma se va obteniendo una lista estructurada de heurísticas lo bastante concretas para ser utilizadas directamente y suficientemente transferibles como para cristalizar posteriormente en un sistema de reglas que puede considerarse como un primer modelo de método general de resolución (ver Apéndice II).

#### 3.3.3. Etapa de entrenamiento

Se prolonga durante un periodo máximo de quince se-

siones. En ella los alumnos deben ejercitarse en el uso de la directriz resolviendo un mínimo de diez problemas.

Como que lo que se persigue es que el alumno llegue a interiorizar el método general, la actuación del profesor ante una dificultad de un alumno debe limitarse a ponerle de manifiesto qué punto de la directriz se ha descuidado, empleando para ello el *método de interrogación progresiva*.

Este método, descrito en Polya (1965), consiste en proponer *preguntas naturales* (que se le hubiesen podido ocurrir espontáneamente al propio alumno) e «*instructivas*» (transferibles a todos los problemas de la clase considerada). La primera condición presupone conocer la distancia a la que el alumno se encuentra de la solución (individualización) y la segunda debe apoyarse en un modelo de resolución como el citado (ver Apéndice II) (6).

Los problemas se van proponiendo a cada alumno respetando su ritmo individual de trabajo y manteniendo, al igual que en la etapa de ejemplificación, el *principio de variación del contenido* propuesto por Landa (1972). Esto significa que durante dichas etapas intermedias deben utilizarse problemas de contenido diferente al de los utilizados en las etapas de evaluación.

**3.4. Procedimientos internos de evaluación. Índices de eficacia**

En la cuarta etapa se obtienen para cada alumno cuatro puntajes correspondientes respectivamente a las cuatro fases de resolución: Comprensión del enunciado, Planteo, Resolución y Evaluación. Tenemos así cuatro *variables de rendimiento final* que denotaremos respectivamente CF, PF, RF, y EF cuyos valores están comprendidos entre 0 y 16 puesto que los puntajes po-

sibles son 0, 1 o 2 para cada una de las fases de cada uno de los 8 problemas del postest.

Se define también la variable de *rendimiento global final* (GF) como la suma de las cuatro anteriores, tomando valores de 0 a 64.

Como sólo tiene sentido definir dos *variables de rendimiento inicial*, Planteo (PI) y Resolución (RI), únicamente podremos obtener índices de eficacia de la Didáctica (*cuantificadores del progreso obtenido*) para esos dos aspectos del aprendizaje.

Además del *índice de ganancia*  $I1 = F - I$  utilizado algunas veces, pueden definirse diferentes modificaciones de éste como por ejemplo:

$$I2 = \frac{F^2 - I^2}{F} \quad \text{y} \quad I3 = \frac{F - I}{\text{Max.} - I} \quad (7)$$

Estos índices, entendidos como variables asociadas a la Didáctica, pueden tener alguna utilidad en la interpretación de los resultados de la misma, pero su auténtica finalidad estará en servir, una vez interpretados, como *contrastadores de diferentes didácticas comparables*.

**4. RESULTADOS**

Durante el curso 83/84 se ha aplicado esta Didáctica a más de 300 alumnos (8 grupos) de primero de B.U.P. en tres I.N.Bs. de Barcelona y dentro del horario normal de clase. Un resumen de las variables de rendimiento obtenidas, así como los valores medios de dos índices de eficacia, figuran en las Tablas 1 y 2.

	Máxima	Media	Niveles de rendimiento				
			Muy bajo	Bajo	Medio	Alto	Muy alto
			0 - 3	4-6	7-9	10-12	13-16
CF	16	9,90	6,8	20,7	15,5	24,2	32,8
PF	16	8,16	12,5	28,6	15,9	27,2	15,8
RF	16	6,07	27,9	32,1	19,2	12,5	8,3
EF	16	5,06	38,9	32	15,9	6,4	6,8
			0-14	15-26	27-38	39-50	51-64
GF	64	29,18	18,1	28,3	26,1	18,1	9,4

Tabla 1: Distribución porcentual por niveles de las variables de rendimiento final.

