

## **23. PENSAMIENTO VARIACIONAL: EL ESTUDIO DE LAS RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS EN CONTEXTOS DINÁMICOS**

Ferney Tavera Acevedo

Institución Educativa Escuela Normal Superior Genoveva Díaz

ftavera827@yahoo.es

Jhony Alexander Villa Ochoa

Universidad de Medellín

Universidad de Antioquia

javo@une.net.co

### **RESUMEN**

Este documento se elabora a partir de una revisión inicial de literatura donde se analizaron los Lineamientos Curriculares, los Estándares Básicos de Competencia y algunos estudios e investigaciones en el campo de la variación y la trigonometría. Desde los elementos teóricos observados en la literatura se hizo indispensable un análisis de algunos libros de texto frente al tipo de ejercicios que se proponía para abordar la trigonometría plana; de este análisis surgió la necesidad de diseñar propuestas alternativas en las cuales se haga hincapié en la visualización de relaciones funcionales entre los ángulos y los lados de un triángulo; de este modo, se espera aportar elementos para superar la idea de que las relaciones trigonométricas son “fórmulas” para calcular datos fijos y desconocidos de un triángulo.

**PALABRAS CLAVE:** Pensamiento Variacional, Relaciones Trigonómicas, Software GeoGebra

### **ABSTRACT**

This document devises from an initial review of literature where the Lineamientos Curriculares (Curriculum Guidelines) of Mathematics,



the Estándares Básicos de Competencia (Basic Standards of Competences) and some studies and researches were analyzed on the variation and trigonometry field. Based on the theoretical elements observed in the literature, an analysis of some textbooks set against the type of exercises proposed was done to undertake the plain trigonometry, from this analysis the need to develop alternative proposals which emphasize visualization functional relationships between angles and sides of a triangle was raised. In this way, it is expected to contribute elements to overcome the idea that trigonometry are “formulas” for calculating fixed and unknown data of a triangle.

**KEYWORDS:** Variational Thinking, Trigonometry, GeoGebra Software

## **INTRODUCCIÓN**

Este trabajo constituye un reporte parcial de investigación que se desarrolla en el marco de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de Medellín, en el cual se aborda la utilización del software GeoGebra para el estudio variacional de algunos tópicos de la trigonometría. Esta indagación se enmarca en una investigación más amplia titulada “Incorporación de nuevos medios por un colectivo de profesores-con-medios”, desarrollada por la Universidad de Medellín y cofinanciada por las Universidades de Antioquia y la UNESP-Brasil.

En el estudio que se reporta en este documento se pretende indagar por la manera como los estudiantes producen conocimiento matemático en algunos tópicos de la trigonometría desde una perspectiva variacional; en particular, se socializan los primeros hallazgos obtenidos a partir de una revisión de literatura tanto desde el pensamiento variacional como de la trigonometría misma; de igual manera, se propone y analiza algunas actividades que



pueden ser pertinentes para atender a las necesidades que surgen de la revisión anteriormente mencionada.

El pensamiento variacional. Algunos referentes teóricos

En primera instancia se revisaron las consideraciones del Ministerio de Educación Nacional con la publicación de los Lineamientos Curriculares (Colombia, 1998) y los Estándares Básicos de Competencia (Colombia, 2006); estos documentos proporcionan orientaciones frente al currículo del área de Matemáticas; asimismo, expresan, de forma implícita, algunas ideas para tener en cuenta en el estudio de la trigonometría.

Desde estos textos el Ministerio de Educación Nacional-MEN (Colombia, 1998, 2006) propone que el pensamiento variacional está en relación con “el reconocimiento, la percepción, identificación y caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como su descripción, modelación, y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos” (Colombia, 1998, p. 73). Para desarrollar este tipo de pensamiento se hace necesario propiciar en el aula de clase espacios para que los estudiantes exploren, reflexionen, deduzcan, conjeturen y planteen nuevas situaciones frente a relaciones dinámicas entre los conceptos matemáticos, en este caso del presente documento, interesan los conceptos que tienen que ver con algunos tópicos de la trigonometría. De otro modo, el MEN resalta que este tipo de pensamiento debe cumplir “un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las Matemáticas mismas” (Colombia, 2006, p. 66).



