# HISTORIA

# Y EPISTEMOLOGIA DE LAS CIENCIAS

# LOS ALGORITMOS PARA EL CÁLCULO DE LA RAÍZ CUADRADA Y SUS ANTECEDENTES EN TEXTOS ESCOLARES ANTIGUOS

**NUÑEZ ESPALLARGAS, J. M. y SERVAT SUSAGNE, J.**
**Departamento de Didáctica de les Ciencias Experimentales y de la Matemática.**
**Universidad de Barcelona.**

SUMMARY

First of all, there is an analysis of the historical and scientifical motivations that lead to the inclusion of the usual square root algorithm in mathematics in elementary education, as well as of the textbook that introduced them for the first time in Spain. Secondly we take into account two alternative algorithms for the calculation of square roots proposed by modern didactical literature of mathematics teaching, and show that, in both cases, it is possible to find precedents of their utilization in old elementary textbooks.

## 1. LA INTRODUCCIÓN DEL CÁLCULO DE LA RAÍZ CUADRADA EN LOS TEXTOS DE ENSEÑANZA PRIMARIA

Todo profesor de Matemáticas sabe de la complejidad que encierra para sus alumnos el aprendizaje del algoritmo usual de extracción de la raíz cuadrada. Su fundamentación rigurosa aparece descrita en todos los manuales de Álgebra. Pero, en cualquier caso, esta justificación resulta demasiado engorrosa y difícil para ser presentada al niño y, por lo general, éste se limita a memorizar el proceso sin comprenderlo. Nos preguntamos, entonces, ¿por qué se ha incluido su enseñanza en la escuela? En las páginas que siguen intentaremos responder a esta pregunta aportando algunos datos que ayudan a explicar las razones históricas y científicas que motivaron la introducción de este algoritmo en la enseñanza primaria.

Por lo que se refiere al origen del algoritmo tradicional de extracción de raíces cuadradas, sabemos que es ciertamente remoto, creyendo algunos autores que su invención es debida a los chinos en una época no bien determinada, pero con seguridad anterior a nuestra era (Fernández 1991, Martzloff 1988, pp. 210 y ss.). De todas formas, lo que sí parece sólidamente probado es que los matemáticos europeos aprendieron el algoritmo de los árabes y éstos, a su vez, de los indios (Al-Daffa 1977, pp. 52 y ss.).

El inicio de la «popularización» del algoritmo en ámbitos no estrictamente matemáticos tuvo lugar a fines del siglo XVII a través de obras como la célebre *Arithmétique* de Barreme, que divulgó el procedimiento básicamente en la forma como lo conocemos en la actualidad (Barreme 1764, pp. 216 y ss.). En nuestro país las obras de Barreme tuvieron mucho éxito, siendo traducidas tanto a la lengua castellana como a la catalana, contando en ambas con múltiples ediciones entre mediados del siglo XVIII y bien entrado el XIX. Pero este manual, como su subtítulo expresaba claramente, *Le livre facile pour apprendre l'arithmétique de soi-meme et sans maître*, no iba propiamente dirigido a la enseñanza escolar, sino a comerciantes y otros profesionales autodidactas que necesitaban del cálculo en sus actividades.

Si centramos ahora nuestra atención en el campo de la enseñanza y, más concretamente en la elemental, conviene recordar que, hasta ya iniciado el siglo XIX, en la mayor parte de la Europa católica la educación primaria no era en absoluto obligatoria ni tampoco, por lo general, gratuita, estando casi siempre bajo la tutela de las parroquias, conventos u órdenes religiosas. De un análisis somero de los libros de texto que se conservan de esa época se desprende que, por lo que a la formación matemática se refiere, estas obras pretendían una preparación del escolar que cubriera las necesidades básicas del hombre tipo del Antiguo Régimen, es decir, las de un campesino que debía conocer los rudimentos del cálculo para poder evaluar su producción agrícola y para desenvolverse en un ámbito limitado de relaciones comerciales. Por ello, las enseñanzas se centraban casi exclusivamente en la aritmética, distinguiéndose en ella dos partes bien diferenciadas. La primera dedicada al estudio y a la práctica de las cuatro operaciones básicas con números naturales y, si el tiempo que se iba a dedicar al estudio lo permitía, también con fracciones. La segunda abordaba el aprendizaje del complejo entramado de sistemas de medida y de cambio propios de la región del niño y de las colindantes, así como el cálculo con números «denominados», el cual arrastraba consigo una farragosa casuística. Puede servir de ilustración de la importancia cuantitativa que tenía este último tipo de cálculo en el currículo del escolar un libro de Aritmética de principios del siglo XIX empleado en las Escuelas Pías de Cataluña (Anónimo 1805). De las 260 páginas que lo constituyen, aproximadamente, las 90 primeras están dedicadas a las operaciones con números naturales, las 30 siguientes al cálculo con fracciones y las 140 finales, más de la mitad de la obra, a la descripción y práctica de las operaciones con los números denominados.

En España, la Constitución de 1812 intenta extender la enseñanza elemental a toda la población infantil dándole, además, un carácter público. En su título IX ordena que: «en todos los pueblos del reyno se establezcan escuelas de primeras letras», cuyos programas habían de contener, como disciplinas básicas, «la lectura, la escritura, las cuentas y el catecismo» (Cossio 1897, p. 17). Durante el trienio liberal, el Plan de 1821 concretiza lo dispuesto por la Constitución de Cádiz, especificando que la enseñanza pública sería obligatoria y gratuita, mandando fundar escuelas en los pueblos que llegaran a 100 vecinos y una por cada 500 en las ciudades populosas, recayendo sus gastos de mantenimiento en las arcas de cada municipio. Pero, tanto este Plan como los que siguieron a lo largo del siglo no modificaron esencialmente las operaciones que los niños debían estudiar en la clase de «cuentas». Así, en el Plan de 1838, se define como objetivo de la instrucción primaria, en cuanto a la Matemática se refiere, el «dotar a los alumnos de los conocimientos de las cuatro reglas de contar por números abstractos y denominados» (Vea Muniesa 1986, p. 45). E incluso, en un plan tan tardío como el de 1880, se seguían manteniendo como contenidos matemáticos obligatorios para el examen de ingreso a la segunda enseñanza: «la resolución de operaciones relativas a las cuatro reglas fundamentales de la aritmética» (Real Decreto 1880, p. 15).