	Planteo	Resolución
I1	5,21	3,64
I2	6,65	4,67

$$I1 = F - I$$

$$I2 = \frac{F^2 - I^2}{F}$$

Tabla 2: Valores medios de los índices.  
 F = valor final de la correspondiente variable  
 I = valor inicial

No pretendemos dar una valoración absoluta de estos resultados. Analizaremos simplemente algunos de sus aspectos más relevantes:

(a) En la distribución por niveles de rendimiento (tabla 1) de las 5 variables finales se observa una excesiva concentración en el nivel que hemos llamado «bajo». Esto es especialmente marcado en las variables relativas a las dos últimas fases de resolución (RF y EF) en las que se tiene, además, un excesivo porcentaje de alumnos con rendimiento «muy bajo». Este fenómeno se explica por la acumulación de dificultades en las últimas fases (un alumno no puede «resolver» correctamente, por ejemplo, un problema que no haya «comprendido» y «planteado» previamente).

Todas estas anomalías quedan muy suavizadas en la variable de «rendimiento global» que es la más representativa del rendimiento global de la Didáctica.

(b) En las dos primeras variables (CF y PF), únicas en las que no inciden directamente los conocimientos previos aritméticos y algebraicos, se observa un fenómeno interesante: el porcentaje de alumnos con rendimiento alto (24, 2 y 27, 2 respectivamente) es muy superior al de alumnos con rendimiento medio (15,5 y 15,9) lo que parece indicar un rasgo común de aprendizaje todo/nada para esas fases.

(c) Se constata una caída bastante regular de los rendimientos medios (9,90 — 8,16 — 6,7 — 5,06) a medida que avanzan las fases.

(c<sub>1</sub>) Se pasa de «comprender» casi 5 de los 8 problemas (medida CF = 9,90) a plantear sólo algo más de 4 problemas por término medio (media PF = 8,16). Hay que destacar que ni siquiera los alumnos con alto nivel de comprensión (32,8 %) mantienen ese nivel en el planteo (alumnos con alto nivel de planteo 15,8 %).

(c<sub>2</sub>) La caída de la media de 8,16 en PF a la de 6,07 en RF es aún más llamativa. Significa que, por término medio, cada alumno se equivoca en la resolución de más de 1 problema de los 4 que había planteado correctamente. Este hecho constata dificultades excesivas

en la resolución de sistemas de ecuaciones a las que no son ajenos los alumnos con niveles superiores (alto y muy alto) de rendimiento en el planteo (ver tabla 1).

(c<sub>3</sub>) La tabla muestra que sólo los alumnos con rendimiento muy alto en resolución son capaces de mantener, globalmente, el mismo nivel de rendimiento en la fase de evaluación.

(d) La interpretación de los valores medios del primer índice es obvia (ver tabla 2), pero este índice es poco adecuado para cuantificar el progreso obtenido por cuanto no distingue entre los diferentes niveles iniciales.

(e) El índice I2 de planteo es el mejor indicador (de los calculados) para valorar globalmente la eficacia de nuestra didáctica, ya que el I2 de resolución está contaminado por la incidencia directa de los conocimientos algebraicos previos. Su valor medio de 6,65 permite enunciar un progreso muy apreciable (a falta de valoraciones más cuantificables) en el planteo algebraico. En efecto, podemos decir que los alumnos avanzan, por término medio, dos niveles si se encuentran inicialmente en el nivel muy bajo y uno si parten de los niveles bajo, medio o alto.

## 5. CRITERIOS INTERNOS DE MODIFICACION DE LA DIDACTICA

Son los que se desprenden de la experiencia misma y que se han ido obteniendo a lo largo de ella y en la reflexión posterior.