Por otra parte, Vasco (2006) considera que el pensamiento variacional va más allá de las interpretaciones clásicas del álgebra, en ese sentido, proporciona algunas ideas sobre lo que se puede entender por este tipo de pensamiento. Para tratar de ofrecer una descripción más específica de cómo se debe asumir el pensamiento variacional, él propone nuevos elementos para su desarrollo y establece algunas relaciones de entre este pensamiento, la modelación y la tecnología; de esa manera, puntualiza que este pensamiento puede describirse

[...] como una forma de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distinta magnitud en los subprocesos recortados de la realidad (p.138).

De acuerdo a esta mirada, se considera que la tecnología promueve alternativas muy diferentes a las convencionales (i.e. uso de papel y lápiz) sobre las cuales se pueden presentar los conceptos matemáticos (en este caso, aquellos que tienen que ver con algunos tópicos de trigonometría), de tal manera que su intervención sea percibida como una manera de indagar no solo por procesos asociados a la modelación; sino también, como una manera de producir y reproducir las relaciones variacionales que se pueden reconocer entre algunos objetos matemáticos (Villa y Ruíz, 2010).

Tanto desde los documentos expuestos por el Ministerio de Educación Nacional (Colombia, 1998, 2006) como desde los planteamientos de Vasco (2006) se observa un interés en el reconocimiento de la variación en otros contextos (i.e. numéricos, geométricos, métricos, algebraicos...). Teniendo estas consideraciones en mente se hizo una revisión de algunos libros de texto, de allí, se pudo observar que en varias oportunidades los libros textos “desaprovechan” algunas oportunidades para abordar relaciones dinámicas en el estudio de algunos tópicos de la trigonometría. Algunas evidencias sobre



esta aserción, se presentan en el apartado denominado “Algunos hallazgos en los libros de texto” desarrollado más adelante en este documento.

### **GEOGEBRA Y EL ESTUDIO VARIACIONAL DE LAS RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS**

El uso del software GeoGebra como una herramienta para potenciar el pensamiento variacional, ya ha sido tema de discusión por autores como Villa y Ruíz (2010), quienes señalan que en el diseño de situaciones para el aula de clase con auxilio del GeoGebra se ponen de relieve diferentes aspectos asociados al pensamiento variacional, entre ellos: captación y descripción de una relación, creación de una estrategia, construcción de herramientas, surgimiento de conjeturas, construcción de representaciones gráficas y algebraicas de tales relaciones, refutación o demostración formal de las conjeturas. Estos elementos resaltan el papel que tiene GeoGebra en la visualización de nociones asociadas a la variación, lo cual es posible gracias al ambiente dinámico que proporciona el software.

El software GeoGebra, por considerarse como un ambiente de Geometría Dinámica, se convierte en una herramienta que posibilita hacer visualmente explícito el dinamismo implícito de conceptos matemáticos. Leung (2008) entiende por dinamismo implícito aquellas actividades o razonamientos matemáticos que se emplean para comprender los conceptos abstractos de las matemáticas mediante algún tipo de “animación mental”, es decir, la visualización mental de las variaciones de objetos conceptuales de los que se espera “observar” patrones de variación o propiedades invariantes.

Basados en lo anterior, se observa que a través de un Ambiente de Geometría Dinámica (proporcionado por el software GeoGebra) es posible estudiar visualmente la variación de un aspecto de un



concepto matemático (en este caso, figuras en las que se puede observar relaciones trigonométricas) mientras otras se mantienen constantes. Es por esta situación, que Leung (2008) asume la variación como una esencia epistémica de la modalidad de arrastre; su objetivo se ve reflejado en el hecho de generar estrategias de arrastre para descubrir propiedades invariantes en medio de los diferentes componentes de una configuración geométrica. Es así, como la Geometría Dinámica requiere de otras funcionalidades que son expresadas desde el pensamiento métrico y el sistema de medidas, porque el software GeoGebra utiliza constantemente el comando “elige y mueve”, para acentuar los diferentes patrones de variación que pueden dar lugar a la aparición de patrones geométricos. Las ideas anteriormente estudiadas, parecen generar ciertos insights sobre cómo la variación puede contribuir al discernimiento del conocimiento propio de la trigonometría, porque proporciona descubrir escenarios distintos a los convencionales y observar algunas aplicaciones de la trigonometría fuera del ámbito escolar.

