SOBRE EL APRENDIZAJE DE CONCEPTOS GEOMÉTRICOS RELATIVOS A LOS SÓLIDOS. IDEAS ERRÓNEAS

GUILLÉN SOLER, GREGORIA
Departamento de Didáctica de la Matemática. Universitat de València. 46071 València.
E-mail: gregoria.guillen@uv.es

SUMMARY

In this report we indicate a research related to learning the geometry of solids, that shows some examples of families of solids that students include in the mental objects they construct for these families and some mistakes they make as a consequence of the difficulties that mathematical content (concepts, properties, relations, etc.) present for the students. This can be prompted o encouraged by the teaching of the subject.
Results here reported are obtained through the analyses of information requested from interviews and working sessions carried out with two groups of students aged 12 years. We also analyze the answers that Teacher Training College students gave in writing to some activities they were asked to do before being treated in class.

PRESENTACIÓN

El estudio que se expone en este artículo es parte de un trabajo más amplio (Guillén, 1997) en el que se aplicó el modelo de Van Hiele a la geometría de los sólidos. El trabajo explora procesos de enseñanza-aprendizaje en el ámbito de cursos dirigidos a futuros profesores de primaria y en sesiones de laboratorio con niños de 12 años.

Los objetivos de la investigación son:

– Obtener caracterizaciones teóricas para los niveles de Van Hiele para la geometría de los sólidos.

– Diseñar una unidad de enseñanza para la geometría de los sólidos, organizada según los niveles de razonamiento de Van Hiele y teniendo en cuenta las fases de aprendizaje.

– Elaborar tests y modelos de respuestas para los ítems de los tests.

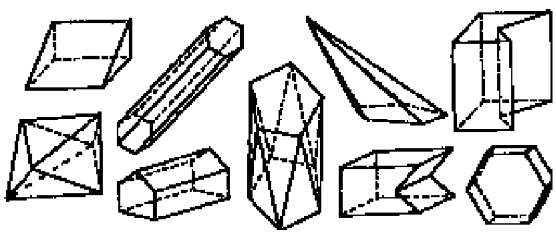
– Determinar el nivel de razonamiento de Van Hiele de estudiantes de magisterio para la geometría de los sólidos y obtener información sobre cómo evoluciona éste al realizar las tareas de la unidad de enseñanza.

– Obtener información sobre cómo los estudiantes van construyendo ciertos objetos mentales de conceptos geométricos relacionados con los sólidos y cómo van ampliandolos durante el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En este artículo nos centramos en la investigación relacionada con una parte del último objetivo. Vamos a indicar ejemplos que los estudiantes incorporan en los objetos mentales[1] que constituyen para determinadas familias de sólidos, y propiedades, relaciones e ideas erróneas que también pueden incluir. Entre éstas hemos distinguido: *a)* las ocasionadas por las propias representaciones físicas de los sólidos con los que se trabaja; *b)* las ocasionadas o fomentadas por el propio proceso de enseñanza, al introducir los conceptos a partir de familias específicas, como consecuencia de los modelos físicos empleados o por las sugerencias dadas; y, finalmente, *c)* las que pueden ocasionarse por el proceso de aprendizaje que tiene lugar; esto es, cuando surgen problemas de lenguaje, o los juicios para establecer las propiedades se basan en subfamilias, o se basan en parte de la figura cuando se debería tener en cuenta toda entera, etc.

Los sólidos que han servido de soporte para nuestro trabajo pertenecen a las familias de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides[2]; sólo en algún caso corresponden al cilindro, el cono o la esfera.

Figura 1



MARCO TEÓRICO

El marco teórico del trabajo desarrollado es el modelo de Van Hiele (1986) junto con el trabajo de Freudenthal (1971, 1973, 1983). Como marco psicológico se ha utilizado especialmente el trabajo de Vinner y sus colaboradores (Hershkowitz, 1990; Hershkowitz, Bruckheimer y Vinner, 1987; Vinner, 1976, 1983; Vinner y Hershkowitz, 1983).

El modelo de Van Hiele ha sido ampliamente investigado. Las investigaciones que hemos tenido en cuenta en el trabajo que se presenta en este artículo son la Burger y Shaughnessy (1986), Fuys, Geddes y Tischler (1988) y Mayberry (1983). Todas ellas relativas al modelo de Van Hiele que han considerado los errores de los estudiantes para sacar conclusiones respecto a cómo se desarrolla su conocimiento geométrico.