### 5.1. Modificaciones de la directriz

Habría que integrar en la directriz heurísticas que se han mostrado muy útiles durante la etapa de entrenamiento:

- «Razona sobre la figura geométrica para buscar las condiciones»
- «Una incógnita debe ser siempre una magnitud (medible)»

- «Cada incógnita debe aparecer, por lo menos, en una condición»
- «Una condición muy sencilla permite disminuir el número de incógnitas y de ecuaciones»
- «Para escribir en lenguaje algebraico una condición debes utilizar *únicamente* los símbolos que has asignado a las incógnitas»

Paralelamente se ha visto la necesidad de simplificar globalmente y hacer más operativa la directriz. Esto podría conseguirse desdoblándola en dos partes, en la primera de las cuales (que sería propiamente la nueva directriz) figurase una versión muy directa y estructurada de las heurísticas más útiles, reservándose la segunda para las explicaciones necesarias para comprender y usar correctamente la directriz.

Por último se ha puesto de manifiesto la insuficiencia y poca operatividad de las heurísticas dadas en la primera fase para ayudar a comprender el enunciado y a reformularlo en vista a su posterior traducción al lenguaje algebraico. Una mejora del rendimiento en esta primera fase arrastraría presumiblemente (cf. punto (c) de los resultados) un aumento del rendimiento global.

## 5.2. Modificaciones tendentes a individualizar el entrenamiento

Son difíciles de llevar a la práctica porque topan frontalmente con la masificación del aprendizaje en el aula. Mientras no sea posible reducir apreciablemente el número de alumnos por aula, será muy difícil intensificar la relación profesor-alumno que constituye la clave de la individualización de esta etapa de la didáctica. A pesar de todo, deberían intentarse las siguientes modificaciones:

- (a) Controlar el trabajo que van realizando diariamente los alumnos y reforzar la influencia individualizada mediante notas personales que pongan el acento en el punto de la directriz que el alumno ha descuidado en cada caso.
- (b) Dedicar sesiones periódicas especiales a los alumnos con más dificultades (cf. punto (a) de los resultados).
- (c) Potenciar la posibilidad de que todo alumno plantee por sí mismo algún problema (aunque sea muy sencillo) como base para desarrollar en él la motivación intrínseca y para utilizar la naturaleza en parte discontinua de este aprendizaje (cf. punto (b) de los resultados).
- (d) Desarrollar una Pre-didáctica de cálculo algebraico que tenga en cuenta los diferentes niveles de cálculo aritmético por una parte y las necesidades de la resolución de problemas por otra (cf. punto (c<sub>2</sub>) de los resultados).

## 6. ALGUNOS FACTORES QUE INTERVIENEN EN ESTE APRENDIZAJE

Siguiendo a Guilford (1968) consideramos que la «*capacidad para aprender*» (lo mismo que la «*inteligencia*») comprende muchas aptitudes distintas dependientes de lo que se deba aprender, y que a su vez dichas aptitudes pueden analizarse en componentes o «*habilidades primarias*» que se interpretan dentro del modelo de la Estructura de la Inteligencia (EI) del mismo autor.

Como hemos dicho en la introducción analizaremos la incidencia de dos tipos de factores cognitivos: la capacidad intelectual (concretamente de algunas habilidades primarias) y los conocimientos previos (esencialmente aritméticos y algebraicos) sobre las variables de rendimiento final.

### 6.1. Habilidades primarias

Tomando como referencia trabajos anteriores de Guilford y sus colaboradores (8), hemos elaborado 30 pruebas para medir algunas habilidades primarias del modelo EI que se han mostrado relevantes en el aprendizaje de la Aritmética y el Algebra en niveles similares a nuestro primero de B.U.P.

Mediante las técnicas del análisis factorial se han extraído 9 factores o componentes principales que hemos interpretado como sigue dentro del modelo EI (9):

- CsS : Convergencia de sistemas simbólicos
- RrS : Reconocimiento de relaciones simbólicas
- ErS : Evaluación de relaciones simbólicas
- CsS : Convergencia de sistemas semánticos
- RuS : Reconocimiento de unidades semánticas
- DrS : Divergencia de relaciones simbólicas
- MiS : Memorización de implicaciones simbólicas
- EiS : Evaluación de implicaciones simbólicas
- EsS : Evaluación de sistemas simbólicos.

