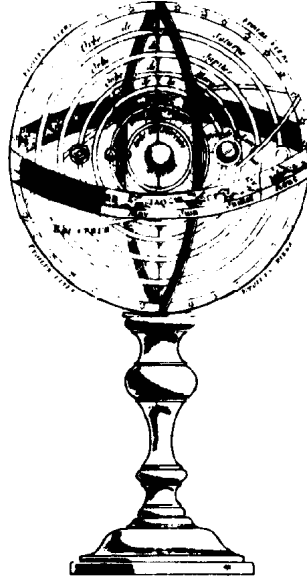


# INNOVACIONES DIDÁCTICAS



---

## INTRODUCCIÓN DE LAS TÉCNICAS DE MODELIZACIÓN PARA EL ESTUDIO DE LA FÍSICA Y DE LAS MATEMÁTICAS EN LOS PRIMEROS CURSOS DE LAS CARRERAS TÉCNICAS

SÁNCHEZ-PÉREZ, E.A.<sup>1</sup>, GARCÍA RAFFI, L.M.<sup>1</sup> y SÁNCHEZ-PÉREZ, J.V.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Matemática Aplicada. Universidad Politécnica de Valencia.

<sup>2</sup>Departamento de Física Aplicada. Universidad Politécnica de Valencia.

---

### SUMMARY

In this article we present a program of interdisciplinary practices for a first engineering course. We followed this program during the course 1996-1997, and we give several examples of the kind of exercises that we used. We also present some remarks and conclusions that we have achieved in our experience. Our purpose is to introduce a teaching strategy for Mathematics and Physics at the University level.

---

## INTRODUCCIÓN

La concepción tradicional de la enseñanza de las ciencias básicas en las escuelas superiores de ingeniería españolas asigna un papel formativo puramente teórico a las asignaturas de matemáticas y física que se imparten en estas escuelas en los primeros cursos. Según este punto de vista, el objetivo que se pretende alcanzar es la transmisión de ciertos contenidos que deben formar parte del bagaje conceptual de los futuros ingenieros. Para ello, la metodología docente que se considera adecuada es la explicación mediante clases magistrales de un dilatado temario, en la que el estudiante se considera un sujeto pasivo que debe asimilar las ideas «de forma natural», y mediante el estudio personal de los textos recomendados. Este planteamiento didáctico, que no se da exclusivamente en las escuelas de ingeniería, sino que es también propio de la metodología docente de otros estudios científico-técnicos universitarios, tiene su origen, en nuestra opinión, en una concepción de la educación universitaria como la culminación de un proceso formativo basado en la transmisión de conocimientos (Gil et al., 1991).

Esta situación se ve particularmente agravada en el caso de las matemáticas, donde, y sobre todo en el nivel universitario, sigue reinando el enfoque formalista y estructuralista en la enseñanza que a principios de los años setenta dio como fruto la implantación de las llamadas «matemáticas modernas» en la educación primaria. Este enfoque, en opinión de Núñez y Font (1995), se caracteriza por un deductivismo exagerado, un exceso de formalización y generalización, y una presentación de las matemáticas centradas sobre ellas mismas, sin referencias a otras ciencias. En los niveles educativos superiores, es, en parte, lo que Hernández (1995) denomina la «euclideanización» de la enseñanza de las matemáticas en las universidades, en referencia a la presentación axiomática de los contenidos –como en *Los elementos de Euclides*–, donde el pensamiento lógico-deductivo se considera como la herramienta incuestionable y única válida para la segura adquisición de los conocimientos matemáticos (Corral 1995; Sáenz de Castro 1995). Sin embargo, gran parte de los descubrimientos en matemáticas han sido el resultado del desarrollo de determinadas técnicas en un contexto concreto, generalmente relacionado con otras ciencias. Como ejemplo, podemos citar la aparición del cálculo infinitesimal asociado a la mecánica en el trabajo de Newton. Por otra parte, la desaparición en la enseñanza de las conexiones de las matemáticas con otras disciplinas puede privarla de sus características básicas desde el punto de vista científico, haciendo más difícil su comprensión para los estudiantes.

Además, generalmente se atribuye a los estudiantes universitarios la madurez intelectual y metodológica necesaria para comprender e integrar los nuevos conceptos, dedicando poca o ninguna atención a la contextualización de los conocimientos avanzados. Sin embargo, actualmente gran parte de los investigadores en didáctica de las ciencias reconoce que la descontextualización es uno de los problemas centrales en la comprensión de

los conceptos matemáticos y, en general, de las teorías científicas (Núñez y Font 1995; Gil et al., 1991). En nuestra opinión, éste es también uno de los problemas de la enseñanza de las matemáticas y la física en los primeros cursos de las universidades españolas, especialmente en las escuelas de ingeniería, donde los alumnos en muchas ocasiones no comprenden la necesidad de una formación científica sólida. Esto se debe en gran medida, a nuestro juicio, a la ideología pragmática dominante respecto a su propia formación («esto para qué sirve»), que algunas veces se ve reforzada por las opiniones de un sector amplio del profesorado. Por otra parte, la actitud clásica de los profesores de las disciplinas puramente científicas, que muchas veces proyectan sobre su docencia una concepción simplista de la ciencia como una estructura lógica inalterable y completa (Gil et al., 1991), hace difícil establecer un punto de encuentro ideológico que permita el equilibrio entre las expectativas de los alumnos y el criterio de los enseñantes. En este contexto, la introducción de metodologías didácticas que podrían ser *a priori* deseables –como la llamada *enseñanza para un cambio conceptual* (Duschl 1995; Hewson y Beeth 1995)– y de concepciones globales novedosas sobre la educación –como la interacción *ciencia, tecnología y sociedad* (Gil et al., 1991)– se hace difícil, cuando no imposible. Otros factores, como la propia organización administrativa de las escuelas, también influyen negativamente en la adopción de nuevas metodologías de trabajo, dificultando la colaboración entre los departamentos, elemento fundamental para el desarrollo de ciertas actividades interdisciplinarias que consideramos necesarias para la contextualización de las matemáticas y la física. Volveremos sobre este particular más adelante.

