ESTUDIO SOBRE EL COMPORTAMIENTO VISUAL EN ÁLGEBRA DE LOS ALUMNOS DEL SEGMENTO EDUCATIVO 14-16

MEAVILLA SEGUI, V.
CEP de Teruel.

SUMMARY

The visual characterisation in Algebra of a sample of pupils in the 14-16 age-group has been studied. In this paper we suggest, in the light of the results of the study, didactic recommendations for the exploitation of visual reasoning in the teaching of Algebra in schools.

INTRODUCCIÓN

Desde hace años, las investigaciones de Krutetskii (1976), Moses (1977), Suwarsono (1982), Presmeg (1985) y otros, en el campo de la resolución de problemas, pusieron de manifiesto que, atendiendo a las características de sus resoluciones, los estudiantes se podían clasificar en tres grandes grupos:

– *El visual o geométrico,* compuesto por aquellos individuos dotados de una habilidad especial para interpretar visualmente relaciones matemáticas abstractas y caracterizados por su persistencia en el uso de esquemas visuales incluso cuando los problemas se pueden resolver fácilmente desde otros enfoques.

– *El no visual o analítico,* formado por estudiantes que no tienen necesidad de recurrir a ningún tipo de soporte visual para trabajar con esquemas abstractos.

– *El intermedio o armónico,* integrado por aquellos alumnos en los que se da un equilibrio entre las aproximaciones visuales y analíticas en la resolución de problemas.

Las mismas tendencias de los estudiantes en el proceso de resolución de problemas matemáticos también están presentes en su forma de aprender matemáticas. Dicho de otro modo: hay alumnos que tienen una marcada inclinación hacia los aspectos visuales de las matemáticas, otros que se sienten fuertemente atraídos por su componente analítica, y otros en los que estas dos preferencias se conjugan armoniosamente.

En general, los programas de enseñanza han prestado poca atención a los aspectos visuales de las matemáticas (excepción hecha de los contenidos de tipo geométrico) y se han dedicado casi exclusivamente a su parte analítica.

Este enfoque tiene algunas deficiencias: no cubre las necesidades de aquellos alumnos cuya orientación cognitiva es eminentemente visual; propicia el abandono de estudiantes que podrían acceder a las matemáticas a través de su componente visual; oculta los aspectos visuales que ayudan a conseguir la comprensión de conceptos y procedimientos; ignora las representaciones visuales como herramientas potentes para la resolución de problemas no necesariamente geométricos; no contempla las demostraciones visuales como demostraciones matemáticamente legítimas.

Ni que decir tiene que los métodos visuales no están libres de críticas. Así, por ejemplo, la resolución gráfica de problemas de programación lineal es impracticable cuando el número de variables es mayor que tres. Por otro lado, las demostraciones gráficas, pongamos por caso la demostración del teorema de Pitágoras, están sujetas a algunos peligros. De todos es sabido que en geometría es imposible dibujar un diagrama generalizado. Por ejemplo, no es posible dibujar un triángulo rectángulo general; una vez dibujado es específico.

Podrían presentarse muchos ejemplos más en contra de los métodos visuales en la enseñanza de las matemáticas; no obstante, desde una óptica didáctica, es aconsejable utilizar un soporte visual en un primer contacto con los contenidos de aprendizaje, siempre que ello sea posible.

Para paliar las limitaciones del enfoque analítico, a las que hemos aludido en líneas precedentes, parece aconsejable que los currículos permitan *desarrollar cada tema en los aspectos analíticos y visuales para que cada estudiante se enfrente al material de la manera que esté más próxima a su orientación cognitiva* (Dreyfus-Eisenberg 1986).

Con lo visto hasta aquí, resulta incuestionable que en la enseñanza de las matemáticas, además del razonamiento analítico, debe potenciarse el *razonamiento visual, entendiendo* como tal *el uso de representaciones gráficas (diagramas, modelos geométricos ...) como método para pensar y entender.*

Desde esta óptica, el razonamiento visual no es patrimonio de la geometría sino que está presente en otras ramas de las matemáticas, incluso en el álgebra (Kieran-Filloy 1989).