Aquí también comentaremos sólo parte del trabajo de Freudenthal, (1971, 1973), quien, después de plantear e intentar responder a lo que él llama tres cuestiones filosóficas (qué son las matemáticas, qué es la educación, y si se debería enseñar las matemáticas como un sistema deductivo), encontramos otra pregunta (¿qué es geometría?) y una fundamentación teórica de la geometría como ciencia que parte del espacio (del espacio en el que el niño vive y se relaciona) y que sirve como vehículo para desarrollar el razonamiento lógico. Estos trabajos fundamentan teóricamente nuestra posición respecto a las relaciones que existen entre los contenidos geométricos; esto es, el tipo de razonamientos que los engarzan y que en la enseñanza pretendemos desarrollar como objetivo de primer orden: razonamientos lógicos, que significan procesos matemáticos de análisis, clasificación, definición, conjetura, generalización y demostración.

Las ideas de Freudenthal que han tenido más relevancia para nuestra investigación (1973, 1983) aportan sugerencias o comentarios concretos referidos a la enseñanza-aprendizaje de conceptos geométricos. Como ya hemos indicado, él introduce la terminología *objeto mental/concepto* que utilizamos aquí.

Los estudios teóricos que conforman el marco psicológico de la investigación realizada se refieren a la formación de conceptos en geometría. Ya que nos centramos en conceptos geométricos, aunque éstos estén relacionados con los sólidos, las conclusiones obtenidas por los investigadores para la geometría plana las consideramos como marco para interpretar las conclusiones obtenidas en nuestra investigación.

Vinner y sus colaboradores han investigado acerca del aprendizaje de conceptos geométricos. Además de preocuparse de que los estudiantes adquieran determinados conceptos de geometría plana y de que se perfeccionen y amplíen sus imágenes[3], han tratado de explicar lo que ocurre en la mente de los estudiantes cuando, una vez que se supone que el concepto ya se ha adquirido, se les pide que identifiquen o construyan ejemplos.

Vinner y Hershkowitz (1983, pp. 21-22) señalan, que en la identificación o construcción de ejemplos de un concepto, se pueden distinguir al menos tres elementos: *a)* la imagen del concepto; *b)* la definición del concepto; *c)* un grupo de operaciones, mentales o físicas, como ciertas operaciones lógicas o como girar una figura dada para obtener una orientación en la que una comparación con el dibujo mental sea más fácil.

Aclaran que la descripción hecha es importante para la enseñanza de conceptos porque se han delimitado los elementos que deben formarse en la mente para que ocurra la identificación y la construcción: debería introducirse una variedad de ejemplos en una variedad de orientaciones, una definición verbal e instrucciones sobre cómo realizar ciertas operaciones (mentales y físicas). Pero también advierten que este análisis no garantiza una identificación y construcción con éxito si bien sí que tiene una repercusión en la enseñanza. Delimitan los *distractores de orientación* y *distractores de configuración*. Para aclarar a qué corresponden los *distractores de orientación* indican que «por razones perceptuales, la imagen del concepto de *ángulo recto* podría incluir sólo los colocados en una posición vertical y que, sin embargo, si se es consciente de esto, se puede girar el papel hasta colocar el ángulo en una posición vertical y, entonces, se supera la limitación perceptual». Para introducir los *distractores de configuración*, dicen: «Como consecuencia de la experiencia pasada, un concepto imagen de una altura en un triángulo podría incluir sólo alturas que caen dentro del triángulo y, así, también se diferencian las dibujadas desde cada lado del triángulo.» Añaden que, «si, en este caso, la definición del concepto es correcta y se tienen las operaciones adecuadas, el resultado puede ser correcto».

Por otra parte, Hershkowitz (1990, pp. 81-84) recopila las conclusiones de los trabajos del grupo de psicología de la educación matemática (Internacional Group for the Psichology of Mathematics Education, PME). Ha tratado de describir, a partir de los resultados obtenidos en la experimentación, el proceso cognitivo que caracteriza la construcción de conceptos geométricos básicos y el desarrollo cognitivo de las imágenes de los conceptos. Destaca el papel de los procesos visuales en la formación de la imagen de un concepto. En los conceptos sobre objetos tridimensionales, éste es especialmente importante. Subraya que, para comprender mejor cómo construyen los estudiantes imágenes de conceptos geométricos y cuáles son los factores que tienen una importancia en su desarrollo, es necesario realizar un análisis de los conceptos y de su estructura matemática. Señala que la mayoría de las estructuras de conceptos básicos pueden describirse como conjunción de las propiedades que poseen y aporta un esquema que describe las relaciones matemáticas entre los elementos de un concepto matemático. Para ello, usa la terminología de atributos críticos (relevantes) y de atributos no críticos (irrelevantes) que nosotros utilizamos en este trabajo. Para esta autora «El concepto se deriva de su definición matemática, por lo que tiene atributos relevantes (críticos, los atributos que un concepto tiene que tener para ser ejemplo del concepto) y atributos no críticos (los que sólo poseen algunos ejemplos)».