A grandes rasgos, ésta es la situación en la que nos encontramos en nuestra Universidad, aunque pensamos que nuestras opiniones serán compartidas por profesores de otros centros españoles similares. La concepción tradicional de la enseñanza de las ciencias a la que hacíamos referencia en el primer párrafo se ha convertido en un lastre difícil de llevar para los departamentos encargados de impartir la docencia de ciencias básicas. Esto se debe fundamentalmente a la desmotivación de los alumnos y a la disminución de los créditos asignados a las disciplinas que podríamos denominar de ciencias puras en los nuevos planes de estudios. Frente a estas nuevas exigencias, los profesores implicados activamente en la docencia de estas asignaturas tenemos la obligación de replantearnos nuestra metodología de trabajo, bien simplemente para reducir los contenidos de nuestros temarios, o bien para ofrecer nuevas opciones cuya aplicación demuestre la efectividad de una buena formación en física y matemáticas para los futuros ingenieros y optimice el tiempo dedicado a este fin. En nuestro caso, hemos optado por poner en marcha una alternativa a la estructuración clásica de las clases y de las relaciones interdepartamentales, que implica a los alumnos de forma más activa en su formación, y, como intentaremos demostrar en este artículo, de forma más eficaz. Pretendemos generar en los estudiantes actitudes positivas hacia las matemáticas y favorecer los procesos de integración entre las diferentes disciplinas. No debe-

mos olvidar que, además de la importancia que tienen los conocimientos científicos desde el punto de vista instrumental para los estudiantes de ingeniería, la ciencia es uno de los elementos fundamentales de la cultura actual.

El contexto teórico en el que definimos nuestra actuación propone un giro hacia *orientaciones constructivistas*. Pretendemos que nuestros alumnos construyan sus propios conocimientos, a partir de sus propias concepciones y de los conceptos adquiridos en la educación secundaria, implicándose para ello en una actividad investigadora (Gil et al., 1991). Aunque en la actualidad existe, al parecer, un cierto consenso hacia la aceptación de este tipo de planteamientos por parte de muchos investigadores de la didáctica de las ciencias, es posible encontrar gran cantidad de antecedentes históricos de esta orientación (Gil et al., 1991; Núñez y Font, 1995). En particular, a finales de los años setenta, después del fracaso del programa basado en las «matemáticas modernas», al cual hemos hecho referencia anteriormente, aparecieron en España algunos grupos de trabajo que introdujeron en los niveles primario y secundario de la enseñanza este tipo de planteamientos. Por ejemplo, los siguientes objetivos específicos para la educación matemática aparecen, entre otros, en la *Guía del profesor* presentada por el Grup Zero en el año 1978 (Núñez y Font, 1995). Desde nuestro punto de vista, son perfectamente aplicables en la actualidad, entendiéndolos en nuestro contexto universitario:

- «Ofrecer una imagen de las matemáticas como instrumento de trabajo y análisis.»
- «Hacer unas matemáticas con capacidad de responder a la pregunta «¿Esto para qué sirve?»; las motivaciones no pueden ser, por tanto, de origen matemático, sino que han de atraer al alumno en el momento en que las estudia. Los conceptos matemáticos han de tener un soporte real.»
- «Romper el aislamiento de las diferentes disciplinas.»

El objetivo de este artículo es la exposición de una experiencia didáctica llevada a cabo en este sentido en la Escuela Técnica de Obras Públicas de la Universidad Politécnica de Valencia. La situación actual, en cuanto a la organización de la enseñanza en nuestra universidad, sólo nos permite modificar parcialmente la estructura de la docencia de nuestras asignaturas, por lo que nos vemos obligados a restringir nuestras actividades básicamente al ámbito de las clases de prácticas. No obstante, la realización de estas actividades no se plantea sólo como algo complementario a la docencia tradicional dividida en clases de teoría y clases de problemas de las tres materias. Se trata de hacer también un esfuerzo para presentar coordinadamente los contenidos teóricos de las asignaturas, intentando evitar las repeticiones y los desfases temporales en la introducción de los conceptos (Checa et al., 1997, Vol. I y II).

En particular, nuestra experiencia consiste en la realización de unas prácticas conjuntas de mecánica, álgebra y cálculo, utilizando contenidos de primer curso en estas

materias, pero cuyo planteamiento está basado en problemas ingenieriles, simplificados, pero de contenido fundamentalmente real. La simplificación de los problemas no debe interpretarse como una desviación que nos aleja del estudio de la ciencia, puesto que en realidad constituye una necesidad. De hecho, en el contexto de la metodología de la investigación científica, este proceso se debe tener en cuenta, y puede ser una fuente desde el punto de vista de la enseñanza de nuevas situaciones problemáticas y enriquecedoras. Se trata de que los estudiantes asuman la conveniencia –y, en ocasiones, la necesidad– de entender los conceptos de las asignaturas de matemáticas y física como herramientas para una mejor comprensión de las técnicas propias de la ingeniería, dentro del contexto de la modelización matemática de problemas físicos. Este tipo de «proyecto» ha sido propuesto por otros profesores como un instrumento que se debe tener en consideración para el aprendizaje significativo en el nivel universitario (Hernández 1995). Para ello, nuestra idea consiste en implicar al alumno en la selección y resolución de problemas/proyectos de interés cercanos a su futura actuación como ingenieros, de carácter interdisciplinar, utilizando la física y las matemáticas aprendidas en el primer curso. Los alumnos deben enfrentarse a un problema «real», y tratar de estudiarlo utilizando los conocimientos adquiridos durante el curso (Sánchez-Pérez, 1997). El tipo de material utilizado no pretende que los alumnos resuelvan de forma mecánica un problema, sino que se esfuercen en primer lugar en describir los sistemas mediante las ecuaciones que consideren oportunas, siempre en el contexto teórico indicado. Esta actividad es lo que entendemos en nuestro contexto por *modelización*. La libertad para plantear sus propios modelos depende en gran medida de la naturaleza del problema, de forma que en algunos casos se presentan en el mismo material las estrategias óptimas para su resolución. No obstante, hemos intentado que en todas las prácticas aparezca siempre, aunque en ocasiones en forma de actividades complementarias, la posibilidad de plantear de manera creativa propuestas alternativas de resolución.