Así, por ejemplo, el razonamiento visual se usa en combinatoria y probabilidad (diagramas de Venn, diagramas de árbol), en álgebra lineal (diagramas de Venn, diagramas sagitales para correspondencias y aplicaciones entre conjuntos), en aritmética (modelos geométricos para la multiplicación, modelos visuales de fracciones), en trigonometría (representaciones gráficas de las razones trigonométricas de un ángulo en una circunferencia de radio unidad), en análisis (interpretación geométrica del concepto de derivada de una función en un punto, métodos aproximados de integración)...

En las líneas que siguen, utilizando la caracterización visual en álgebra de una muestra de alumnos del segmento educativo 14-16, señalaremos, a modo de recomendaciones didácticas, las posibilidades del razonamiento visual en la enseñanza-aprendizaje del álgebra escolar.

Antes de entrar de lleno en el tema, ofrecemos unas breves consideraciones históricas para poner de manifiesto que los métodos utilizados en álgebra a lo largo de los tiempos no han sido exclusivamente verbales (entendiendo como tales aquéllos que se apoyan en la sintaxis del lenguaje simbólico), sino que también han estado presentes los métodos visuales, que se fundamentan en el significado de sus representaciones.

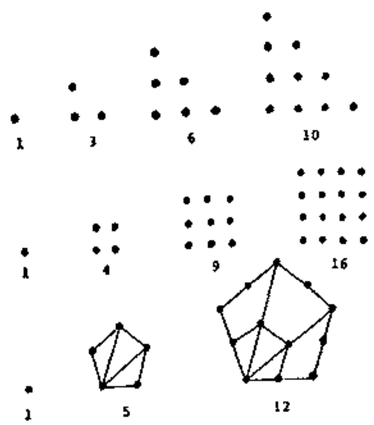
ÁLGEBRA, RAZONAMIENTO VISUAL E HISTORIA

Pitágoras y los pitagóricos

Allá por el siglo VI aC Pitágoras y sus discípulos, los pitagóricos, fueron capaces de descubrir interesantes relaciones numéricas valiéndose de una técnica sencilla pero ingeniosa: se sirvieron de piedrecillas para *ver* los números y *manipularlos físicamente.*

Así, los números 1, 3, 6, 10... se llamaban *triangulares,* dado que se podían representar mediante un diagrama puntual cuyo contorno delimitaba un triángulo. De forma similar, los números 1, 4, 9, 16... se llamaban *cuadrados,* y los números 1, 5, 12..., *pentagonales* (Fig. 1).

Figura 1



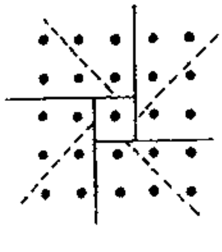
Los números triangulares, cuadrados, pentagonales... recibían el nombre de *números figurados o poligonales.*

Muchos teoremas relativos a números figurados fueron descubiertos y demostrados por los pitagóricos haciendo uso del razonamiento visual.

He aquí uno de ellos:

Ocho veces un número triangular, aumentado en una unidad, es igual a un número cuadrado (Fig. 2).

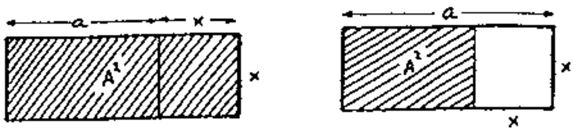
Figura 2



Los pitagóricos también estuvieron familiarizados con el problema de *aplicación de áreas* que, en su versión más simple, consistía en lo siguiente:

Sobre un segmento rectilíneo dado (a), construir un rectángulo de área dada (A^2) de modo que la parte de área que sobre (falte) sea un cuadrado (Figs. 3 y 4).

Figuras 3 y 4



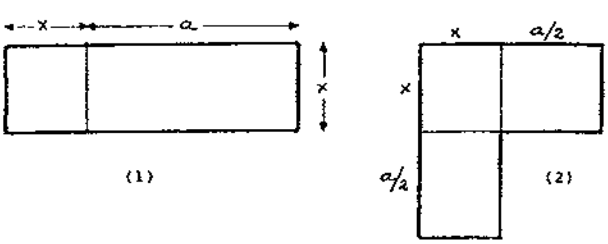
Resulta claro que la traducción de este problema al simbolismo moderno conduce a las ecuaciones de segundo grado:

$$(a + x)x = A^2\ ;\quad (a - x)x = A^2$$

Para resolver este tipo de ecuaciones, los pitagóricos dispusieron de una herramienta poderosa: *el álgebra geométrica,* que Euclides (s. III aC) desarrolló en el libro II de sus *Elementos*.