De lo dicho hasta ahora se desprende que el estudio de las potencias y raíces era una cuestión que, en la época que consideramos, se contemplaba como propia de otros niveles de la enseñanza distintos del elemental. Por ejemplo, encontramos ese estudio en las diversas *Institutiones philosophicae* o compendios que reunían en una obra única, generalmente de varios volúmenes, los conocimientos filosóficos y científicos indispensables para la formación de seminaristas. En el volumen dedicado a la «mathesis» se estudiaban, entre otras ramas de la Matemática, la «arithmetica generalis sive numeralis» que trataba de las operaciones con números enteros y racionales y la «arithmetica speciosa sive litteralis» que se ocupaba del cálculo literal, es decir, del Álgebra. En todos los casos consultados, la extracción de la raíz cuadrada aparece dentro del Álgebra y, más concretamente, inmediatamente antes del estudio de las ecuaciones de segundo grado. El situar en ese lugar el algoritmo no sólo permitía a los autores aplicarlo a la resolución de ese tipo de ecuaciones, sino que, además, hacía posible razonar y justificar algebraicamente los pasos seguidos en el proceso. La demostración se basa siempre en considerar un número entero bajo su forma de expresión polinómica en potencias de diez y donde los coeficientes son las cifras del número. A continuación, se describe el desarrollo de los cuadrados de estas expresiones polinómicas, procediendo por inducción, es decir, comenzando primero con dos términos, siguiendo luego con tres y generalizando posteriormente a $n$ términos. A partir de estos desarrollos y para hallar su raíz cuadrada se invierte el proceso, pudiéndose deducir, entonces, los pasos seguidos en el algoritmo tradicional. El razonamiento se lleva a cabo de un modo general con letras, aunque, inmediatamente, se aplica a situaciones numéricas concretas (Jacquier 1799, pp. 52

y ss., Guevara 1826, pp. 139 y ss., Amat 1832, pp. 35 y ss.).

El planteamiento que encontramos en los libros de texto propios de la enseñanza en los seminarios eclesiásticos se repite esencialmente en los manuales de Matemáticas dedicados a proporcionar otros tipos de formación especializada. Éste sería el caso, por ejemplo, del manual de Villalpando empleado en las universidades (Villalpando 1778, pp. 30 y ss.) o el del tratado de Bails muy utilizado en las academias militares (Bails 1779, pp. 65 y ss.). Todos ellos en realidad seguían, en mayor o menor medida, modelos extranjeros, generalmente franceses, algunos de los cuales, como el manual de Lacroix (1807, vol. II, pp. 182 y ss.) fueron extensamente divulgados en tierras hispanas a través de diversas traducciones.

En resumen, pues, durante el siglo XVIII y buena parte del XIX el cálculo de la raíz cuadrada era una cuestión no contemplada obligatoriamente en los currículos de la enseñanza primaria, quedando, por lo general, circunscrito únicamente a una formación matemática de nivel «superior» y asociada al Álgebra, lo que permitía, además de su aplicación a la resolución de ecuaciones, justificar el proceso algorítmico seguido. Pero al margen de esta panorámica global encontramos algunos textos, dirigidos unos a determinadas enseñanzas profesionales, y orientados otros simplemente a la instrucción elemental general, en los que, sin tratar el Álgebra, se introduce el cálculo de raíces cuadradas. ¿Qué razones movieron a sus autores a incluir este algoritmo en sus obras? Nos inclinamos a creer que los motivos fueron varios y de diversa índole.

Los hubo de carácter general relacionados con los cambios experimentados durante el siglo XIX por el sistema educativo: la incorporación de gran parte de la población infantil a la enseñanza primaria, la ampliación del número de años dedicados a la formación escolar, la profesionalización del maestro; y, por lo que atañe a las Matemáticas, influyó especialmente la creciente demanda de la burguesía, cuyo poder era cada vez más determinante en la escena política y económica, de una mayor y mejor preparación técnica de aquellos niños que ya no serían campesinos como sus padres, sino trabajadores que, al incorporarse a un nuevo sistema productivo, debían desempeñar tareas y oficios cada vez más diferenciados y especializados (Peset 1974, pp. 551 y ss.).

Detengámonos ahora en las razones concretas que, a nuestro juicio, aconsejaron la introducción del algoritmo en cuestión en el ámbito escolar. Acabamos de ver cómo el estudio de las potencias y raíces sirve de enlace entre la Aritmética y el Álgebra. Por lo tanto, su introducción en la Aritmética puede servir de preparación para el cálculo literal. ¿Pero qué ventaja podía reportar su aprendizaje a aquellos niños que no seguirían estudios superiores y, por lo tanto, no conocerían esa aplicación? Tampoco su conocimiento parece imprescindible para el comercio, una salida profesional muy importante en la época. Las múltiples aritméticas mercantiles del siglo XIX que se ocupan de proporcionar este tipo de formación profesional no suelen incluir en sus páginas el Álgebra, ni tampoco el cálculo de raíces; sólo los manuales más completos, como por ejemplo el de Poy, tratan esta operación, pero insertándola dentro de un apéndice o de un volumen aparte dedicado exclusivamente al Álgebra y a temas mercantiles especializados (Poy 1842, pp. 43 y ss.).