Esta propuesta no es nueva, existiendo en la literatura científica nacional y extranjera numerosos ejemplos de estas actividades, e incluso instituciones cuyos planteamientos de trabajo se basan fundamentalmente en ellas (Frey et al., 1989). Los profesores implicados en este programa –los tres autores de este artículo– somos los responsables de las asignaturas de cálculo, álgebra y mecánica, y hemos trabajado conjuntamente, tanto en la programación y ejecución del proyecto como en el análisis y valoración posterior de la experiencia didáctica. Nuestros objetivos al poner en marcha este programa se sitúan a *tres niveles*:

a) Principalmente, constituye un intento de optimizar el esfuerzo dedicado a la formación científica de los ingenieros, actuando sobre las actitudes negativas que muchos estudiantes presentan tradicionalmente hacia nuestras asignaturas. Esto se hace desde dos puntos de vista: intentando contextualizar los conocimientos adquiridos, y fomentando la participación activa de los alumnos en su formación. El objetivo último es el de conseguir un

cambio actitudinal con respecto a las matemáticas y la física (Gil et al., 1991), y, en consecuencia, una mejora en el proceso de enseñanza y aprendizaje de dichas materias. En este artículo presentamos la organización de nuestra experiencia y el material utilizado.

b) Por otra parte, constituye una posible vía de optimización de recursos con relación a la disminución del tiempo lectivo dedicado a las ciencias básicas en los nuevos planes de estudio universitarios que se están poniendo en marcha en los últimos años. Hemos comprobado que la utilización del tiempo dedicado a las prácticas de matemáticas y el aula de informática de la escuela para este proyecto resulta beneficiosa tanto en la optimización del tiempo invertido como en la actitud de los alumnos. Es un hecho normalmente aceptado –y que nosotros hemos podido comprobar– que la utilización de ordenadores en la docencia universitaria aumenta el interés de los alumnos, y, por lo tanto, el rendimiento del proceso educativo, además de familiarizarlos con el ordenador como herramienta tecnológica indispensable para la labor profesional del ingeniero.

c) Por último, se pretende el establecimiento de algunos parámetros válidos para la comprobación del efecto real de nuestro trabajo sobre el aprendizaje de nuestros alumnos (evaluación). Con relación a este último objetivo, debemos reconocer que los datos estadísticos que presentamos en este trabajo no son ni concluyentes ni definitivos. Pero, en nuestra opinión, indican una tendencia positiva en cuanto a la mejora de la docencia. Representan sólo el comienzo de un programa de trabajo que estamos convencidos de que demostrará su eficacia dentro de algunos años.

Como hemos comentado, la realización de estas prácticas, utilizando el *ordenador* como herramienta, tiene algunas ventajas derivadas exclusivamente de la introducción de estas nuevas técnicas en la práctica docente. Por ejemplo, permite plantear cálculos adecuados al nivel del curso pero imposibles de hacer en la clase de problemas por su dimensión, introducir el cálculo numérico de forma cómoda y natural o utilizar las representaciones gráficas como apoyo para la mejor comprensión de los conceptos abstractos de las matemáticas. Hemos observado que las definiciones y resultados en cuya explicación se hace uso de argumentos geométricos –la derivada como pendiente de una recta, la integral como área– suelen ser mejor y más rápidamente comprendidos por los estudiantes si se les da la oportunidad de trabajar sobre los problemas planteados con un programa que les permita construir fácilmente este tipo de elementos de apoyo. Por otra parte, su interés por los temas explicados aumenta, en general, cuando utilizan individualmente un ordenador para la resolución de problemas relacionados. Aunque el análisis de la influencia de la informática en la docencia de las matemáticas y la física no es el objeto de nuestro estudio, el lector interesado podrá encontrar numerosos artículos en la literatura que tratan de este asunto, aunque probablemente todavía no se dispone de datos suficientes para poder establecer pautas de actuación docente definitivamente establecidas (Sáenz de Castro, 1995; Andaloro et al., 1991).

Este plan de trabajo, exactamente tal y como se presenta aquí, ha sido aplicado en el curso 1996-97 en la Escuela Técnica de Obras Públicas, aunque en los cursos 1994-95 y 1995-96 también se realizaron actividades similares. Como fruto de esta experiencia previa, nuestro grupo consiguió valorar la utilidad y la eficacia del tipo de material de trabajo que se expone con posterioridad, aunque sólo parcialmente y nunca de forma sistemática. De hecho, el material propuesto para las prácticas ha sido diferente, aunque no sustancialmente, en los cursos 1994-95, 1995-96 y 1996-97. Pensamos además que debe modificarse todos los cursos para aumentar su adecuación.

A continuación, presentamos los elementos que consideramos fundamentales desde el punto de vista práctico para la realización de esta experiencia. En el apartado siguiente expondremos la programación particular del curso 1996-97.

1. *Material*: Se facilita a los alumnos una colección de ejercicios prácticos, en cuyos contenidos entraremos posteriormente, de los cuales cada grupo de trabajo debe seleccionar al menos uno, según sus preferencias. Como hemos comentado anteriormente, se trata de que los proyectos tengan un perfil que permita identificar, a un nivel elemental, el trabajo realizado con el que esperan desarrollar los estudiantes en su futuro profesional. Puesto que en la actualidad no era posible encontrar libros de texto en la bibliografía que se ajustaran exactamente a nuestras exigencias, hemos preparado nuestros propios materiales de trabajo, tal y como hemos comentado anteriormente, que están a disposición de los alumnos. Por una parte, un texto de teoría y ejercicios en el que se presentan progresivamente y de forma conjunta los temarios de las tres asignaturas, utilizando una notación única y haciendo tantas referencias cruzadas como hemos considerado necesario (Checa et al., 1997). Por otra parte, un libro de prácticas estructurado exactamente según la programación del curso y cuyos contenidos responden a la filosofía que se ha comentado (Sánchez-Pérez et al., 1997). Se trata, por lo tanto, de un texto en el que la mayor parte de las prácticas propuestas consisten en problemas de modelización, planteados para que en ellos aparezcan exclusivamente los contenidos explicados en las tres asignaturas.