Así, por ejemplo, para resolver la ecuación $(a + x)x = A^2$, los discípulos de Pitágoras pudieron utilizar un procedimiento similar al siguiente:

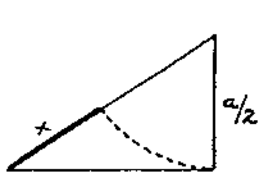
Figura 5



Con esto, A^2 es la diferencia entre los cuadrados de lados respectivos $x + (a/2)$ y $a/2$.

Por tanto, si se construye un triángulo rectángulo de catetos A y $a/2$, y de su hipotenusa se quita el segmento $a/2$, *entonces* la parte sobrante es x (Fig. 6)

Figura 6



Al-Khwarizmi y la ecuación de segundo grado

En la obra *Hisab al-jabr w'almuqabala* del matemático árabe Mohamed ibn Musa al-Khwarizmi (s. IX), se resuelven seis tipos de ecuaciones de segundo grado con una incógnita

A lo largo de seis capítulos se resuelven catorce ecuaciones, cada una de las cuales se acompaña de la estrategia que debe seguirse para obtener su solución. En algún caso se añade una justificación geométrica de los resultados obtenidos.

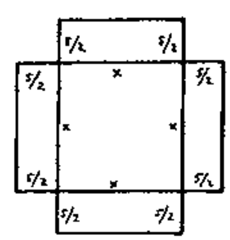
Por su interés, en cuanto al razonamiento visual se refiere, reproducimos la justificación geométrica que acompaña a la resolución de la ecuación $x^2 + 10x = 39$.

En dicha comprobación, al-Khwarizmi procede de acuerdo con el siguiente plan:

a) Construye un cuadrado de lado x.

b) Sobre cada uno de los lados de dicho cuadrado describe un rectángulo de altura $5/2$ (Fig. 7). De este modo, la suma de las áreas de los cuatro rectángulos es igual a $10x$.

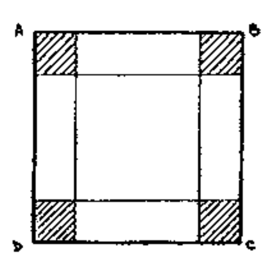
Figura 7



En consecuencia, el área de la cruz determinada por los cinco cuadriláteros es igual a $x^2 + 10x\ (= 39)$.

c) Acto seguido, añadiendo un cuadrado de lado $5/2$ a cada una de las esquinas de la cruz, materializa un cuadrado ABCD (Fig. 8) cuya área es igual a $39 + 4(5/2)2 = 64$.

Figura 8



A partir de esta última construcción, resulta claro que el lado del cuadrado ABCD es igual a 8. Entonces, teniendo en cuenta que: $AB = x + 2(5/2) = x + 5 = 8$, se obtiene que $x = 3$.

Después de esta breve excursión histórica podríamos seguir ofreciendo ejemplos de métodos visuales presentes en las obras de algebristas tan notables como Luca Pacioli, Cardano, Descartes, etc. Sin embargo, con lo expuesto en líneas precedentes podemos concluir que: *los métodos visuales han estado presentes a lo largo del desarrollo del álgebra.*

ÁLGEBRA ESCOLAR Y COGNICIÓN. RESULTADOS DE UNA INVESTIGACIÓN

Para caracterizar el comportamiento visual en álgebra de los alumnos del segmento educativo 14-16 se diseñó un cuestionario compuesto por diez ítems formulados de un modo eminentemente gráfico, distribuidos en tres categorías:

a) El lenguaje de los diagramas (ítems 1.1-1.5).

b) El lenguaje algebraico de las gráficas (ítems 2.1-2.3).

c) Resolviendo situaciones problemáticas (ítems 3.1-3.2).

En la primera categoría se incluyeron cuestiones relacionadas con la información prealgebraica y algebraica contenida en un diagrama de tipo geométrico: modelos geométricos de ecuaciones de primer grado con una incógnita, representaciones geométricas de ecuaciones de segundo grado con una incógnita, modelos geométricos de polinomios y expresiones notables...