Estos factores explican globalmente cerca del 60 % de la variabilidad total. Su capacidad explicativa respecto de las variables de rendimiento final viene sintetizada en la Tabla 3.

Analizamos a continuación algunos aspectos de estos resultados:

- (a) Se destacan dos factores, CsS y ErS (10), especialmente importantes en este aprendizaje. Juntos explican aproximadamente el 25 % de la variabilidad del rendimiento final.

El primero, CsS, confirma la hipótesis de Guilford (cf. Guilford (1977) pag. 389) de que este factor es esencial en la capacidad de plantear sistemas de ecuaciones.

El segundo, ErS, pone de manifiesto un aspecto menos considerado en la didáctica y, hasta cierto punto, sorprendente: es la relevancia, al mismo nivel que CsS, de una aptitud de evaluación dentro de este aprendizaje.

	Multiple		CsS	ErS	DrS	RrS	CsS	EiS	F
	R	R <sup>2</sup>							
CF	0,62	0,38	12,5	12,3	9	2,8	-	-	29,5
PF	0,57	0,33	10	10	5	5	2,5	-	23,4
RF	0,58	0,34	10	9	5	3,2	-	-	15,2
EF	0,58	0,34	10	12	2,5	3	-	2,4	15,2
GF	0,63	0,39	12,4	12,5	6,1	4	-	-	22,1

Tabla 3: Habilidades primarias más explicativas. Sólo se indican las que incrementan el valor de R<sup>2</sup> en más del 2%. F es significativo a un nivel de 0,05.

(b) La incidencia del factor DrS (11) decrece sensiblemente a lo largo de las fases hasta llegar a una participación mínima en la fase de evaluación. Esto indica que si bien hay que estimular la producción divergente de cara a la comprensión del enunciado (lo que comporta una relajación relativa de la actividad de evaluación) estamos ante una clase de problemas para cuyo aprendizaje hay que desarrollar más el pensamiento crítico o de evaluación que el divergente o «creativo».

(c) El factor RsS tiene una contribución más modesta y bastante similar en todas las fases. Por su naturaleza podría interpretarse como una capacidad de apoyo para la divergencia primero y la evaluación después del mismo producto (relaciones) y la misma categoría de contenido (simbólico). (12).

(d) El análisis de los resultados de la didáctica (cf. apartado (c<sub>1</sub>)) había sugerido la existencia de factores nuevos en la fase de planteo respecto de la fase de comprensión (que se había definido como *la posibilidad de escribir correctamente las incógnitas y las condiciones*). El único factor nuevo que aparece en la tabla 3 es CsS que no es suficientemente explicativo para dar cuenta de la caída de rendimiento detectada. Sugerimos la hipótesis de la relevancia de otros factores semánticos que no hemos considerado aquí.

## 6.2. Conocimientos previos y algunas variables situacionales

Se han considerado además de PI y RI (variables de rendimiento inicial en planteo y resolución) las siguientes variables:

K : prueba de cálculo algebraico

NP : número de problemas resueltos durante la etapa de entrenamiento

TC : técnicas de cálculo aritmético a principio de curso

DE : detección de errores aritméticos a principio de curso

Como variables situacionales se han introducido: sexo, situación de paro del cabeza de familia y condición de repetidor de primero de B.U.P.

El incremento de la variabilidad explicada al añadir estas variables a los 9 factores anteriores ha sido apreciable (ver tabla 4). Analizando más a fondo estos resultados (9) se observa que de entre estas nuevas variables la que incide más significativamente es K seguida de NP, PI y TC lo cual tiene relación con el hecho de que sea en la fase de resolución en la que el incremento de variabilidad explicada es máximo.