2. *Otros instrumentos de trabajo*: Las prácticas se desarrollan en el aula de informática, utilizando asistentes matemáticos (en nuestro caso, el programa Derive), tratamientos gráficos y de texto. Los alumnos deben preparar el material que se les facilita previamente y, si es necesario, concluir su trabajo después de la sesión correspondiente.

3. *Organización interdepartamental*: Las actividades implican a los departamentos de física y de matemáticas de la escuela, y repercuten en las calificaciones de los alumnos en las asignaturas correspondientes. Por lo tanto, los profesores implicados de ambos departamentos deben tutorizar a los alumnos en aquellos problemas que se les presenten, independientemente de las sesiones realizadas en el aula de informática.

4. *Grupos de trabajo*: Se pretende que los alumnos tengan la posibilidad de seleccionar a algunos compañeros para realizar su labor, con el fin de que la reflexión común y la discusión de los problemas les facilite su resolución. Debe tenerse en cuenta que, cada vez más, la actividad científica y el desarrollo tecnológico son actividades colectivas, en las que el trabajo individual y aislado deja de tener sentido. En nuestro caso establecimos un máximo de tres estudiantes por grupo.

## DESCRIPCIÓN DEL CURSO DE PRÁCTICAS

Teniendo en cuenta que el curso de primero de Obras Públicas en el plan de estudios antiguo, que es en el contexto en el que se han desarrollado estas experiencias, tiene duración anual, la *programación y la metodología de trabajo* aplicadas en el curso de prácticas es la que se detalla a continuación. Todos los alumnos del primer curso de la escuela de Obras Públicas que cursaban por primera vez las tres asignaturas implicadas (aproximadamente 90) realizaron estas prácticas. Los tres profesores implicados en este proyecto fueron también los encargados de la docencia en las sesiones de prácticas.

1) En la primera parte del curso nuestra intención es asegurarnos de que nuestros estudiantes dominan los conocimientos básicos imprescindibles para poder comenzar a trabajar con los problemas aplicados que se les propondrán. Durante los dos primeros trimestres del curso, se realizan tres prácticas de contenido estrictamente matemático o con referencias a problemas muy concretos de mecánica, con el fin de que los alumnos aprendan a trabajar con el asistente matemático que se haya seleccionado. Se pretende que los alumnos aprendan a resolver, utilizando toda la capacidad de los programas asistentes, los ejercicios que corresponden a los temarios de los cursos de álgebra y cálculo, y, en algunos problemas particulares, de mecánica.

Las clases de prácticas, a las que se convocan aproximadamente veinte alumnos por sesión, tienen una duración de dos horas y se realizan en el aula de informática de la escuela. La metodología utilizada es la siguiente: la clase se divide en grupos de trabajo de dos o tres personas, que atienden a las explicaciones de los profesores en primer lugar, y luego pasan a realizar los ejercicios propuestos en el texto de prácticas antes citado. El conjunto de ejercicios seleccionados en cada práctica es bastante grande; además se pretende que los alumnos respondan a una serie de cuestiones de tipo más teórico que requieren consultas bibliográficas. Esto hace que los alumnos tengan que acudir otros días al aula de informática y a la biblioteca para completar el trabajo. En este momento, los estudiantes deben realizar una memoria con los ejercicios y las cuestiones resueltas, que deberán entregar a final de curso.

Un ejemplo del tipo de cuestiones al que deben responder los alumnos es la siguiente. Después de estudiar la integral de Riemann y de utilizar un comando propio de

Derive llamado Left-Riemann que calcula las sumas de Riemann asociadas a una función en un intervalo compacto por un procedimiento determinado, se plantea la siguiente cuestión: «Left-Riemann calcula la suma de Riemann utilizando los valores de la función en los extremos izquierdos de cada subintervalo generado por la partición P (definida previamente). Siguiendo el mismo modelo, define una función Right-Riemann.»

2) Después de realizar estas sesiones –aproximadamente en el mes de marzo–, cada grupo de trabajo establecido debe seleccionar una *práctica de modelización*. El libro de prácticas contiene, además de las tres generales ya comentadas, seis prácticas de aplicación de los conceptos adquiridos de matemáticas y mecánica a problemas simplificados de ingeniería, cuyo contenido comentaremos exhaustivamente a continuación. Cada grupo de trabajo debe seleccionar libremente y resolver una de ellas, según sus preferencias. Seguidamente, expondremos con detalle los contenidos de cada una de estas prácticas, estudiando en cada caso cómo se ha pensado cada ejercicio dentro del siguiente esquema:

a) Se plantea un problema abierto, con varios apartados, relacionado lo más directamente posible con un problema real de ingeniería.

b) Se analizan detalladamente cuáles son los contenidos físicos que están en la base del problema.

c) Se reflexiona acerca de cuáles son las técnicas matemáticas más adecuadas –que al igual que los contenidos físicos son ya conocidos en esas fechas por los estudiantes– para la modelización y posterior resolución del problema.

d) Se plantean algunas cuestiones que se deben responder una vez resuelto el problema, algunas de las cuales pretenden afianzar los conocimientos teóricos adquiridos en la resolución, mientras que otras proponen ligeras modificaciones del problema original para que los alumnos utilicen estas técnicas de forma creativa en otros contextos próximos.

Las prácticas se detallan a continuación, aunque a título de ejemplo sólo expondremos de forma exhaustiva la primera de ellas siguiendo el esquema siguiente:

### Estudio de la evolución anual del nivel de agua acumulada en un embalse

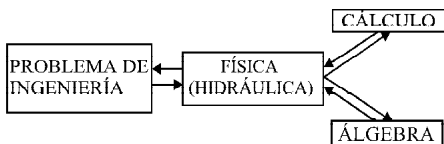
a) Como datos de este problema se dan los  $\text{hm}^3/\text{mes}$  medidos en la cabecera del embalse de Sitchar en la Provincia de Castellón a lo largo de un período de varios años. El problema que deben abordar los estudiantes es la obtención de las ecuaciones matemáticas que describan de forma precisa la evolución de la cantidad de agua en el embalse, teniendo en cuenta las necesidades de abastecimiento (salidas) y los ciclos de lluvias anuales (entradas). La comprensión de estas ecuaciones debe permitir al estudiante intervenir en el modelo en una serie de situaciones ficticias que se plantean en aparta-

dos posteriores para dar respuesta a los problemas de *abastecimiento que pueden aparecer en estos casos.*

b) En esta situación, para la resolución del ejercicio, el alumno tiene que conocer las ecuaciones que sirven para representar el balance de entradas y salidas de agua. En el modelo sugerido, las entradas se consideran como un único sumando, mientras que para las salidas aparecen dos sumandos, uno con el fin de cubrir las necesidades de las poblaciones de la comarca próxima para consumo propio y agricultura, y otro relacionado con la necesidad de trasvasar agua a otras comarcas.