Nosotros nos inclinamos a creer que el cálculo de raíces tiene otras utilidades importantes, además de servir de introducción al Álgebra. Para comprenderlas mejor señalemos un dato puntual, pero revelador de las limitaciones que podía tener un ciudadano de finales del Siglo de las Luces instruido con las primeras letras ante un problema geométrico de carácter «elemental». El 11 de octubre de 1780 el académico J. Subiràs leyó en la, pocos años antes creada, Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona una memoria que tenía por título *Sobre el método fácil y expedito de medir y calcular la superficie de campos y tierras*. En ella, su autor, explica con detalle cómo, mediante el sistema de triangulaciones, es posible determinar el área de las parcelas tanto en terreno llano como montañoso. Para que su método fuera aplicable incluye unas extensas tablas con las raíces cuadradas de los números naturales comprendidos entre el 1 y el 10.000 (Montanuy, Nuñez y Servat 1989). Es obvio que estas tablas no hubiera sido necesario aportarlas en un trabajo académico si los oyentes, personas de como mínimo cultura primaria, hubieran conocido el algoritmo de extracción de raíces cuadradas en sus estudios. Por otra parte, las aplicaciones geométricas del cálculo de raíces se hacen patentes en los problemas que proponen las aritméticas de la segunda mitad del siglo XIX cuando tratan esta operación, situada generalmente entonces como un apéndice. Así encontramos, en una aritmética bastante popular en las comarcas catalanas de esos años, ejercicios de aplicación exclusivamente geométrica, tales como: calcular la longitud del cable necesario para cercar un campo cuadrado de área conocida, o determinar el número de hileras y la cantidad de plantas que hay que sembrar en cada una de ellas para que la productividad de un campo sea de $x$ coles (Llavià y Serra 1869, pp. 153 y s.). Dado que la determinación de raíces cuadradas es decisiva en la resolución de multitud de problemas o situaciones en las que interviene en última instancia el teorema de Pitágoras o el cálculo de áreas, tenemos que añadir a las razones en favor de la utilidad del algoritmo de la raíz cuadrada, además de los motivos meramente algebraicos, también los de índole geométrica.

Las aplicaciones de la enseñanza de la Geometría no se limitaban únicamente a la agrimensura, como podría deducirse de las dos situaciones que acabamos de comentar, sino que existían otras muchas profesiones de importancia económica en las que los conocimientos geométricos, y, por tanto, el cálculo de raíces, resultaban imprescindibles: marinos, maestros de obras, mecánicos, ebanistas, etc. En todos esas profesiones, si la formación aritmética que recibían los aprendices no se ampliaba con el Álgebra, resultaba necesario incluir entonces en ella el algoritmo de extracción de raíces cuadradas, para poder utilizarlo después en el estudio de la Geometría. El más antiguo texto de Matemáticas que conocemos escrito especialmente para una enseñanza profesional y que incluye el mencionado algoritmo, sin que luego se trate el Álgebra, es un manual que la Academia de San

Fernando encargó en 1800 a Antonio de Varas, a la sazón director de los estudios de Matemáticas de esa institución. El propósito era «reunir en un sólo volumen todos los conocimientos de Aritmética y Geometría que fuesen conducentes para la instrucción de todos aquellos profesionales de las Artes que sirven a la Arquitectura» (Anónimo 1801, p. I). Para ese fin Varas utilizó, reduciéndolos y simplificándolos, los contenidos del manual clásico de Bails ya citado. Este hecho explica que la misma obra se publicara primero como anónima y luego, en ediciones posteriores que probaron su gran aceptación, bajo la autoría de Benito Bails. En el prólogo, Varas, expone las razones que le llevaron a la inclusión del algoritmo, así como, de un modo indirecto, nos informa de la consideración de operación «complicada e inaccesible» que tenía en la época: «La formación de la segunda y tercera potencia y la extracción de sus raíces, puntos indispensables en la práctica de la Geometría, debían tener algún lugar en esta obra: se les da en efecto, procurando imponer a los principiantes en cuantos casos puedan ocurrir en estas operaciones para que depongan de una vez aquel horror con que las miran, creyéndolas inaccesibles a sus talentos sólo porque oyeron ponderar su dificultad a sujetos que se contentaron con saber sus nombres, o que jamás las pudieron entender por carecer de principios...» (Anónimo 1801, p. III).

Pero para que el cálculo de la raíz cuadrada se introdujera en un texto de enseñanza primaria de carácter general todavía tenían que transcurrir más de veinte años. Y creemos que ello fue posible gracias a una circunstancia que favoreció indirectamente esta incorporación. Hemos comentado ya lo densos que resultaban los currículos de Aritmética en el siglo XVIII y buena parte del XIX al tener que describir los múltiples sistemas no decimales de medidas y sus diversas unidades, así como las operaciones laboriosas que debían realizarse con los números denominados. Fue la Revolución Francesa y los avances que ella impulsó los que condujeron a una innovación de los contenidos matemáticos en todos los niveles educativos (Montanuy, Núñez y Servat 1989). Por lo que se refiere a la escuela primaria la introducción en ella del sistema métrico decimal trajo consigo varias consecuencias de gran importancia: relegó a un nivel puramente informativo el estudio de los sistemas de medidas populares, extendió e intensificó la utilización de las expresiones decimales, y descargó los programas del penoso cálculo con números denominados. Esta simplificación permitió la incorporación en las enseñanzas de otras cuestiones, tales como los algoritmos de extracción de raíces cuadradas y cúbicas o las nociones de cálculo comercial, muy necesarias ambas para la formación general y profesional de los escolares. Este cambio que aquí hemos resumido, tuvo lugar de un modo gradual y a lo largo de varios decenios, tanto en Francia, como en los restantes estados europeos.