	Múltiple		$\Delta R^2$	F
	R	$R^2$		
CP	0,78	0,61	0,23	17,6
PF	0,75	0,56	0,23	14,4
RF	0,79	0,62	0,28	18
BF	0,77	0,60	0,26	16,4
GF	0,81	0,66	0,27	22,1

Tabla 4: Coeficientes de correlación múltiple obtenidos al añadir las variables de conocimientos previos.

F es significativo a un nivel de 0,05.

### 6.3. Criterios externos de modificación de la didáctica

De los dos puntos anteriores pueden extraerse algunos criterios fundados que, armonizados con los criterios internos antes citados, permitirán modificar adecuadamente la didáctica.

(a) Aceptando la hipótesis, fuertemente apoyada por pruebas experimentales (cf. Guilford (1977) pag. 556), de que el desarrollo de las habilidades intelectuales, como el desarrollo de cualquier clase de habilidad, depende de la práctica, concluimos en nuestro caso la necesidad de elaborar un sistema de ejercicios apropiados (Pre-didáctica) para desarrollar especialmente los factores CsS y ErS y, en segundo lugar, DrS y RrS. Este entrenamiento puede ser realizado en forma de ejercicios formales pero no debe limitarse a ellos.

(b) A la vista de la importancia relativa de una aptitud de evaluación en todas las fases de resolución, parece adecuado modificar la directriz en el sentido de acentuar las heurísticas destinadas a motivar los procesos evaluadores, intercalándolas a lo largo de toda la directriz y, sintetizándola en la última fase.

(c) Mientras no se detecten los nuevo factores que inciden en el planteo (cf. apartado (d) del punto 1.) parece razonable buscar heurísticas específicas que ayuden al alumno a escribir las condiciones y a realizar el salto de una condición correctamente escrita a su traducción al lenguaje algebraico. Apuntamos aquí la posibilidad de que dichas heurísticas deban tener en cuenta las relaciones entre la estructura superficial de la oración y la estructura profunda superficial subyacente (ver Chomsky (1980)).

(d) La importante contribución de las variables K y NP confirma la necesidad de modificaciones ya intuidas an-

teriormente (importancia de la elaboración de una Pre-didáctica de cálculo algebraico y de la individualización de la etapa de entrenamiento).

### 7. CONCLUSIONES Y COMENTARIO FINAL

1. Por lo que respecta a la Didáctica, destacaremos dos aspectos:

El primero puede resumirse diciendo que *el objetivo más específico de esta Didáctica (mejora en el planteo) ha sido alcanzado en un grado muy apreciable, especialmente si tenemos en cuenta que se ha conseguido mediante la asimilación de un método general de resolución.*

Por otra parte, y paralelamente al desarrollo de la Didáctica, se ha ido observando un incremento de la *motivación intrínseca* (interés por resolver problemas cada vez más difíciles como fin en sí mismo) en la mayoría de los alumnos, exceptuándose solamente los que no han obtenido ningún éxito en la etapa de entrenamiento.

Aunque este aspecto no ha sido cuantificado, creemos que se ha puesto de manifiesto la relevancia de este factor motivacional como potenciador del aprendizaje. Nos proponemos valorar su incidencia efectiva en futuras investigaciones.

2. Podemos afirmar que *los factores cognitivos considerados son realmente esenciales en este aprendizaje*, como se desprende del valor (0.81) del coeficiente de correlación múltiple obtenido en la explicación de la variable GF de rendimiento global.

El análisis de la incidencia relativa de algunas habilidades primarias en cada una de las fases de resolución,

nos permite dar algunas sugerencias relativas a la estructura de los procesos involucrados en este aprendizaje:

- *Las relaciones y los sistemas simbólicos* tienen un peso muy importante en el contenido de este aprendizaje.
- El *pensamiento «crítico» o de evaluación* es más importante que el *pensamiento divergente o «creativo»* en todas las fases.
- La incidencia del pensamiento divergente es, además decreciente a lo largo de las fases.
- Se confirma la relevancia, enunciada por Guilford, de un aspecto del *pensamiento convergente o «lógico»* (CsS) en todas las fases.
- Se ha puesto de manifiesto la necesidad de considerar *otros factores*, posiblemente *de tipo semántico*, para explicar más adecuadamente la comprensión del enunciado y el salto entre ésta y el planteo efectivo del problema.