### **ALGUNOS HALLAZGOS EN LOS LIBROS DE TEXTO**

En segunda instancia se analizaron siete libros de texto, tanto de la Educación Media como universitarios, en los cuales se desarrollan los contenidos temáticos asociados a la trigonometría; esto fueron los siguientes: Serie Matemática Progresiva *Geometría Analítica y Trigonometría*, cuyos autores son Nelson Londoño y Hernando Bedoya (1988); *Matemática experimental 10* de Julio Alberto Uribe Cálad (1998); *Álgebra y Trigonometría* de Dennis Zill y Jacqueline Dewar (2000); *Álgebra y trigonometría con geometría analítica* de Earl Swokowski y Jeffery Cole (2002). *Matemáticas previas al cálculo*, cuyos autores son Francisco Mejía Duque, Rafael Álvarez Jiménez y Horacio Fernández Castaño (2005); *Matemáticas básicas*



*con aplicaciones a las ciencias económicas y afines* de Rafael Álvarez Jimenez, Horacio Fernández Castaño y José Alberto Rúa Vásquez (2009); *Hipertexto Matemáticas 10* de la Editorial Santillana (2010).

La selección de estos textos se hizo atendiendo a que son libros que generalmente se referencian por los profesores como bibliografía básica para los cursos de Matemática en la Educación Media (15 - 18 años) o para los primeros semestres de universidad. Esta revisión se hizo, en parte, porque habitualmente los libros de texto pueden ser considerados como mediadores curriculares, que son utilizados por el docente de Matemáticas para orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje en los estudiantes en las aulas de clase.

En los libros de texto analizados se encontró la siguiente regularidad: La mayoría de los ejercicios y tareas se orientan a la solución de problemas, donde hay que hallar el valor numérico de una distancia o de un ángulo en un triángulo en el cual los demás datos están dados. Así mismo se desaprovechan los contextos de los ejercicios planteados para hacer un estudio de las relaciones variacionales entre las cantidades que en ellas intervienen; en otras palabras, las medidas a determinar se muestran como incógnitas observadas como cantidades desconocidas que permanecen “fijas” y no como cantidades variables sobre las cuales se pueden establecer ciertas relaciones funcionales.

De otro modo, en la revisión de los textos observamos un uso constante de fórmulas, caracterizado por un dominio algebraico y procedimental, que hace énfasis en el manejo apropiado de símbolos, operaciones y propiedades y, en ocasiones, se desatiende al reconocimiento de las nociones dinámicas que se presentan en algunos tópicos de la trigonometría. A continuación transcribimos algunos “problemas” y mostramos la “desarticulación” que se presenta entre ellos y el desarrollo del pensamiento variacional:



1. Desde un punto al nivel del suelo y a 135 pies de la base de una torre, el ángulo de elevación a la parte más alta de la torre es  $57^{\circ}20'$ . Calcular la altura de la torre.
2. Si los rayos del sol forman un ángulo de  $65^{\circ}$  con el suelo y la sombra de un mástil es de 86 cm ¿cuál es la altura del mástil medido en metros?
3. Dos barcos son contratados para remolcar un barco petrolero que está varado en el océano; despliegan sus cables que tienen longitudes de 500 m y 524 m respectivamente, si están distanciados 300 m, ¿cuál es el ángulo entre los cables?
4. Cuando el ángulo de elevación del Sol es de  $64^{\circ}$ , un poste de teléfono inclinado a un ángulo de  $9^{\circ}$  en dirección opuesta al Sol arroja una sombra de 21 pies de largo a nivel del suelo. Calcula la longitud del poste.
5. Dos hombres que están en un campo llano y se encuentran separados a una distancia de 300 metros uno del otro, observan mutuamente un helicóptero. Sus ángulos de elevación respecto al objeto volador son  $60^{\circ}$  y  $75^{\circ}$ . Determinar la altura a la cual se encuentra el helicóptero.
6. La distancia entre la meta y un hoyo particular de golf es de 380 m. Un golfista le pega a la pelota y la coloca a 215 m. Desde el punto donde está la pelota ella mide un ángulo de  $165^{\circ}$  entre la meta y el hoyo. Encuentre el ángulo de su lanzamiento