A pesar de en España no se decretó hasta 1849 la obligatoriedad de la enseñanza del sistema decimal de medidas, algunos autores escribieron libros de texto más acordes con los avances de la ciencia y con las necesidades de la técnica de la época e introdujeron, antes de esa fecha, en capítulos complementarios o en apéndices las innovaciones que hemos comentado. El pionero de esta racionalización de la enseñanza elemental de las Matemáticas fue José Mariano Vallejo, famoso matemático y educador, por sólo señalar dos aspectos de su polifacética personalidad (Montanuy, Núñez y Servat 1991). Ya en la primera edición de su *Aritmética para niños* de 1804 aparecen, por vez primera en un texto de estas características, los números decimales que simplifican notablemente el cálculo con números racionales. El éxito de esta obra le llevó a incluir, veinte años más tarde, en su tercera edición, el algoritmo de la raíz cuadrada; el mismo autor lo explica así en el prólogo: «El deseo de manifestar mi gratitud al público por el singular favor que ha dispensado a esta obrita me ha estimulado a corregirla más, y añadir un capítulo sobre el modo de formar el cuadrado y el cubo de un número y de extraer la raíz cuadrada...» (Vallejo 1824, p. VIII). Con el transcurso del tiempo otros autores siguieron el ejemplo de Vallejo, e introducen en sus libros de texto el cálculo de la raíz cuadrada, utilizando para ello el mismo algoritmo, y esencialmente en la misma forma, que empleamos hoy para su determinación. De tal modo se impuso este uso, que a fines del siglo XIX, aún no siendo obligatoria oficialmente su enseñanza, prácticamente todas las aritméticas escolares lo incluían.

## 2. LA UTILIZACIÓN DE DIVERSOS ALGORITMOS PARA LA EXTRACCIÓN DE RAÍCES CUADRADAS

Cuando el cálculo de la raíz cuadrada se situaba en el ámbito de la enseñanza secundaria o especializada, ligado al Álgebra, la justificación de los pasos seguidos en él resultaba accesible a la preparación del estudiante, pero cuando se trasladó a la enseñanza primaria fue necesario despojarlo de su demostración algebraica, presentándose entonces el algoritmo como un proceso de difícil comprensión al niño. ¿Qué opciones de carácter didáctico tenía el profesor que deseaba justificar el método seguido para hallar raíces cuadradas?

Una podía ser la de adaptar la demostración algebraica al lenguaje aritmético, es decir, suprimir el tratamiento con letras por ejemplos numéricos. De proceder así, debía también seguirse un proceso inductivo considerando varios casos de radicandos: primero el de números inferiores a 100, luego el de menores de 10.000, etc., hasta conseguir una generalización de la regla. El razonamiento que se obtiene al aplicar esta metodología es bastante largo, pero lo podemos encontrar en varias aritméticas de las primeras décadas de nuestro siglo; sobre todo, en aquéllas que se planteaban ser, más que un mero material escolar, un libro de consulta para el maestro. Desde la de Moraga, utilizada en tierras castellanas (Moraga 1920 c., pp. 138 y ss.) hasta la de Dalmau Carles, que si hemos de juzgar por el número de sus ediciones (en 1936 andaban por la 135), fue muy difundida y aceptada en toda la Península (Dalmau Carles 1892, pp. 114 y ss.).

Otra posible vía sería la de tratar de substituir la demostración algebraica clásica por otras más asequibles al niño. En esta línea se sitúa la ingeniosa propuesta de Puig Adam que, desde una perspectiva heurística, sugiere un método para que sea el mismo niño el descubridor del proceso algorítmico (Puig Adam 1956, pp. 19 y ss.). A partir de un conjunto de objetos pequeños e iguales, de fácil adquisición, como, por ejemplo, botones, el cual se corresponda con la cantidad representada por el número cuya raíz se desea calcular, el niño debe intentar construir el mayor cuadrado posible. El lado de ese cuadrado será la raíz entera buscada, y las piezas que sobren, el resto. Analizando el modo cómo se puede ampliar un cuadrado añadiendo filas y columnas con las piezas sobrantes pueden descubrirse e identificarse los pasos seguidos en el algoritmo tradicional.

Un camino radicalmente distinto es el planteado por algunas tendencias de la actual didáctica de la Matemática, y que consistiría en la introducción de otros algoritmos para la determinación de raíces cuadradas, diferentes del tradicional, que fueran más fácilmente comprensibles para el escolar.

Éste sería el caso del método que viene sugerido por la siguiente propiedad de las progresiones aritméticas: la suma de los $n$ primeros números impares es igual a $n^2$.

$$1+3+5+7+\dots\dots\dots\dots+(2n-1) = n^2$$

De este modo puede calcularse la raíz cuadrada de un número entero que sea cuadrado perfecto, determinando el número total de impares consecutivos que es necesario restar al radicando para obtener cero. Así, por ejemplo, si se trata de hallar la raíz cuadrada de 121,

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\sqrt{121}$ | 112 | 85 | 40 |
| - 1 | -7 | -13 | -19 |
| 120 | 105 | 72 | 21 |
| - 3 | - 9 | -15 | -21 |
| 117 | 96 | 57 | 00 |
| -5 | -11 | -17 | |
| 112 | 85 | 40 | |

al haber restado once impares, tenemos $\sqrt{121} = 11$.

Es evidente que, junto a la limitación de tener que considerar sólo números enteros con raíz cuadrada exacta, cuando el número en cuestión crece mucho de valor también lo hace el número de restas que hay que realizar, lo cual convierte al método en impracticable, no por lo difícil, sino por lo tedioso de su aplicación a grandes números.