3. La confluencia de los diferentes criterios que han ido surgiendo de la experiencia didáctica y del análisis de los factores más relevantes en este aprendizaje, nos permitirá, por una parte, realizar *correcciones pertinentes de la Didáctica* y, por otra, elaborar *materiales preparatorios (Pre-didácticas)* adecuados.

Queremos resaltar una vez más el *carácter esencialmente modificable de esta Didáctica* del que no podemos prescindir sin perder totalmente el sentido de esta investigación.

4. La importancia de la enseñanza de los métodos de resolución de esta clase de problemas ha sido subrayada por Polya (13), centrándose específicamente en la fase de planteo. La mejora de esta enseñanza requerirá seguir profundizando en la investigación de su aprendizaje en el aula para acabar de perfilar los factores cognitivos que intervienen (14) y tomar en consideración otros factores situacionales y de motivación.

Otra línea de investigación consiste en trabajar en el «laboratorio» tomando poblaciones muy reducidas de alumnos (véase, por ejemplo, Schoenfeld (1979 y 1982)) lo que posibilita un mayor control del aprendizaje, pero los resultados así obtenidos no serán transferibles, por lo menos directamente, al ámbito del aula.

## APENDICE I : POSTEST

1. Repartir 1875 pesetas entre tres personas, de modo que la primera reciba 19 pesetas más que la segunda y ésta 23 pesetas menos que la tercera.
2. El área de un campo rectangular aumentaría 88 m<sup>2</sup> si se añadiesen 2 metros a cada lado. Sabiendo que la razón de los lados es 5/9, calcula las dimensiones del campo.
3. Al restarle 99 unidades a un número se obtiene otro

número cuya raíz cuadrada positiva es solo 3 unidades menor que la raíz cuadrada positiva del primero. Halla este número.

4. Calcula el perímetro de un triángulo rectángulo de 216 cm<sup>2</sup> de área, sabiendo que un cateto es 6 cm menor que el otro.
5. En un garaje, después de desmontar coches y motos, se cuentan 90 motores y 326 ruedas en total. ¿Cuántos vehículos había de cada clase?
6. Calcula las bases de un trapecio que están en la razón de 2/3, sabiendo que la altura es de 5 metros y el área de 125 m<sup>2</sup>.
7. En un pueblo hay 220 personas entre hombres y mujeres. Sabiendo que el 78% de los hombres forman pareja con el 65% de las mujeres, calcula cuántas personas hay de cada sexo.
8. Busca una fracción tal que si sumamos una unidad a ambos términos, la que resulta es equivalente a la mitad de su inversa; pero si restamos una unidad a ambos términos, la que resulta es equivalente a 1/2.

## APENDICE II : DIRECTRIZ

### Primera Fase: Lectura y comprensión del enunciado

1. Empieza realizando una primera lectura de *toma de contacto con el problema*. Asegúrate de que entiendes todas las *expresiones significativas del enunciado*.
2. *En la segunda lectura debes buscar la estructura global del problema*. Habrás captado dicha estructura cuando sepas:
  - (a) *qué es lo que el problema pide*.
  - (b) *qué magnitudes relaciona cada condición*, entendiendo por condición la relación entre dos magnitudes de la misma especie en una de las cuales interviene una incógnita y en la otra un dato u otra incógnita.
3. En la tercera lectura debes  *fijarte en los detalles y escribir*:
  - (a) cada una de las *incógnitas*, asignándole un símbolo.
  - (b) cada una de las *condiciones*, numerándolas.
4. Si hay alguna *figura geométrica* relacionada con el problema, *dibújala*.
5. *Destaca* en dicha figura los *datos e incógnitas* que aparecen.
6. Debes haber obtenido *tantas condiciones como incógnitas*. En caso contrario:
  - (a) Si falta una condición debes buscar un teorema, ley o fórmula en el que intervengan alguna incógnita (*condición implícita*). Son usuales en los problemas de geometría.