c) Las técnicas matemáticas propuestas son la interpolación, el ajuste por mínimos cuadrados de un conjunto de datos a una base de funciones dada y la integración numérica de funciones de primitiva no conocida. En este punto, el alumno debe construir el modelo que represente correctamente el sistema. En este proceso de construcción, nuestra intención es que los estudiantes reflexionen sobre la naturaleza del problema y lo entiendan en toda su magnitud para luego poder utilizar su propia respuesta en el siguiente apartado. Por ejemplo, se pretende que entiendan las diferencias matemáticas entre interpolación y ajuste como resultado de las distintas predicciones que se obtienen a partir de ambos modelos.

d) Por último, los estudiantes deben responder a una serie de preguntas relacionadas. Por ejemplo, en qué mes alcanza el embalse su nivel máximo, o qué cantidad de agua quedará a final de año. También se plantean cuestiones cuya intención es obligar al estudiante a utilizar realmente el modelo para dar solución a alguna contingencia. Por ejemplo: «Suponiendo que se hace un trasvase de agua especial en el mes de agosto, calcular la cantidad de agua que se puede trasvasar para que el agua embalsada a final de año sea superior al 5% de los aportes de todo el año».



| HIDRÁULICA         | CÁLCULO   | ÁLGEBRA  |
|--------------------|---|--|
| - Balance de flujo | - Cálculo diferencial e integral<br>- Interpolación | - Ajuste por mínimos cuadrados<br>- Polinomios<br>- Funciones gaussianas |

**Optimización de recursos en una fábrica de productos elaborados**

En esta práctica se plantea un problema de extremos condicionados de funciones de varias variables. Tenemos un almacén que está alimentado por dos cintas transportadoras y vaciado por una tercera, siguiendo cada una de ellas una ley que viene descrita por una

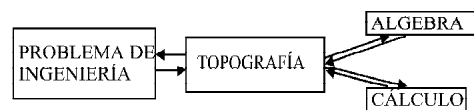
ecuación diferencial ordinaria de orden uno con coeficientes constantes que dependen del número de trabajadores que actúan en ellas. Los estudiantes deben plantear estas ecuaciones a partir de su descripción mediante argumentos de proporcionalidad y optimizar una función objetivo (en un caso el número de trabajadores y en otro la cantidad de material almacenada) sujeta a una serie de restricciones.



| MODELIZACIÓN FÍSICA   | CÁLCULO   |
|-----------------------|---|
| - Ecuaciones de flujo | - Ecuaciones diferenciales ordinarias<br>- Método de Lagrange para extremos condicionados |

**Estudio de los puntos estacionarios de una superficie**

Si bien por su título parece la más abstracta de todas, su contenido guarda estrecha relación con los que son propios de la topografía. En ella se dan una serie de funciones gaussianas y cuadráticas para modelizar accidentes geográficos y se plantean una serie de cuestiones en torno a distancias y perfiles. Diferenciación, obtención de puntos estacionarios, clasificación de los mismos mediante el estudio de la matriz hessiana... son conceptos matemáticos involucrados en la misma. Se hace un especial hincapié en las argumentaciones asociadas a la interpretación mecánica y matemática del vector gradiente con el fin de construir sistemas de referencia afines en cualquier punto de una superficie que tengan unas determinadas características.



| TOPOGRAFÍA   | CÁLCULO   | ÁLGEBRA   |
|--|---|---|
| - Curvas de nivel, distancia entre puntos, obtención de pendientes | - Puntos estacionarios<br>- Funciones de varias variables<br>- Funciones gaussianas | - Geometría euclídea<br>- Formas cuadráticas<br>- Cónicas y cuádricas |

**Cálculo del centro de gravedad y de los momentos de inercia de la sección de una tubería aérea de transporte de agua**

El objetivo principal de esta práctica es la utilización del cálculo integral aplicado a problemas físicos. Se necesi-

ta construir una tubería de abastecimiento de agua uno de cuyos tramos debe de superar un desnivel de 25 m entre dos colinas. Para superar dicho desnivel se proyecta que la tubería sea aérea y sea soportada por una base rígida. Se ofrecen tres diseños distintos de tuberías y soportes y el alumno debe seleccionar el más adecuado bajo la condición de que la suma de momentos de inercia principales del conjunto sea mínima. Además debe calcular el tensor de inercia del conjunto con respecto a otros ejes situados en la base de las colinas. Desde el punto de vista matemático se involucra el cálculo de integrales dobles y el cambio de sistemas de referencia.



| MECÁNICA  | CÁLCULO  | ÁLGEBRA   |
|---|--|---|
| - Centro de gravedad<br>- Momentos de inercia<br>- Transformaciones del tensor de inercia | - Integración doble y triple de funciones escalares<br>- Cambios de variable<br>- Diferencial de superficie en polares y cartesianas | - Sistemas de referencia afín<br>- Transformaciones afines<br>- Diagonalización de endomorfismos y transformaciones tensoriales |

**Balance de fuerzas en estructuras articuladas planas**

En ella se plantea al alumno la hipotética construcción de una nave-almacén mediante el uso de estructuras metálicas. Para ello se propondrá al alumno una solución constructiva sobre la que tendrá que trabajar. Se aborda así un problema clásico de la estática como es el cálculo de esfuerzos en estructuras articuladas planas. Este problema se relaciona de forma directa con la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Esta resolución conduce al alumno de manera natural a la clasificación de los sistemas como hiperestáticos, isostáticos o mecanismos. Es quizá un bello ejemplo de interconexión entre conceptos de la mecánica y la matemática.