Se observa que este tipo de “ejercicios” ocupan la parte de las aplicaciones de las relaciones trigonométricas en los libros de texto analizados y no encontramos otro tipo de “problemas” que ofrezcan la descripción de una relación funcional entre los lados y los ángulos de un triángulo. Estos primeros hallazgos ponen de relieve la necesidad de establecer nuevas relaciones en las cuales los conceptos matemáticos se observen de una manera dinámica.





En ese sentido, el uso del software GeoGebra, se muestra como una herramienta importante para resaltar nociones de tipo variacional (Villa-Ochoa y Ruiz, 2010), porque brinda la posibilidad de vivenciar de manera experimental los conceptos y propiedades que hace poco solo se manejaban desde el papel bajo ideas en abstracto.

### **A MANERA DE PROPUESTA**

Teniendo en cuenta los elementos anteriormente planteados se genera un especial interés por el estudio de las relaciones trigonométricas desde una perspectiva variacional; para ello se utiliza el software GeoGebra, atendiendo a que una de sus principales ventajas consiste en que las figuras pueden dejar de abordarse de manera estática e incluso facilita la interacción con ellas modificando ciertas condiciones en su diseño. Estos elementos sugieren preguntas sobre la manera de integrarlos al diseño de ambientes de intervención en el aula, frente a ello surge el siguiente interrogante:

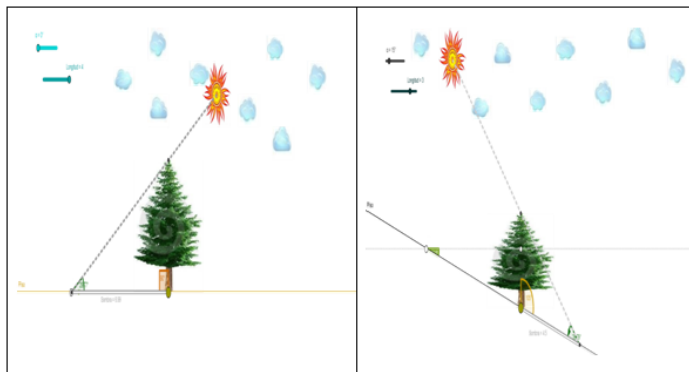
¿Cómo explorar relaciones trigonométricas desde una perspectiva variacional a través del software GeoGebra?

Como una manera de aproximarse a esta pregunta presentamos, a manera de ejemplo, la actividad denominada “Las Sombras del Árbol” (ver Figura 1), donde actúa como escenario para observar algunas relaciones funcionales o dinámicas entre cantidades, en un problema propio de trigonometría. Esta actividad se empieza a desarrollar cuando dos personas discuten sobre la medida de la sombra de un árbol; para ello, es necesario simular los rayos solares, para poder visualizar con claridad como cambia dicha sombra. Para realizar ésto, los estudiantes han de fijar un triángulo, que puede ser rectángulo u obtusángulo dependiendo de la inclinación del terreno, la cual es proporcionada por el deslizador  $\alpha$  (alpha) en la figura. De manera particular, los elementos que varía en la situación son:



- El ángulo de elevación del terreno: proporcionado por el deslizador  $\alpha$  (alpha) que se encuentra en la parte superior izquierda de la ventana. Este deslizador puede funcionar como un parámetro, el cual se “fija” para poder determinar el tipo de triángulo y la variación entre los lados y los ángulos del triángulo (ver Figura 1).
- El ángulo de inclinación del árbol. Este ángulo está determinado por la superficie (piso) y el árbol; dicho ángulo siempre estará en función del ángulo  $\alpha$  (alpha) y, por tanto, también puede funcionar como un parámetro.
- La posición de sol. La situación incorpora el movimiento del sol el cual se desplaza por una línea horizontal generando, a su vez, una variación del ángulo formado por la superficie (piso) y los rayos solares y, de la misma manera, la variación de la sombra proyectada por el árbol sobre la superficie.
- Longitud del árbol. En esta situación la longitud del árbol puede cambiar de acuerdo al deslizador “longitud”, que se muestra en la parte superior izquierda de la Figura 1.