Afortunadamente existe una estrategia que abrevia notablemente el proceso. El método aparece sugerido en una reciente obra dedicada a la didáctica del cálculo (Gómez Alfonso 1988, pp. 159 y ss.), tomando su autor la idea, a su vez, de un trabajo anglosajón (Edge 1979). Pero, hemos podido hallar este algoritmo ya perfectamente descrito en una sencilla aritmética en lengua catalana publicada en Barcelona en el último año del pasado siglo. La obra en cuestión, cuyo título es *Aritmetica teórich-práctica*, es un libro de texto de difícil localización, ignorado en los principales repertorios bibliográficos, ya que, como se explicita en su portada, fue escrito especialmente para ser utilizado en la Escola Sant Jordi de Barcelona, una de las primeras escuelas que, en tiempos modernos, introduce la enseñanza en lengua catalana. De su autor, Camil Vives i Roig (1861-1931) se tienen escasas noticias. Fue sacerdote y músico, entre otras muchas cosas. Su afición a la música le llevó a iniciar a su hermano menor (el célebre Amadeo Vives) en este arte. Escribió también poesías y obras de carácter religioso. Pero, en su talante polifacético destaca su extraordinario interés por la Matemática y por su enseñanza. En esta actividad destaca como inventor de una máquina de contar (que el llamó aritmómetro) para enseñar el cálculo a niños ciegos. Fue cofundador de la Academia Pedagógica Catalana y figura entre los iniciadores del movimiento de renovación de la enseñanza en Cataluña, especialmente a través de sus textos de Aritmética.

En el prólogo de la obra que citamos, tras comentar otras novedades de carácter didáctico que el autor introduce en el texto, afirma: «respecte de la estracció de las arrels quadradas y cúbicas, presento un nou método senzillissim, y que sobre tot de las arrels quadradas, es garantia segura de que ab *un sola llissó* la podem aprendre´ls noys sense cap dificultat ni perill de que may més se´ls oblidi» (Vives 1899, p. II). Para reproducir el algoritmo utilizaremos la descripción realizada por el mismo Vives en una obra algo posterior, de 1905, denominada *Aritmetica Pedagògica Catalana*, pues en ella, al disponer de más espacio y medios tipográficos, desarrolla completamente el procedimiento, indicando, además, una importante variante. Haremos uso de sus propias palabras y conservando su peculiar ortografía, anterior a la normalización de la lengua catala:

«Prácticament s'opera aixi: Se dividèix el número en grups de dues xifres, començant per la drèta, podènt el darrer grup tenir una sòla xifra. L'arrèl quadrada tindrá tantes xifres còm grups hagin sortit.

Del primer grup de l´esquèrra se'n resten 1, 3, 5, etc., tots els senàs possibles còm s'ha dit: el resultat es la *1ª xifra de l'arrèl*. Si queda resíduu's baixa á sa drèta'l segón grup, y del número resultant se resta el darrer senàs-sustrayent, aumentantli una unitat y posantli un 1 á la drèta. El número que resulti s'operará còm sempre y sortirá la *2ª xifra*.

Exemple: el número 17424. Dividit en grups es 1.74. 24. Fetes les operacions com s'indica, hi ha una resta al primer grup, 3 al segón y 2 al tercer. Dònchs132 x 132 = 17424.» (Vives 1905)

| | | |
|---|---|---|
| $\sqrt{1.74.24}$ | | 132 |
| -1 | | |
| 0 74 | | |
| - 21 | | |
| 53 | | 524 |
| - 23 | | - 261 |
| 30 | | 263 |
| -25 | | - 263 |
| 0524 | | 000 |

La justificación de los pasos seguidos en este algoritmo no resulta difícil de comprender sabiendo que, en definitiva, de lo que se trata es de restar impares consecutivos y recordando, que el enésimo impar se obtiene de la expresión 2n-1. En el ejemplo propuesto se ha comenzado por restar el primer impar, el 1, del primer grupo de cifras del radicando, que al ser precisamente también 1 se obtiene como diferencia cero, y la raíz es 1. Si en lugar de 1 quisiéramos conocer la raíz de 100, entonces los impares restados hubieran sido 10 (la suma de los diez primeros impares es cien) y la raíz buscada sería, por consiguiente, 10. Pero el número formado por las cifras del primero y segundo grupos del radicando no es 100 sino 174, luego debemos seguir substrayendo impares a la diferencia 174-100=74 a partir del décimo. Como el undécimo impar es 2 x 11 - 1, es decir, 21, ése es el primer impar que se substrae del segundo grupo. Al poder restarse tres impares en este segundo grupo, entonces la raíz por defecto de 174 es 10+3=13. Si, como antes, multiplicamos 174 por 100, la raíz por defecto correspondiente queda multiplicada por 10. De nuevo nos encontramos con que debemos hallar la raíz, no de 17400, sino de 17424, luego debemos seguir substrayendo impares al número obtenido al añadir al resto del segundo grupo (el 5) las dos últimas cifras del tercer grupo (el 24). Al 534 substraeremos el impar siguiente del que hace 130 de orden, es decir, 2x131-1=261. Como se puede restar aún otro impar más, la raíz de 17424 es 130 +2 = 132.