| MECÁNICA   | ÁLGEBRA   |
|--|---|
| - Balance de fuerzas en estructuras isostáticas, hiperestáticas y mecanismos | - Resolución de sistemas de ecuaciones lineales |

**Estudio de la evolución del número total de habitantes en un área metropolitana**

El problema que se plantea es el estudio de la evolución del número de habitantes en una área urbana y las poblaciones que la rodean en función del tiempo. El objetivo es optimizar los recursos destinados a una serie de servicios como pueda ser el transporte urbano e interurbano. Para ello se dan al alumno las funciones que describen dicha evolución que no son lineales con el tiempo. Para abordar el estudio mencionado, el estudiante tiene que calcular máximos, mínimos puntos de corte... conjugando técnicas gráficas y numéricas.



| ESTUDIO DEMOGRÁFICO                             | CÁLCULO  |
|---|--|
| - Balance de recursos de transporte de viajeros | - Máximos y mínimos de funciones reales<br>- Métodos numéricos para la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales<br>- Derivadas |

3) La *calificación* de las prácticas se realiza convocando a los estudiantes de un mismo grupo que presentan una sola memoria y examinándolos oralmente sobre ésta. Para la realización de esta memoria, se insta a los alumnos a que incluyan no sólo los resultados obtenidos y las respuestas a las cuestiones, sino todos aquellos comentarios que consideren clarificadores sobre los conceptos que se tratan. Este tipo de comentarios resultan particularmente útiles para la evaluación, ya que, en el examen oral, el profesor discute con los alumnos la memoria presentada, intentando valorar por este procedimiento el trabajo realizado, el grado de reflexión sobre los problemas y las propuestas creativas para resolverlos que los alumnos hayan dado.

Las prácticas se puntúan sobre uno, sumando directamente la nota obtenida sobre la media final en cada una de las asignaturas implicadas. Esta media se obtiene a partir de los exámenes parciales que se hacen en cada asignatura (generalmente, dos), siguiendo la forma habitual de evaluación de los primeros cursos de la enseñanza universitaria: exámenes de resolución de cuestiones de tipo teórico y de problemas. La evaluación global de las tres asignaturas se realiza independientemente.

**ELEMENTOS PARA EL ANÁLISIS DE LA EFICACIA DEL PROGRAMA PROPUESTO**

En primer lugar, debemos indicar que, tal y como hemos comentado anteriormente, los resultados que presenta-

mos en la siguiente sección no son en absoluto definitivos, puesto que, entre otras cosas, consideramos que nuestra investigación todavía está en sus comienzos. Como instrumentos de análisis de la eficacia de nuestro programa, disponemos en primer lugar y principalmente de las memorias presentadas por los alumnos, y de nuestra propia experiencia en las tutorías.

Existe mucha variedad en el material entregado por los alumnos. Encontramos desde memorias superficiales presentadas por algunos estudiantes –listados de ordenador con secuencias de soluciones numéricas–, hasta análisis profundos de los conceptos y de los resultados entregados por otros grupos. Sin embargo, en general, los alumnos dedican bastante tiempo a este trabajo. Para muchos de ellos, estas prácticas son el primer contacto directo con los asistentes matemáticos, los programas de tratamiento de texto y de dibujo que pueden utilizar para la elaboración de las memorias, por lo que se les plantean muchos problemas de tipo técnico, que intentamos resolver en las tutorías que cada profesor tiene asignada (6 horas a la semana). Otro inconveniente con que se encuentran muchos alumnos es la falta de tiempo para realizar correctamente la memoria, puesto que, aunque intentamos que el plazo de presentación sea sobre el 15 de mayo, el final de curso siempre conlleva una acumulación excepcional de trabajo para los estudiantes universitarios. Desde el punto de vista de los contenidos, habitualmente se les presentan dificultades en aquellas actividades que requieren una mayor respuesta creativa. Por ejemplo, no suelen tener problemas para hacer un ajuste por mínimos cuadrados a partir de una tabla de datos si se les dice cuál es la base de funciones que deben utilizar. Los problemas aparecen cuando, a partir de la representación gráfica de un conjunto de puntos, son ellos mismos los que deben proponer una base óptima de funciones. En el siguiente apartado haremos una breve exposición de algunas conclusiones alcanzadas a partir de las memorias presentadas.

Además de las memorias, disponemos de la información obtenida a partir de otros dos estudios independientes. Por una parte, hemos realizado una estadística relacionada con la elección por parte de los alumnos de una u otra práctica. Por otra, hemos hecho un test para estudiar la comprensión de algunos conceptos específicos que aparecen en las prácticas, que deben ser conocidos por todos los alumnos de primer curso, pero que constituyen los contenidos centrales de algunos proyectos concretos. Nuestra intención era averiguar si, en efecto, los alumnos conocían mejor estos conceptos relacionados con sus propios proyectos que otros contenidos de igual importancia de los que se estudian en nuestras asignaturas.

El test en el que se basa este segundo análisis fue realizado por todos los alumnos implicados en el programa de prácticas una vez terminadas éstas. Está compuesto por una serie de preguntas con tres respuestas posibles, de manera que todas ellas se pueden asignar a contenidos específicos que se estudian en detalle en una práctica en particular, pero que todos los estudiantes de primero deberían conocer. Los alumnos respondieron a

todas las cuestiones, y se efectuó el conteo de la siguiente forma: para cada pregunta, se contó, por una parte, el número de fallos cometidos por los alumnos que habían hecho la práctica correspondiente a esa cuestión y, por otra, el mismo número de fallos cometidos por los alumnos que *no* habían hecho esa práctica, sino otra. De esta forma, conseguimos que el test sea independiente del nivel de conocimientos general de la clase –puesto que los mismos alumnos contestan a todas las preguntas–, pudiéndose estudiar sólo el efecto de las prácticas en la adquisición de conocimientos. En el siguiente apartado comentamos algunas conclusiones a las que hemos llegado.