Figura 1: Construcción gráfica de la variación en un problema de Trigonometría



Fuente: Elaboración de los autores



La situación está diseñada para abordarse en varios momentos: en un primer momento el ángulo  $\alpha$  (alpha) se fija en  $0^\circ$  (cero grados) generando una relación de covariación entre la sombra del árbol y el ángulo de elevación formado por los rayos de sol y la superficie. En este primer momento el estudio se reduce a establecer dicha covariación se describe mediante la relación trigonométrica tangente.

En un segundo momento, el ángulo  $\alpha$  (alpha) puede variar y, en estos casos, la covariación entre la sombra y el ángulo formado por los rayos del sol y la superficie origina un triángulo no rectángulo lo que conduce al estudio de otras propiedades de la trigonometría plana, a saber, las leyes del seno y del coseno.

En cada momento de la situación están presente preguntas como: ¿Qué cantidades varían?, ¿cómo varían? ¿en cuánto varían? Y con la ayuda de las tablas y los gráficos proporcionados por el software GeoGebra se construye una visión más amplia sobre la situación de variación.

### **CONSIDERACIONES FINALES**

Con los elementos propuestos en este documento se espera proporcionar espacios alternativos en los cuales los estudiantes puedan acceder al estudio de relaciones dinámicas entre cantidades los ángulos y los lados de triángulos rectángulos y oblicuángulos; de esa manera, las relaciones trigonométricas y las leyes del seno y del coseno podrían adquirir significados que vayan más allá de unas “fórmulas para calcular valores fijos pero desconocidos”. Con este tipo de estrategias se espera cimentar el posterior estudio de las funciones trigonométricas las cuales generalmente se introducen con el estudio de la función circular y otros elementos de la trigonometría analítica



## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Álvarez, R., Fernández, H. y Rúa, J. (2009). Matemáticas básicas con aplicaciones a las ciencias económicas y afines. Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín.
- [2] Borba, M., & Penteado, M. (2010). Informática e Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica.
- [3] Borba, M., & Villareal, M. (2005). Humans-with-Media and the reorganization of mathematical thinking. New York: Springer.
- [4] Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (1998). Lineamientos Curriculares del área de Matemáticas. Santa Fe de Bogotá: Magisterio.
- [5] Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2006). Estándares Básicos de Competencia. Bogotá: Magisterio.
- [6] Leung, A. (2008). Dragging in a Dynamic Geometry Environment Through the Lens of Variation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 13(2), 135 - 157.
- [7] Londoño, N. y Bedoya, H. (1988). Serie Matemática Progresiva "Geometría Analítica y Trigonometría". Santa Fe de Bogotá: Norma.
- [8] Mejía, F., Álvarez, R. y Fernández, H. (2005). Matemáticas previas al cálculo. Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín.
- [9] Swokowski, E. y Cole, J. (2002). Álgebra y trigonometría con geometría analítica (Décima ed.). Mexico: Thomson Learning.



- [10] Uribe, J. (1998). *Matemática Experimental 10*. Santa Fe de Bogotá: Uros Editores.
- [11] Vasco, C. (2006). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En C. Vasco, *Didáctica de las Matemáticas: Artículos selectos* (pp. 134 - 148). Santa Fe de Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- [12] Villa, J. y Ruiz, M. (2010). Pensamiento variacional: seres-humanos-con GeoGebra en la visualización de nociones variacionales. *Educação Matemática Pesquisa*, 10(3), 514-528.
- [13] Zill, D. y Dewar, J. (2000). *Álgebra y Trigonometría*. Santa Fe de Bogotá: McGraw - Hill.