¿Pero qué hacer cuando el substraendo que inicia un nuevo grupo de restas es mayor que el número formado añadiendo a las cifras del resto anterior las que forman el grupo siguiente? Este caso también está contemplado por Vives, que lo explica así:

«Si al baixar un grup pera extrèure una nòva xifra, 'l sustrayent resultés major que'l minuent, senyal de que la xifra de l'arrèl es 0, y llavòres fàssis lo següent: pòso 0 a l'arrèl; baixo altre grup formant un número major; aumento en una nòva unitat les unitats del sustrayent ; y á sa drèta s'hi posa 01.

| | | |
|---|---|---|
| Exemple: El número 41616. | $\sqrt{4.16.16}$ | 204 |
| Vègis les operacions adjuntes. | -1 | |
| El 401 de l'última operació es el 3 | | |
| (últim sustrayent de la primera) | 3 | |
| mes 1, ab el 01 afegit. | - 3 | |
| Efectivament, el 3 donava 41 de | | |
| sustrayent (3 +1 = 4 ab un 1, 41), | 0 16 16 | 812 |
| y no's podia restar del 16. Per lo | -4 01 | - 405 |
| mateix hèm baixat el grup se- | | |
| güent 16, y hem tingut 01616, | 12 15 | 407 |
| del qual li hèm restat el 401, | 4 03 | - 407 |
| que ja savèm d'hont ha resultat.» | | |
| | 812 | 000 |

La explicación teórica de este caso especial tampoco ofrece dificultad. Al primer grupo de cifras del radicando se le pueden restar los dos primeros impares, quedando como resto 0, luego la raíz de este número (el 4) es 2. Al añadir al resto las dos cifras siguientes del radicando se obtiene 016, valor al que no podemos restar el impar de número de orden 21, pues es 2 x 21 - 1 = 41 >16. Añadimos, entonces, al resto las dos cifras del tercer grupo del radicando, obteniendo 01616. Pero ahora el impar que hay que substraer deberá ser consiguientemente el que ocupa el lugar número 201, es decir, el 2 x 201 - 1 = 401. Como aún pueden restarse tres impares consecutivos más, la raíz buscada es 200 + 4 = 204.

En las obras de Camil Vives siempre se aplica este algoritmo a números que son cuadrados perfectos, pero en realidad no existe ningún impedimento teórico para extenderlo a cualquier número, sea éste cuadrado perfecto o no.

Veamos como se aplicará al cálculo de $\sqrt{5}$:

$\sqrt{5}$ | 2,236

-1

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 16 00 | 27100 | 13711 |
| - 3 | - 4 41 | - 4461 | - 4467 |
| 1 00 | 11 59 | 22639 | 9244 |
| - 41 | - 4 43 | - 4463 | - 4469 |
| 59 | 7 16 | 18176 | 4775 |
| - 43 | - 4 45 | - 4465 | - 4471 |
| 16 00 | 2 71 | 13711 | 0304 |

Para la pequeña historia de la utilización de este algoritmo diremos que aparece propuesto, no en substitución del clásico, sino como una alternativa al mismo, en una aritmética posterior, también en lengua catalana. Su autor, Lluis G. Castellà, es más que probable que se inspirara, para esta cuestión, en los textos de Vives. Comparemos sus respectivas descripciones y apreciaremos las similitudes, aunque en favor de Castellà, ingeniero industrial de formación; hay que reconocer que utiliza un lenguaje más conciso y preciso, además de un catalán normalizado: «Dividirem el nombre en grups com abans (se refiere al algoritmo tradicional), del primer grup restarem els senassos successius, fins que no es pugui més, el nombre de restes serà la primera xifra de l'arrel;

a la dreta del residu, es posarà el segon grup, i del nombre resultant es resta el darrer senàs després d'haver-li afegit una unitat i posat un 1 a la dreta. El nombre de restes de senassos consecutius que es pugui fer serà la segona xifra de l'arrel, i així es va continuant» (Castellà 1923, p. 104). En este texto no se comenta ningún caso especial, aunque, eso si, se contempla la aplicabilidad general del algoritmo utilizándolo para extraer la raíz cuadrada de un número decimal. Como dato curioso añadiremos que Castellà, inmediatamente después de concluida la Guerra Civil, publica una versión de esta obra en lengua castellana en la que introduce algunas modificaciones y, entre ellas, la de suprimir este algoritmo dejando únicamente el tradicional.

Dentro de los métodos para hallar raíces cuadradas exclusivamente aritméticos todavía encontramos en la bibliografía otro procedimiento susceptible de aplicación didáctica. Se trata del método que podemos denominar de «división y promedio» y que aparece descrito, por ejemplo, en el conocido manual de Aritmética de Peterson y de Hashisaki (1977, pp. 278 y ss.). Consiste en aplicar, al caso particular constituido por la ecuación cuadrática $x^2 = a$, el método general de aproximación de raíces de ecuaciones desarrollado por Newton. El algoritmo en cuestión tiene un origen aún más antiguo en la Matemática de las civilizaciones mesopotámicas (Boyer 1986, pp. 52 y s.). Se comienza por proponer una primera aproximación del valor de la raíz, $a_1$, la cual no tiene necesariamente que ser muy precisa. A continuación se divide el radicando por $a_1$ y el resultado se promedia con $a_1$; se obtiene así la segunda aproximación de la raíz, $a_2$.

$$\frac{\frac{a}{a_1} + a_1}{2} = a_2 \quad ; \quad \frac{\frac{a}{a_2} + a_2}{2} = a_3$$

Iterando este proceso de «dividir y promediar» tendremos aproximaciones cada vez mejores de la raíz. Si el número *a* es un cuadrado perfecto, entonces, en un número finito de pasos alcanzamos la raíz exacta buscada.

Tomando como ejemplo $\sqrt{17424}$, que ya hemos considerado más arriba, le aplicamos la metodología descrita: suponiendo que elegimos como primera aproximación 100, entonces la segunda será 137 (hacemos uso sólo de la parte entera de los cocientes) y la tercera nos proporcionará ya la raíz buscada, 132.

$$\frac{\frac{17424}{100} + 100}{100} \approx 137 \; ; \; \frac{\frac{174424}{137} + 137}{2} \approx 132;$$

En el segundo ejemplo visto anteriormente, $\sqrt{41616}$, si seguimos manteniendo, al ser el radicando un número de cinco cifras, como primera aproximación 100, entonces la segunda es 258, la tercera, 209 y la cuarta proporciona la raíz exacta 204.