En la segunda estaban aquellos ítems que contenían mensajes algebraicos transmitidos a través de las gráficas de funciones elementales.

En la tercera se propusieron algunos problemas en cuya resolución se podía hacer uso de algún tipo de información gráfica contenida en sus enunciados.

– En el ítem 1.1, el alumno debía ser capaz de leer de dos formas distintas la información prealgebraica de varios diagramas.

– En la cuestión 1.2, el estudiante debía descubrir alguna regularidad en una sucesión de diagramas y, a partir de ella, aventurar la expresión del diagrama que ocupaba un lugar determinado en dicha sucesión.

– El ítem 1.3 pretendía detectar la capacidad para traducir la información de dos diagramas en términos de ecuaciones de primer y segundo grado, respectivamente. Con esta cuestión también se intentaba descubrir la habilidad del estudiante para construir un diagrama para una ecuación del tipo $Ax + B = Cx$.

– La cuestión 1.4 intentaba detectar la capacidad para traducir al lenguaje de los polinomios la información de un diagrama.

– En el ítem 1.5, el estudiante debía ser capaz de leer de dos formas distintas la información algebraica contenida en dos diagramas.

– En la cuestión 2.1, el alumno debía ser capaz de localizar algunas soluciones de una ecuación lineal con dos incógnitas a partir de la representación gráfica de su recta asociada.

– El ítem 2.2 intentaba detectar la capacidad para asociar la información contenida en la gráfica de una función con la información numérica de su tabla de valores.

– La cuestión 2.3 estaba diseñada para descubrir la capacidad de construir las gráficas de dos rectas de modo que la abscisa de su punto de intersección determinase la solución de una ecuación del tipo $Ax + B = Cx + D$.

– En los ítems 3.1 y 3.2, el alumno debía ser capaz de utilizar la información gráfica contenida en el enunciado de un problema para resolverlo.

En la figura 9, a modo de ejemplo, reproducimos algunos ítems del cuestionario.

El cuestionario se administró a una muestra de 65 alumnos (36 de 1° de BUP y 29 de 2° de BUP) de un centro público de la provincia de Teruel. Los alumnos de 1° de BUP habían estudiado los contenidos de álgebra usuales en el programa de matemáticas del ciclo superior de EGB. Los alumnos de 2° de BUP conocían los contenidos algebraicos de 1° de BUP, además de los correspondientes a la educación general básica. A ambos grupos de estudiantes se les había enseñado desde una óptica analítica.

Una vez realizado el análisis de las respuestas de los alumnos, resultaba imprescindible asignar una puntuación a cada una de ellas, atendiendo al grado de utilización de la información visual.

Para ello, las respuestas se clasificaron en cuatro grandes grupos:

Grupo no visual (NV)

En este grupo se incluyeron las respuestas que no utilizaban la información visual de sus enunciados.

Grupo intermedio bajo (I 1/3)

Aquí se incluyeron las respuestas que utilizaban incorrectamente toda la información visual de sus enunciados.

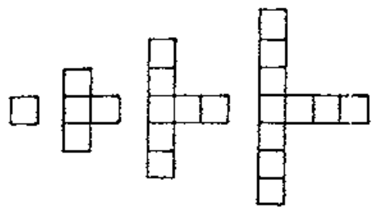
Grupo intermedio alto (I 2/3)

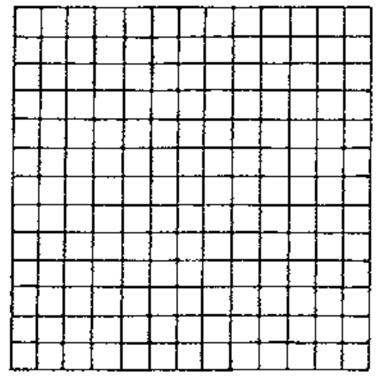
Se incluyeron en este grupo las respuestas que utilizaban adecuadamente una parte de la información visual de sus enunciados.