Para describir el desarrollo cognitivo de los estudiantes en relación con las imágenes de los conceptos, cree que es necesario considerar también lo que llama el *fenómeno prototipo* (los ejemplos prototipo son generalmente los ejemplos que tienen la lista de atributos «más grande»; se logran primero y existen en la imagen del concepto de la mayoría de los estudiantes), *juicios prototípicos* (el ejemplo prototipo es la base para juicios prototípicos) y *rasgos analíticos* (este tipo de razonamiento se basa en los atributos críticos del concepto).

Hershkowitz (1990) remarca que hay evidencia de que la construcción de la imagen de un concepto es una mezcla de procesos visuales y analíticos; que el fenómeno prototipo y los juicios prototípicos en su mayor parte son un producto de procesos visuales; y que los atributos irrelevantes generalmente tienen fuertes características visuales y, por lo tanto, se logran primero y actúan como distractores.

La misma autora señala otras características de la construcción de conceptos básicos: un orden jerárquico en el logro de ejemplos de conceptos, comunes a toda la población y que progresan con la práctica (comienzan con ejemplos prototipo y continúan con otros, bien por procesos visuales o analíticos), y diferentes tipos de patrones de ideas erróneas dentro de la misma población. Distingue entre: *a)* ideas erróneas (*misconception*) que los estudiantes se resisten a abandonar (que tienen el mismo patrón de incidencia en un curso y en el siguiente); *b)* ideas erróneas que los estudiantes corrigen con la adquisición del concepto; y *c)* ideas erróneas que los estudiantes incrementan con la adquisición del concepto (que se desarrollaron con el proceso de aprendizaje).

Hay otras investigaciones relativas a la introducción de los conceptos (vía ejemplos y no ejemplos), que vale la pena considerar (Charles, 1980; Hoffer, 1978). En Charles (1980), mediante dos situaciones observadas en clases de enseñanza elemental, en EEUU, se muestra que los tipos de ejemplos y no ejemplos usados para enseñar un concepto y la manera en cómo se utilizan éstos influye en el grado de comprensión. Hoffer (1978) es especialmente interesante. En este trabajo se encuentran guías para considerar cuándo se enseñan conceptos. Además, indica lo que cabe esperar que pueda hacer un estudiante en relación con un concepto nuevo: que sea capaz de escoger y reconocer todos los ejemplos del concepto y producir nuevos ejemplos; y puesto que necesita comunicar sobre los conceptos, en algún estadio debería ser capaz de interpretar y producir la palabra (o el símbolo) para el concepto. Respecto a si el estudiante podría dar una definición del concepto, advierte que «aunque las definiciones expresadas en el nivel adecuado pueden ayudar en la formación de conceptos, hay un peligro de confiar en la verbalización. Lo importante es la idea, y recitar maquinalmente una definición no asegura que la idea esté presente» (Hoffer, 1978, p. 143).

El trabajo de Clements y Battista (1992) también merece atención. Recopila la investigación realizada sobre el rendimiento de los estudiantes en geometría; asimismo revisa la investigación en el desarrollo del conocimiento geométrico desde las tres perspectivas teóricas principales (Piaget, los Van Hiele y ciencia cognitiva); considera la relación entre el pensamiento espacial y las matemáticas, la relación entre la naturaleza del razonamiento espacial y las imágenes, y considera también intentos que se han hecho para enseñar habilidades espaciales. Además dedica una sección a las representaciones de las ideas geométricas en la que incluye resultados que se refieren a conceptos, diagramas, «manipulativos» y computadoras.

Otras investigaciones que suponen un soporte para este trabajo tienen que ver con la visualización. La visualización se ha considerado útil en el aprendizaje de las matemáticas, como soporte para la intuición y formación de conceptos (Bishop, 1989; Clements y Battista, 1992; Dreyfus, 1991; Fischbein, 1987). De las múltiples investigaciones que se han realizado relativas a la visualización, nos centramos en las que tratan cómo los diagramas pueden afectar en las representaciones que se construyen los estudiantes de los conceptos, teoremas y problemas, y tienen en consideración errores que pueden surgir de la interpretación que los estudiantes hacen de los propios diagramas. Merecen atención las investigaciones que han subrayado el *doble estatus* de los objetos geométricos como un obstáculo para el aprendizaje de la geometría (Mesquita, 1992) y las que centran su atención en la *figura geométrica* y el dibujo que representa esta figura (Laborde 1996; Parzysz, 1988, 1991).