(b) Si falta una incógnita, debes utilizar como tal alguna magnitud que aparece en alguna condición y cuyo valor, desconocido, no es pedido por el problema (*incógnita implícita*).

**Segunda Fase: Análisis de las condiciones y planteo del problema**

7. Si has llegado hasta aquí, entiendes el problema; pero es inútil que sigas adelante si no *deseas firmemente resolverlo*.
8. *Descompón cada condición en partes significativas simples* que sean directamente traducibles al lenguaje algebraico. Utiliza para ello los símbolos que representan a las incógnitas.
9. Si una condición no se puede traducir literalmente, *reformúlala en forma adecuada* hasta conseguir traducirla al lenguaje algebraico.
10. Para traducir globalmente una condición al lenguaje algebraico debes escribir una *igualdad entre dos formas diferentes de expresar una misma cantidad*. Así *obtendrás una ecuación*.
11. Sin mirar el enunciado, traduce cada ecuación del lenguaje algebraico al castellano (*traducción inversa*), utilizando el significado de las incógnitas.

**Tercera Fase: Resolución de las Ecuaciones planteadas**

12. Al realizar los cálculos, *escribe cada una de las transformaciones* que realices. Así podrás repasarlas después.
13. Comprueba que *cada transformación* que realizas puede cambiarse de sentido (*puede leerse de derecha a izquierda*). De esta forma podrás detectar y corregir algunos errores, lo cual es más importante que no cometerlos.

**Cuarta Fase: Evaluación de todo el proceso**

14. *¿Cuántas soluciones* has obtenido?
15. *¿Alguna de las soluciones obtenidas no tiene sentido?* ¿Por qué?
16. Cada solución (o sus componentes) *¿verifica las ecuaciones planteadas?* En caso contrario repasa la tercera fase.
17. Cada solución con sentido *¿cumple las condiciones que el enunciado del problema impone?* De no ser así, te has equivocado en el planteo y debes repasar la segunda fase (puede ser útil empezar por la sugerencia número 11).

**NOTAS**

- (1) Tanto Luria (1981) como Bourne y otros (1976) concluyen, desde puntos de vista muy alejados, que uno de los objetivos fundamentales de la investigación en resolución de problemas es la obtención de una clasificación fundada en el análisis de los procesos de resolución.
- (2) Más adelante detallamos la elaboración de una directriz concreta que se corresponde con una cierta clase de problemas.
- (3) Para realizar dicha contrastación es preciso disponer de otra u otras didácticas igualmente explicitadas y que persiguen los mismos objetivos. No es válido para este fin utilizar un diseño experimental que conste de dos grupos: el «experimental» al cual se le aplica la didáctica explicitada y el «control» al que se le aplica otra didáctica vagamente caracterizada (por ejemplo como «tradicional»). Este tipo de diseño sólo es adecuado (permite interpretar los resultados) cuando lo que se comparan son tratamientos diferentes (valores) de una variable muy simple. Al no disponer por el momento de otras didácticas contrastables, hemos dejado abierto este aspecto de la investigación.
- (4) Ver en el Apéndice I una muestra de los problemas de esta clase.
- (5) Una exposición más detallada del desarrollo de estas etapas y del resto de la didáctica, se encuentra en el proyecto que el Grup Aresta presentó al I.C.E. de la Universidad de Barcelona.
- (6) El profesor debe tender a no sobrepasar, con sus preguntas y sugerencias, el nivel de concreción de las heurísticas que forman la directriz.
- (7) En estas ecuaciones F significa el valor final de la correspondiente variable (ya sea planteo o resolución), I es el valor inicial y Max. el valor máximo de dichas variables que es 16.
- (8) Tomamos como punto de referencia el artículo de Guilford, Hoepfner y Petersen (1965). Ver también Guilford y otros (1962)
- (9) Queremos poner énfasis en el hecho de que esta parte de nuestro trabajo se ha desarrollado necesariamente en una etapa exploratoria por lo que la validez de los resultados obtenidos es, por el momento, puramente empírica. Los detalles del tratamiento estadístico se han adjuntado en la memoria que el Grup Aresta ha presentado al I.C.E. de la Universidad de Barcelona.
- (10) Por CsS entendemos la capacidad de producir o construir estructuras (u organizaciones de partes en interacción) unívocamente determinadas por las condiciones iniciales, formuladas a partir de informaciones del tipo simbólico (números, códigos de letras, etc.). Entendemos por ErS la capacidad de emitir juicios correctos, en base a criterios prefijados, sobre operaciones fundamentales entre números, vínculos de igualdad y desigualdad y, en fin, todo tipo de enlaces o puentes entre conceptos expresados simbólicamente o, incluso, entre grupos de símbolos con un significado arbitrario conocido de antemano.