Obviamente este método puede extenderse al cálculo aproximado de raíces de números no cuadrados perfectos. Por ejemplo, si queremos hallar $\sqrt{5}$ con una aproximación de tres cifras decimales y tomamos como primera aproximación 2,000, entonces la segunda será 2,250, y la tercera nos proporcionará el valor correcto de 2,236.

También para este algoritmo, la búsqueda en antiguos libros de texto nos conduce a descubrir, en uno de ellos, la descripción de una metodología semejante para la determinación simplificada de raíces cuadradas. La obra a que nos referimos, *El matemático moderno*, fue escrita por Enrique Vilaret en 1930. Si bien no era propiamente un libro de texto, el manual iba dirigido indirectamente a la enseñanza como un libro auxiliar del maestro. En el prólogo nos dice el autor sus objetivos: «...me daré por satisfecho si alcanza el favor de los profesores, ya que me propongo ahorrarles tiempo y trabajo» (Vilaret 1930, p. 5). Y en un largo subtítulo recogido en la portada anuncia «simplificación absoluta de todas las operaciones aritméticas», así como «nuevo procedimiento, asombroso por su sencillez, para la extracción de raíces».

Reproducimos aquí ese procedimiento, pues aunque coincide en lo esencial con el proceso de «dividir y promediar», presenta una variante para establecer la primera aproximación de la raíz cuadrada de un número: «Igual que para el método antiguo, dividiremos la cantidad propuesta en períodos de dos cifras, empezando por la derecha. Póngase a continuación las rayas de dividir. Sáquese la raíz cuadrada de cada período, principiando por la izquierda, y las raíces halladas las colocaremos, por su orden correlativo, de izquierda a derecha, formando una cantidad en el lugar correspondiente al divisor. Divídase la cantidad propuesta por el divisor improvisado, o sea por la cantidad formada por las raíces. Súmese este cociente con el divisor, y la mitad de dicha suma será la raíz aproximada (y en muchos casos la exacta). Cuando esto no suceda, que será la mayor parte de las veces, divídase la misma cantidad propuesta por la mitad hallada, súmese nuevamente el cociente resultante de la segunda división con el último divisor, y la mitad de esta suma será la raíz cuadrada que se busca.» (Vilaret 1930, pp. 24 y s.).

Si, de nuevo, aplicamos este método a los dos ejemplos que venimos considerando, tendremos: para $\sqrt{17424}$ la primera aproximación es 184 (1 es raíz de 1, 8 es raíz aproximada de 74 y 4 lo es de 24), la segunda es 139 y la tercera proporciona el valor exacto de 132; para $\sqrt{41616}$ la primera aproximación resulta ser 244, la segunda 207 y la tercera es ya la raíz exacta, 204. Aunque el autor no lo especifica, por los ejemplos que expone se sobreentiende que las divisiones que se realizan son siempre divisiones enteras. Además, Vilaret, al igual que antes Vives, aplica su procedimiento de extracción de raíces cuadradas a casos de números que son cuadrados perfectos, pero, como hemos visto, no hay una limitación teórica para extenderlo al cálculo de raíces de números racionales cualesquiera, pudiéndose obtener aproximaciones con la cantidad de cifras decimales que se desee.

Conviene advertir que, aunque en el método de «dividir y promediar» cualquier valor sirve como primera aproximación de una raíz, si éste es una «buena» aproximación, se consigue abreviar el proceso, acortando el número de «pasos» o aproximaciones que hay que realizar. En ese sentido se orienta la variante propuesta por Vilaret. Pues, si bien es sabido que la radicación no es una operación distributiva respecto a la suma y, por lo tanto, $\sqrt{41616} = \sqrt{(40000 + 1600 + 16)}$ no es igual a 100 $\sqrt{4}$ + 10 $\sqrt{16}$ + $\sqrt{16}$ = 244, esta cantidad puede tomarse inicialmente como mejor aproximación de la raíz de 41616 que otro valor tomado al azar, o que 200, que era la raíz aproximada de sólo el primer grupo de cifras del radicando.

Al lector curioso quizás le interese saber, a pesar de que se trata de algoritmos totalmente en desuso en la actualidad, que, tanto en la obra de Vives como en la de Vilaret, se describen también ligeras modificaciones de sus respectivos procedimientos que los conducen fácilmente al cálculo de las raíces cúbicas, e, incluso, en la de Vilaret se describe la metodología a seguir con raíces de órdenes superiores al 3.

En conclusión, junto al algoritmo tradicionalmente empleado para la extracción de la raíz cuadrada, pueden utilizarse, al menos, otros dos de carácter aritmético, igualmente «eficaces» desde el punto de vista operativo y didáctico. Estos métodos pueden contemplarse como alternativas o actividades complementarias que vale la pena ensayar en el aula, porque, a nuestro juicio, además de su evidente simplicidad mecánica, aportan estrategias y recursos matemáticos, como las progresiones o el cálculo estimado a través de promedios, útiles para la formación Matemática del niño.

No obstante, no ignoramos que el procedimiento de cálculo de la raíz cuadrada para algunos profesores está «en trance de desaparición», son muchos los partidarios de aplicar a rajatabla el dicho romano «non schollae sed vitae discimus» y de defender, en consecuencia, como el mejor «algoritmo» el que consiste en pulsar la tecla $\sqrt{\ }$ que llevan incorporada las calculadoras.