Nosotros hemos intentado evitar, en la medida de lo posible, los problemas de visión espacial que se derivan del estudio de los sólidos. Es por esto por lo que hemos trabajado con modelos materiales de los sólidos, y sólo en algunas ocasiones con dibujos de ellos. Al trabajar con modelos físicos de los sólidos, podemos considerar como análogo a la «figura geométrica» de la que habla Laborde (1996), el «modelo geométrico»; éste puede verse como la relación entre las diferentes representaciones materiales de los sólidos (modelos u armazones construidos con diferentes materiales) y los sólidos (el objeto geométrico). Resulta interesante, por tanto, considerar las investigaciones que se centran en la interpretación de los dibujos geométricos, pues sus resultados pueden soportar los resultados obtenidos sobre las representaciones materiales de los sólidos.

Asimismo, las consideraciones que se hayan hecho sobre las propiedades de los objetos geométricos que reflejan los dibujos de los mismos pueden ser análogas a las propiedades de un objeto que refleja el modelo material del mismo. Es por esto por lo que otras investigaciones que forman parte de lo que constituye el marco teórico para el análisis de errores que presentamos en este artículo se refieren a lo que Fischbein (1987) llamó *estructura conceptual que interviene* (investigaciones ya mencionadas que vamos a describir brevemente a continuación).

Mesquita (1992) señala que entre los obstáculos encontrados en el aprendizaje de la geometría, el que llama *doble estatus de los objetos geométricos* parece ser uno de los más primitivos (pues resulta del origen mismo de la geometría) y del que, como consecuencia, surgirán otros errores. El doble estatus resulta del hecho siguiente: en geometría, todo concepto, si bien es distinto de sus representaciones externas, corre el riesgo de ser difícilmente disociable de ellas. De ahí que las representaciones externas de cualquier concepto geométrico conllevan una ambigüedad fundamental que se traslada en lo que la autora llama el *doble estatus de los objetos geométricos*: todo lo que se apoya en objetos generales y abstractos («ideas» para Poincaré) no puede ser expresado más que por una configuración específica, que implica objetos concretos y particulares. Apunta también que este doble estatus puede que no lo perciba el estudiante que se enfrenta con un problema geométrico, pero la ambigüedad que resulta puede ser una fuente de conflicto.

Laborde (1996) considera la *figura geométrica* como la relación entre el dibujo y el objeto geométrico[4]. Señala que con los dibujos de objetos geométricos se forman con el tiempo modelos prototipo de objetos geométricos como resultado de influencias a la vez perceptivas y culturales. Este problema también se detecta en las investigaciones de Hershkowitz y sus colaboradores (ellos lo llaman *fenómeno prototipo* y *juicios prototípicos*).

Al fijarnos en las propiedades de un objeto que refleja el dibujo, se ha detectado que *«es necesaria una descripción discursiva que caracterice el objeto geométrico* para eliminar las ambigüedades inherentes al dibujo» (Parzysz, 1988, 1991). Laborde (1996, p. 70) habla del *dominio de funcionamiento* (conjunto de las propiedades geométricas representadas por ciertas propiedades espaciales del dibujo) y del *dominio de interpretación* (todas las propiedades espaciales del dibujo no pueden ser interpretadas como propiedades del objeto). Vinner y Hershkowitz (1983, p. 22) lo han subrayado también, como ya hemos indicado, cuando nombran los *distractores de orientación y de configuración*.

METODOLOGÍA Y CONTEXTO PARA LA EXPERIMENTACIÓN

El estudio que se describe aquí, al intentar averiguar lo que los estudiantes incluyen en los objetos mentales que constituyen para determinadas familias de sólidos, condiciona una metodología basada en la entrevista: A los estudiantes siempre les cuesta menos expresarse verbalmente que por escrito, por lo que tienden a dar respuestas más largas y, en el caso de que tengan dificultades para hacerse entender, hacen esfuerzos para ello. Además, la entrevista permite incluir cuestiones nuevas y alterar las cuestiones planificadas en función de las respuestas que den los estudiantes a las preguntas planteadas (Burger y Shaughnessy, 1986).

Por otro lado, para obtener la mayor cantidad posible de información sobre lo que aprenden los estudiantes, utilizamos también otros métodos que permiten obtener información de forma simultánea sobre gran variedad de alumnos, incluso de niveles educativos diferentes. Así, realizamos un análisis de:

a) las respuestas que dieron por escrito estudiantes de magisterio a determinadas actividades que se les plantearon para que las resolvieran en casa antes de tratarlas en clase;

b) las observaciones de clase y las discusiones;

c) las sesiones de trabajo realizadas con estudiantes de magisterio y con estudiantes de 6º de EGB (niños de 12 años);

d) las respuestas que dieron estudiantes de magisterio a cuestiones que se plantearon después de experimentar una unidad de enseñanza;

e) las entrevistas individuales a estudiantes de magisterio.