- (11) Por DrS entendemos la capacidad de generar, a partir de una información previa de tipo simbólico, una diversidad de relaciones cualitativamente diferentes (entendidas éstas como nexos o enlaces en el sentido apuntado en (10)).
- (12) La diferencia entre RrS y ErS radica en el tipo de operación mental realizada; mientras que en la evaluación prevalece la *contrastación* y la posterior elección de la respuesta adecuada, el reconocimiento se identifica con la aptitud para *descubrir* un producto determinado (unidad, clase, sistema, relación, transformación o implicación), conocido previamente, entre varios. Para una ampliación del significado de estos factores véase Guilford (1977).
- (13) «Je crois que je vais choquer certains gens en affirmant que l'objet le plus important de l'enseignement des mathématiques dans les études secondaires est d'apprendre à mettre les problèmes scolaires en équations» Polya (1967), tome 1, p. 66.
- (14) Estamos llevando a cabo un análisis de elementos de las pruebas elaboradas con el fin de eliminar o modificar los ítems que contaminan la estructura. Asimismo revisaremos y modificaremos las condiciones estandarizadas de aplicación y seleccionaremos una escala normalizada. Todos estos trabajos contribuirán a perfilar la composición de los factores cognitivos que pueden extraerse de nuestra batería.

### REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- AUSUBEL, D.P., 1982 *Psicología educativa*. (Trillas, México).
- BOURNE, L.E. y otros, 1976, *Psicología del pensamiento*. (Trillas, México).
- CHOMSKY, N., 1980, *El lenguaje y el entendimiento*. (Seix Barral, Barcelona)
- GAGNÉ, R.M., 1967, Instruction and the conditions of learning. En *Instruction: Some contemporary viewpoints*, pp. 291-313 (L. Siegel, dir.) (Chandler, San Francisco).
- GUILFORD, J.P. y otros, 1962, The role of intellectual factors in problem solving, *Psychological Monographs: General and Applied*, vol 76, No 10, pp. 1-21.
- GUILFORD, J.P., R. Hoepfner y H. Petersen, 1965, Predicting achievement in ninth-grade mathematics from measures of intellectual aptitude factors, *Educational and Psychological Measurement*, vol XXV, No 3, pp. 659-682.
- GUILFORD, J.P., 1977, *La naturaleza de la inteligencia humana*, (Paidós, Buenos Aires).
- LANDA, L.N., 1972 *Cibernética y pedagogía*. (Labor, Barcelona).
- LURIA, A.R. y L.S., Tsvetkova, 1981, *La resolución de problemas y sus trastornos*. (Fontanella, Barcelona).
- POLYA, G., 1965, *Cómo plantear y resolver problemas*. (Trillas, México).
- POLYA, G. 1967, *La découverte des mathématiques*. (Dunod, Paris).
- SCHOENFELD, A.H., 1979, Explicit heuristic training as a variable in problem-solving performance, *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 10, N° 3, pp. 173-187.
- SCHOENFELD, A.H., 1982, Measures of problem-solving performance and problem-solving instruction, *Journal for Research in Mathematics*, vol. 13, n° 1, pp. 31-49.