Nosotros no queremos entrar en esta polémica pues son otros los objetivos de este pequeño trabajo. En él nos hemos propuesto describir recursos didácticos utilizables en la escuela para el cálculo de raíces cuadradas, pero, sobre todo ello, hemos querido mostrar la necesidad y la utilidad para todo enseñante de conocer mejor la evolución histórica de las técnicas y recursos docentes, a través del análisis de obras, como, por ejemplo, los antiguos libros de texto. Y ello no sólo porque se pueden descubrir ideas o sugerencias metodológicas de interés actual, sino para poder ponderar mejor lo que, en ocasiones, se presenta como innovación didáctica, cuando, muchas veces, es una propuesta ya sugerida o ensayada tiempo atrás, y no necesariamente en países lejanos o más avanzados, sino en nuestras propias latitudes.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


AL-DAFFA, A.A., 1977. *The muslim contribution to mathematics.* (Croom Helm: London).

AMAT, F., 1832 (5ª ed.). *Institutiones philosophiae ad usum seminarii episcopalis barcinonensis.* Tomo I, Vol. II (*Mathesis*). (J. Verdaguer: Barcelona).

ANÓNIMO, 1801. *Aritmética y geometría práctica de la Real Academia de San Fernando.* (Imp. Viuda de Ibarra: Madrid).

ANÓNIMO, 1805. *Aritmética especulativa y práctica para alivio de los maestros y aprovechamiento de los discípulos de las Escuelas Pías de Cataluña.* (Imp. Ignacio Abadal: Manresa).

BAILS, B., 1779. *Elementos de matemáticas.* Vol. II (Álgebra). (Tip. J. Ibarra: Madrid).

BARREME, F., 1764 (nueva edición). *L'arithmétique ou le livre facile pour apprendre l'arithmétique de soi-même et sans maître.* (París).

BOYER, C.B., 1986. *Historia de la matemática.* (Alianza Editorial: Madrid).

CASTELLÀ, L. G., 1923. *Tractat d'aritmètica pràctica.* (Editorial Pedagògica: Barcelona).

CASTELLÀ, L. G., 1939. *Tratado de aritmética práctica.* (Bosch: Barcelona).

COSSIO, M. B., 1897. *La enseñanza primaria en España.* (Fortanet: Madrid).

DALMAU CARLES, J., 1892. *Lecciones de aritmética: para las escuelas y colegios de primera enseñanza.* Primera parte: grado superior. (Lib. J. Franquet y Serra: Girona).

DALMAU CARLES, J., 1936 (135ª ed.). *Lecciones de aritmética: para las escuelas y colegios de primera enseñanza.* Primera parte: grado superior. (Dalmau Carles: Girona).

EDGE, J., 1979. Square roots, *Mathematics in School,* Vol. 8 (1), pp. 7-9.

FERNÁNDEZ, S., 1991. La raíz cuadrada y la matemática china, *Suma*, 8, pp. 81-83.

GÓMEZ ALFONSO, B., 1988. *Numeración y cálculo*. (Síntesis: Madrid).

GUEVARA, A., 1826. *Institutionum elementarium philosophiae ad usum studiosae juventutis*. Tomo I. (Tip. L. Amarita: Madrid).

JACQUIER, F., 1799. *Institutiones philosophiae ad usum scholae valentinae*. Tomo III. (Of. Joseph de Orga: Valencia).

LACROIX, S. F., 1807. *Curso completo elemental de matemáticas puras*. Tomo I (Aritmética). Tomo II (Álgebra). (Imp. Real: Madrid).

LLAVIA y SERRA, J., 1869. *La aritmética de las escuelas elementales y superiores*. Segunda parte (Enseñanza superior). (Imp. de Dorca: Gerona).

MARTZLOFF, J. C., 1988. *Histoire des mathématiques chinoises*. (Masson: París).

MONTANUY, M., NÚÑEZ, J.M. y SERVAT, J., 1989. La influencia de la Revolución Francesa en la enseñanza elemental de la aritmética, *Suma*, 4, pp. 21-26.

MONTANUY, M., NÚÑEZ, J.M. y SERVAT, J., 1990. Las matemáticas en la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona: las memorias durante el período 1770-1890, *Llull*, Vol. 13 (24), pp. 107-130.

MONTANUY, M., NÚÑEZ, J.M. y SERVAT, J., 1991. Sobre la aportaciones racionalistas de José Mariano Vallejo en la enseñanza de las matemáticas en el siglo XIX, *Actas del V Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, Tomo II, pp. 1327-1341. (PPU: Murcia).

MORAGA, F., (1920c.). *Elementos de aritmética*. (Valladolid).

PESET, M. y PESET, J.L., 1974. *La Universidad española (siglos XVIII y XIX)*. (Taurus: Madrid).

PETERSON, J.A. y HASHISAKI, J., 1977. *Teoría de la aritmética*. (Limusa: México).

POY, J., 1842 (7ª ed.). *Aritmética mercantil*. Tomo II (Tratado elemental de álgebra). (J.F. Piferrer: Barcelona).

REAL DECRETO, 1880. *Real Decreto de 13 de agosto de 1880 reformando el Plan de Estudios vigente con inclusión de las órdenes aclaratorias del mismo*. (Imp. M. Minuesa de los Ríos: Madrid).

VALLEJO, J.M., 1824 (3ª ed.). *Aritmética para niños, escrita para el uso de las escuelas del Reyno*. (Imp. Real: Madrid).

VEA MINUESA, F., 1986. *Las matemáticas en los planes de estudio de enseñanza secundaria en España en el siglo XIX*. (Universidad de Zaragoza).

VILARET, E., 1930. *El matemático moderno*. (Bauzá: Barcelona).

VILLALPANDO, F., 1778. *Tractatus praeliminaris mathematicorum. Disciplinarum elementa in usum physicae candidatorum*. (Tip. J. Ibarra: Madrid).

VIVES, C., 1899. *Aritmetica teórich-práctica*. (Estampa de'n Pere Torrella: Barcelona).

VIVES, C., 1905. *Aritmètica pedagògica catalana. Curs superior. Llibre de text*. (Baguñà: Barcelona).