Figura 9

1.2. Dibuja las dos figuras que siguen en esta serie.

HAZ LOS DIBUJOS AQUÍ DENTRO



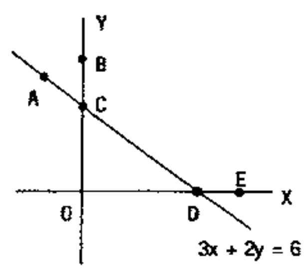


¿CUÁNTOS CUADRADOS TENDRÁ LA FIGURA DE LA SERIE QUE OCUPE EL LUGAR 1992?

RESPUESTA

EXPLICA TU RESPUESTA:

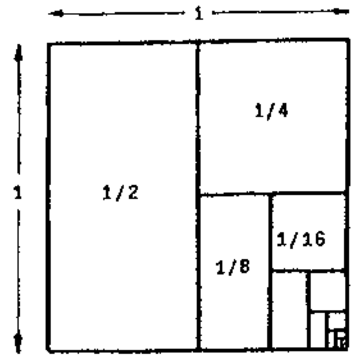
2.1. Atendiendo a la información de la figura adjunta, marca con una cruz cada una de las afirmaciones siguientes que sea cierta.



1) Las coordenadas de A no son solución de la ecuación $3x + 2y = 6$.
2) Las coordenadas de B son solución de la ecuación $3x + 2y = 6$
3) Las coordenadas de C son solución de la ecuación $3x + 2y = 6$
4) Las coordenadas de D no son solución de la ecuación $3x + 2y = 6$
5) Las coordenadas de E no son solución de la ecuación $3x + 2y = 6$

EXPLICA TU RESPUESTA:

1)
2)
3)
4)
5)



Apoyándote en el diagrama calcula la suma:

$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots$

RESPUESTA:

$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots =$

EXPLICA CÓMO LO HAS HECHO

Grupo visual (V)

En este grupo se incluyeron las respuestas que utilizaban adecuadamente toda la información visual contenida en sus enunciados.

Las respuestas en blanco o sin explicación se excluyeron inicialmente de esta clasificación, dado que en estos casos no podía decidirse si los alumnos utilizaron o no la información visual de los enunciados cuando pensaban en el problema. Para evitar esta situación, se recurrió a las entrevistas personales en las que, atendiendo a las explicaciones dadas por los estudiantes, sus respuestas en blanco o sin explicación fueron incluidas en alguno de los grupos anteriores.

De acuerdo con la clasificación de las respuestas de los alumnos, las puntuaciones asignadas fueron las siguientes:

TIPO DE RESPUESTA	NV	I 1/3	I 2/3	V
PUNTUACIÓN	0	1/3	2/3	1

Para obtener la puntuación de cada ítem (salvo 1.2) se calculó la media aritmética de las puntuaciones asignadas a cada uno de sus apartados. En el ítem 1.2, dada la mayor complejidad del segundo apartado, la puntuación del primero tuvo *peso 1* y la del segundo tuvo *peso 2*.

Una vez obtenidas las puntuaciones de todos los ítems se sumaron las correspondientes a cada una de las tres categorías de cuestiones; de este modo, se obtuvieron tres puntuaciones (una por categoría) que se tipificaron transformando sus rangos en 0-10.

Para traducir cada una de estas tres puntuaciones (p_1, p_2, p_3) al lenguaje del razonamiento visual se utilizó el siguiente criterio:

1) Si p_i ε [0, 2], el alumno era NO VISUAL (NV), en la categoría i.

2) Si p_i ε (2, 5], el alumno era INTERMEDIO BAJO (I 1/3), en la categoría i.

3) Si p_i ε (5, 8], el alumno era INTERMEDIO ALTO (I 2/3), en la categoría i.

4) Si p_i ε (8, 10], el alumno era VISUAL (V), en la categoría i.

Con esto, se obtuvo el comportamiento visual de cada alumno en las tres categorías de ítems del cuestionario (Fig. 10).

A la vista de los resultados obtenidos pueden formularse las conclusiones siguientes:

1) El uso (o no) del razonamiento visual por cada estudiante no es constante a través de las tres categorías de ítems. Sin embargo, en todos los casos aparece una tendencia dominante, ya sea hacia lo visual (alumnos 1, 2, 4, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 14, 15, 24, 26, 27, 29, 30, 31 y 36 de 1° de BUP y alumnos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 16, 17, 18, 26 y 27 de 2° de BUP) o hacia lo no visual (alumnos 3, 8, 9, 10, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 28, 32, 33, 34 y 35 de 1° de BUP y alumnos 8, 13, 14, 15, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 28 y 29 de 2° de BUP).