### ALGUNOS RESULTADOS OBTENIDOS

Las calificaciones obtenidas como resultado de la evaluación de las memorias son en promedio bastante buenas. En la mayoría de los casos, los alumnos resuelven con éxito los problemas que les plantean sus proyectos asignados. En todos ellos, como ya hemos comentado, existe una parte cuya resolución puede hacerse sin demasiada dificultad siguiendo las indicaciones del material facilitado, consultando la bibliografía recomendada y recurriendo a los profesores si es necesario. No puede decirse lo mismo de aquellos apartados más abiertos, que requieren una respuesta más creativa. Todos nosotros pusimos especial atención en no responder a aquellas cuestiones que afectarían a estos asuntos con el fin de forzar a los grupos de trabajo a dar sus propias solucio-

ESTADÍSTICA DE ELECCIÓN DE PRÁCTICAS  
ETS Ingenieros de caminos, canales y puertos  
Universitat Politècnica de València



nes, aunque fueran erróneas. Aquí es donde se plantea el verdadero problema. Hemos constatado con nuestra experiencia un hecho que, en mayor o menor medida, es conocido por aquellos profesores universitarios que dan clase en los primeros cursos. A nuestros alumnos les resulta muy difícil trabajar siguiendo sus propias estra-



tegias para la resolución de los proyectos, construir modelos que puedan contrastar con los datos facilitados, ya que esto implica la necesidad de hacer planteamientos globales cuya aplicación particular constituya la respuesta al problema. Pero éste es precisamente uno de los objetivos didácticos de nuestra experiencia, tal y como hemos comentado en la introducción.

Por otra parte, como ya se ha dicho anteriormente, dimos a los alumnos la posibilidad de seleccionar aquella práctica de modelización que, por algún motivo, les resultara más atractiva, aunque luego fue necesario reajustar la asignación en algunos grupos. La elección de los alumnos, que presentamos en la siguiente gráfica, puede interpretarse como un dato favorable a nuestra hipótesis al respecto de su motivación: *los alumnos tienden a elegir aquella práctica cuyo enunciado presenta un problema de contenido ingenieril, independientemente de su aparente dificultad, rechazando los ejercicios de contenido más abstracto*. Aunque la elección de los alumnos de un proyecto en particular puede deberse a otros motivos, los comentarios de los grupos de trabajo en las sesiones de tutorías confirman también nuestra hipótesis. Aun así, no descartamos la existencia de otras variables que influyan en la elección. Invitamos al lector a comparar la estadística con los contenidos de cada práctica presentados en el apartado anterior.

Con respecto al test relativo a la adquisición de los conceptos propios de cada práctica comentado en el apartado anterior, los resultados obtenidos pueden observarse en el siguiente diagrama de barras. Obsérvese que, excepto en la última práctica, en la que se da la tendencia contraria –probablemente por un error en el diseño del test–, el número de alumnos que falla en los contenidos propios de su práctica es significativamente inferior al nivel de error en el grupo de los que no han realizado esa práctica.



Tal y como se ha comentado anteriormente, los resultados de esta estadística tampoco son concluyentes, puesto

que ni el test ni la planificación del curso estaban diseñados para hacer una investigación sistemática y definitiva. Dentro de nuestro plan de trabajo, el test sólo constituyó un elemento más de control de nuestra experiencia didáctica. Sin embargo, pensamos que estos resultados pueden aportar al lector una información fácil de interpretar y que se corresponde bastante con nuestras expectativas. Actualmente, también estamos trabajando de forma intensiva en esta línea, con el objetivo de poder confirmar estas tendencias en posteriores estudios.

## CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS DE FUTURO

Consideramos los resultados obtenidos sobre la influencia de nuestro programa en la enseñanza de las matemáticas y la mecánica bastante positivos. La experiencia nos ha permitido comprobar que los alumnos realmente implicados en el proyecto asimilan los conceptos fundamentales que aparecen en sus prácticas correctamente, mejor que si se tratara de un contenido teórico más impartido en clase. Aunque deben existir otros factores que intervienen en este hecho, en nuestra opinión, el aumento en la *motivación* de nuestros estudiantes como consecuencia de la *contextualización* de los conceptos abstractos es la razón principal. Por otra parte, se podría objetar que los contenidos de primer curso son insuficientes para desarrollar un proyecto de estas características. Sin embargo, se puede comprobar que el material expuesto en el apartado segundo se puede utilizar sin problemas con los conocimientos adquiridos en primero, ya que se ha puesto un especial cuidado en la adaptación de los mismos al nivel correspondiente, sin perder el rigor necesario propio de las asignaturas formales.

Este tipo de actividades interdisciplinares –y, por lo tanto, interdepartamentales– nos parecen perfectamente adecuados en el contexto de los nuevos planes de estudio, aunque, teniendo en cuenta que la organización por departamentos de la Universidad sigue siendo la misma, debemos asumir que su aplicación no tiene por qué ser en general fácil. En las universidades españolas, la docencia se estructura a partir de asignaturas que dependen de los departamentos. Cualquier actividad conjunta entre distintas asignaturas de diferentes departamentos implica una organización interdepartamental que, generalmente, no resulta nada fácil, y actualmente sólo se da en casos particulares por la voluntad de los profesores implicados. No obstante, pensamos que nuestro programa puede aplicarse; y también en otros contextos, como, por ejemplo, en otras escuelas técnicas o en facultades de ciencias. Además, esta aplicación puede verse favorecida en algunos casos por la introducción de los nuevos planes de estudios, puesto que éstos normalmente contemplan la dedicación de una mayor cantidad de horas de actividades prácticas en la docencia que en los planes anteriores. Y, como primer paso, son precisamente estos créditos prácticos en los que resulta más sencillo introducir este tipo de actividades, puesto que normalmente en ellos no existe la obligación de impartir un temario

establecido por el departamento, como normalmente sucede en el caso de las clases tradicionales de teoría y problemas. En nuestro caso, en la titulación superior de Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos y en la titulación técnica de Ingenieros de Obras Públicas de la Universidad Politécnica de Valencia disponemos, en el marco de los nuevos planes de estudios, de una asignatura de introducción al uso de los asistentes matemáticos en segundo curso, en la que pretendemos seguir con esta misma filosofía de trabajo sin descuidar las prácticas en el aula informática de las asignaturas de Cálculo y Álgebra de primer curso.