2) El 50% de alumnos de 1° de BUP tiende a utilizar el razonamiento visual y el 50% no. Por otro lado, el 55% de estudiantes de 2° de BUP se inclinan a utilizar el razonamiento visual y el 45% no.

Podríamos decir, pues, que existe un equilibrio entre los alumnos de la muestra que hacen uso del razonamiento visual y los que no se sirven de él.

ALGUNAS RECOMENDACIONES DIDÁCTICAS SOBRE ÁLGEBRA ESCOLAR Y RAZONAMIENTO VISUAL

Atendiendo a las conclusiones anteriores, parece oportuno que se preste atención a los aspectos visuales en la enseñanza-aprendizaje del álgebra dentro del segmento educativo 14-16.

Por ello, creemos que deberían cuidarse los siguientes aspectos de carácter didáctico:

Figura 10

PRIMERO DE BUP	CATEGORÍA 1	CATEGORÍA 2	CATEGORÍA 3
1	V	I2/3	I1/3
2	V	V	V
3	V	I1/3	NV
4	V	I2/3	I2/3
5	V	I1/3	V
6	V	I1/3	V
7	V	I1/3	V
8	I2/3	I2/3	NV
9	I2/3	I1/3	NV
10	I2/3	NV	NV
11	V	I1/3	I2/3
12	V	I1/3	I2/3
13	V	I2/3	NV
14	V	I1/3	I1/3
15	V	I2/3	NV
16	I1/3	NV	NV
17	I1/3	NV	I1/3
18	I1/3	I1/3	I2/3
19	I1/3	I1/3	NV
20	I1/3	NV	NV
21	I1/3	I1/3	NV
22	I1/3	NV	NV
23	V	I1/3	NV
24	V	NV	I2/3
25	V	NV	I1/3
26	V	NV	V
27	V	NV	I2/3
28	I2/3	I2/3	NV
29	V	NV	I2/3
30	I2/3	I2/3	I1/3
31	V	I1/3	V
32	I1/3	NV	NV
33	V	NV	I1/3
34	V	NV	I1/3
35	I1/3	NV	NV
36	V	NV	I2/3

SEGUNDO DE BUP	CATEGORÍA 1	CATEGORÍA 2	CATEGORÍA 3
1	I2/3	V	I2/3
2	I2/3	I2/3	V
3	V	V	I2/3
4	I2/3	V	I2/3
5	I2/3	V	I2/3
6	I2/3	I2/3	I1/3
7	I2/3	I2/3	V
8	I1/3	V	NV
9	I2/3	I2/3	V
10	V	I2/3	I1/3
11	V	I2/3	I2/3
12	I2/3	I1/3	I2/3
13	V	I1/3	NV
14	I1/3	I1/3	NV
15	I1/3	NV	NV
16	I2/3	V	NV
17	V	I1/3	V
18	V	V	NV
19	I1/3	I1/3	I1/3
20	I1/3	NV	NV
21	I1/3	NV	NV
22	I1/3	I1/3	I1/3
23	I1/3	I1/3	I1/3
24	I1/3	I1/3	NV
25	I1/3	I1/3	NV
26	I2/3	V	I1/3
27	I2/3	I2/3	I1/3
28	I1/3	I1/3	NV
29	I1/3	I1/3	I1/3

1) En la enseñanza-aprendizaje del álgebra (14-16) debe propiciarse el razonamiento inductivo mediante el uso de los aspectos visuales de las matemáticas.

Para ello deben proponerse tareas en las que los alumnos busquen las pautas y regularidades de sucesiones de diagramas. En dichas actividades, a partir de tres o más términos de la sucesión, el estudiante deberá construir el término siguiente, el término vigésimo... y, en casos favorables, el término general. También deben proponerse actividades en las que, partiendo de una secuencia de diagramas, se consiga la formulación de una ley general (p.e.: la suma de los cuadrados, la suma de los cubos, etc.). Existen numerosos ejemplos históricos en la matemática árabe, hindú y china que pueden servir de ayuda para confeccionar este tipo de material didáctico.

2) En la enseñanza-aprendizaje del álgebra (14-16) debe utilizarse el enfoque visual de las matemáticas para facilitar la comprensión de conceptos y procedimientos.

Para ello recomendamos el uso de materiales similares a los siguientes:

– Modelos geométricos bidimensionales para el estudio de polinomios de primer y segundo grado, y expresiones algebraicas (Bennet-Nelson 1988).

– Modelos geométricos tridimensionales para polinomios de segundo y tercer grado, y expresiones algebraicas (Ruthven 1989).

– Tableros de ecuaciones y balanzas para la comprensión del concepto de ecuación y para la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita y sistemas de ecuaciones lineales.

– Modelos geométricos, como el utilizado por al-Khowarizmi, para la resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

–Representación gráfica de algunas funciones elementales para la resolución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas.

3) En la enseñanza-aprendizaje del álgebra (14-16) debería propiciarse el uso de los aspectos visuales de las matemáticas para legitimar las demostraciones gráficas.

Por ejemplo, se puede utilizar un material manipulativo compuesto por piezas cuadradas y rectangulares de diversas dimensiones que, acopladas convenientemente, permiten demostrar (y descubrir) algunas expresiones algebraicas notables.

4) En la enseñanza-aprendizaje del álgebra (14-16) debe propiciarse el enfoque visual en la resolución de problemas algebraicos de enunciado verbal.

Para ello, siguiendo a Simon-Stimpson (1988), sugerimos que se trabaje en la siguiente línea:

– Inicialmente, los alumnos deben resolver, con diagramas, problemas aritméticos elementales con números naturales.

– Cuando los estudiantes son competentes en el uso de diagramas para resolver problemas aritméticos elementales con números naturales, pueden usarlos para resolver problemas que incluyan fracciones.

– A partir de aquí, los alumnos se iniciarán en la resolución con diagramas de problemas algebraicos de enunciado verbal. Este tipo de trabajo, además de desarrollar el conocimiento conceptual, fomenta la convicción de que las matemáticas tienen significado.

– Una vez que los alumnos han adquirido competencia en el uso de diagramas para resolver problemas algebraicos de enunciado verbal, necesitan experiencias que conecten sus representaciones gráficas con los símbolos del álgebra. Una forma de promover esta conexión consiste en traducir al lenguaje simbólico del álgebra el diagrama que han utilizado para resolver el problema. De este modo, el estudiante se convence de que las expresiones algebraicas sirven para representar de un modo más abstracto lo que inicialmente estaba representado en el diagrama.

Para acabar, hacemos nuestras las palabras de Dreyfus-Eisenberg (1986), ya citadas en este trabajo, en las que se aconseja que los currículos de matemáticas deben *desarrollar cada tema en los aspectos analíticos y visuales para que cada estudiante se enfrente al material de la manera que esté más próxima a su orientación cognitiva.*

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BENNET, A.B. y NELSON, T., 1988. *Mathematics: an activity approach.* (WM.C. Brown Publishers: Dubuque, Iowa).

DREYFUS, T. y EISENBERG, T., 1986. On visual versus analytical thinking in Mathematics. *Proceedings of the PME-10 Congress*, Vol. 1, pp. 153-158.

KIERAN, C. y FILLOY, E., 1989. El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica, *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), pp. 229-240.

KRUTETSKII, V.A., 1976. *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.* (University of Chicago Press: Chicago).

MOSES, B.E., 1977. The *nature of spatial ability and its relationship to mathematical problems solving*. Tesis doctoral. (Indiana University: Bloomington).

PRESMEG, N.C., 1985. The *role of visually mediated processes in high school mathematics: a classroom investigation*. Tesis doctoral. (University of Cambridge: Cambridge).

RUTHVEN, K., 1989. An exploratory approach to advanced Mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 20, pp. 449-467.

SIMON, M.A. y STIMPSON, V.C., 1988. Developing algebraic representation using diagrams. *The ideas of Algebra, K-12. National Council of Teachers of Mathematics*. 1988 Yearbook, pp. 136-141. (NCTM: Reston, VA).

SUWARSONO, S., 1982. *Visual imagery in the mathematical thinking of seventh-grade students*. Tesis doctoral. (Monach University: Melbourne).