Nuestra intención sería extender su ámbito de aplicación a las otras asignaturas de primero, y mejorar y diversificar los proyectos propuestos a los estudiantes. Pero esto, obviamente, no sólo depende de nosotros, sino de la capacidad de nuestra Universidad –y, en general, de la universidad española– para facilitar un entorno adecuado para este tipo de actividades. Un entorno adecuado que, en nuestra opinión, sólo se conseguiría incorporando de forma más activa la didáctica de las ciencias a la universidad, permitiendo una mayor flexibilidad en las relaciones entre los departamentos y fomentando la organización de la docencia en un contexto más general, externo a los propios departamentos.

## APÉNDICE

En este apartado presentamos una selección de preguntas relacionadas con los proyectos que formaban parte del test que se pasó a los alumnos cuando ya habían realizado las prácticas. Las seis preguntas siguientes están relacionadas con cada una de las prácticas, siguiendo la misma numeración, de forma que la pregunta 1 se corresponde con contenidos específicos de la práctica 1, y así sucesivamente. El alumno debía seleccionar alguna de las tres respuestas propuestas:

1) En un depósito de capacidad igual a  $5 \text{ m}^3$  hay inicialmente  $3 \text{ m}^3$ . Si entra  $1 \text{ m}^3$  por minuto y salen, por un caño,  $\frac{1}{3} \text{ m}^3$  por minuto; por otro caño, la mitad de esto y por otro la mitad de lo que entra, al cabo de una hora:

- a) el depósito estará vacío;
- b) el agua se habrá salido del depósito;
- c) el volumen de agua contenida en el depósito será  $3 \text{ m}^3$ .

2) La cantidad de materia  $Q$  que se produce por unidad de tiempo en un cierto instante  $t$  es directamente proporcional a la cantidad de materia  $Q$  que ya hay en ese instante. La ecuación que representa esta relación es:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \frac{dQ}{dt} = K \\ \text{b) } & \frac{dQ}{dt} = KQ \\ \text{c) } & \frac{dQ}{dt} = \frac{K}{Q} \end{aligned}$$

siendo  $K$  una determinada constante.

3) La dirección de máxima pendiente de la ladera de una montaña, si modelizamos ésta mediante una superficie diferenciable:

- a) no se puede determinar;
- b) apunta siempre en la dirección del vector gradiente;
- c) apunta en una dirección siempre perpendicular al vector gradiente.

4) En la sección de un elemento constructivo utilizado para el transporte de gas natural, se comprueba que la elipse central de inercia adopta la forma de un círculo. Entonces se cumple:

$$\begin{aligned} \text{a) } & I_x = I_y \text{ y además } P_{xy} = 0; \\ \text{b) } & I_x < I_y \text{ y además } P_{xy} \neq 0; \\ \text{c) } & I_x > I_y \text{ y además } P_{xy} \neq 0. \end{aligned}$$

5) Al plantear el sistema de ecuaciones que nos definen los esfuerzos en las barras de una estructura articulada plana observamos que dicho sistema es compatible indeterminado. Entonces, el sistema se puede clasificar desde el punto de vista mecánico como:

- a) isostático;
- b) hiperestático;
- c) mecanismo.

6) La velocidad de crecimiento de la cantidad de estudiantes de una universidad pasa en un determinado momento de positiva a negativa. En ese momento, la cantidad de estudiantes en la universidad:

- a) alcanza un valor máximo;
- b) alcanza un valor mínimo;
- c) es constante.

### AGRADECIMIENTOS

Los autores quieren agradecer los valiosos comentarios y sugerencias de los asesores científicos de la revista y, asimismo, a los profesores Jaime Carrascosa y José Ramón Bertomeu, su ayuda en la elaboración de este artículo.

### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDALORO, G., et al. (1991). Modelling in physics teaching: the role of computer simulation. *Int. J. Sci. Educ.*, 13, pp. 243-254.
- CHECA, E., FELIPE, M.J., MARÍN, J., SÁNCHEZ-PÉREZ, E.A., SÁNCHEZ-PÉREZ, J.V. (1997). *Álgebra, cálculo y mecánica para ingenieros*, Vol. I. Ra-Ma.
- CHECA, E., FELIPE, M.J., GARCÍA RAFFI, L.M., MARÍN, J., SÁNCHEZ-PÉREZ, E.A., SÁNCHEZ-PÉREZ, J.V. (1998). *Álgebra, cálculo y mecánica para ingenieros*, Vol II. Ra-Ma (en preparación).
- CORRAL, A. (1995). Más allá del pensamiento lógico-formal en la enseñanza de las matemáticas. *Tarbiya*, 10, pp. 65-75.
- DUSCHL, R.A. (1995). Más allá del conocimiento: los desafíos epistemológicos y sociales de la enseñanza mediante el cambio conceptual. *Enseñanza de las Ciencias*, 13(1), pp. 3-14.
- FREY, K. et al. (1989). Integrated science education: 20 years on. *Int. J. Sci. Educ.*, 11, Special Issues, pp. 3-17.
- GIL, D., CARRASCOSA, J., FURIÓ, C., y MARTÍNEZ-TORREGROSA, J. (1991). *La enseñanza de las ciencias en la educación secundaria*. Barcelona: ICE/Horsori.
- HERNÁNDEZ, E. (1995). Métodos y contenidos de la enseñanza de la matemática en la universidad. *Tarbiya*, 10, pp. 55-63.
- HEWSON, P.W. y BEETH, M.E. (1995). La enseñanza para un cambio conceptual: ejemplos de fuerza y de movimiento. *Enseñanza de las Ciencias*, 13(1), pp. 25-35.
- NÚÑEZ ESPALLARGAS, J.M. y FONT MOLL, V. (1995). Aspectos ideológicos en la contextualización de las matemáticas: una aproximación histórica. *Revista de Educación*, 306, pp. 293-314.
- SÁENZ DE CASTRO, C. (1995). La enseñanza de las matemáticas. Un problema pendiente. *Tarbiya*, 10, pp. 41-53.
- SÁNCHEZ-PÉREZ, J.V., SÁNCHEZ-PÉREZ, E.A., GARCÍA RAFFI, L.M. (1997). *Curso de prácticas de matemáticas para primeros cursos de ingeniería*. SPUPV.

[Artículo recibido en julio de 1997 y aceptado en septiembre de 1998.]