Los estudiantes

El estudio se desarrolló tomando como medio los cursos y grupos de estudiantes de magisterio, de diferentes niveles educativos, que se indican en la tabla I. La mayoría de los cursos corresponde a asignaturas del currículo en vigor en las que se imparte geometría y de las que la investigadora es profesora. Unos corresponden a cursos que pertenecían al currículo en vigor en la

Escuela del Profesorado de EGB de Valencia hasta el curso académico 1993-94, que se impartían en el tercer curso, en la especialidad de Ciencias (3º C) o de Educación Especial (3º EE). Otros corresponden a grupos de estudiantes de magisterio que cursaron la asignatura optativa de cuatro créditos Geometría del espacio, del plan de estudios de la Diplomatura de Maestro de la Universitat de València[5]. También participaron estudiantes de 6º de EGB (12 años). El número de estudiantes de cada grupo que asistía normalmente a las sesiones oscilaba entre los dos números que indicamos en la tabla I en la fila «número de estudiantes».

Los dos grupos de estudiantes de 6º de EGB (12 años) fueron seleccionados por su profesora entre un grupo de voluntarios para colaborar con nosotros. La elección realizada respondió al criterio de que fuese lo más representativa posible del nivel intelectual de los estudiantes del aula. Ningún estudiante perteneció a los dos grupos.

Seleccionar diferentes grupos de estudiantes de magisterio tuvo como intención obtener una amplia información sobre procesos de aprendizaje. No pretendía comparar los datos obtenidos en los diferentes grupos, ni los obtenidos con estudiantes de magisterio y con niños de 12 años.

Procedimiento de las sesiones de trabajo con niños de 12 años

Antes de comenzar la experimentación, los niños tuvieron cinco sesiones de una hora con otra profesora, en las que se introdujeron las familias de los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides, que eran las familias de sólidos con las que íbamos a trabajar. Todas las sesiones se llevaron a cabo fuera de las horas habituales de clase. Respondían al modelo de entrevista en la que participaban varios niños. Para la mayoría de las actividades, los niños estuvieron organizados en un sólo grupo, alrededor de una mesa ovalada que tenía capacidad para 9 niños. En el centro de la mesa estaban colocados una gran variedad de modelos físicos de sólidos de las familias que ya se habían trabajado en las sesiones previas. Y los niños sabían que en otras cajas había otros modelos físicos de poliedros. A los estudiantes se les dijo que se les iban a hacer algunas preguntas sobre las familias de sólidos que habían visto con la otra profesora en las sesiones anteriores y que, para responder, podían usar papel y lápiz, regla y compás. Se aclaró también que podían seleccionar el modelo físico que quisieran de los que había encima de la mesa y, que para hacer sus propias construcciones, podían usar siempre que quisiesen los materiales que ya habían utilizado en las sesiones previas: los formados por polígonos (troquelados o *polydron*), las varillas y mecanismos de engarce o los cubitos *multilink*.

Las cuestiones las planteaba la autora de la investigación verbalmente en forma de cuestiones, bien como pregunta dirigida a todos los niños o a uno de ellos directamente (Guillén et al., 1992). Se identificaban ejemplos de determinadas familias de sólidos (ejemplos que resultaban o no familiares); se presentaban modelos físicos o armazones y se mostraban en diferentes posiciones. Ejemplos de estas cuestiones son:

– Se muestra un modelo de un antiprisma pentagonal de base regular y se pregunta: ¿A qué familia pertenece? ¿Por qué dices que es un antiprisma? Si te fijaras en los vértices, ¿podrías decir algo? Y esta propiedad que has dicho, ¿la cumplen todos los antiprismas?

– Se muestra una pirámide oblicua cuadrada en posición estándar y se pregunta: ¿A qué familia pertenece este modelo? Se apoya en una arista y se pregunta: ¿Es pirámide? ¿Seguro que lo es (no lo es)? ¿Qué hemos dicho en repetidas ocasiones? ¿Y cuál será la base de esa pirámide?

– Se muestra el armazón del rombododecaedro y se pregunta si es un poliedro o no.

En otras actividades se pedía que se construyeran modelos o armazones de ejemplos de alguna familia de sólidos: Construir un antiprisma. ¿Cómo se llama el antiprisma que has construido? ¿Cómo lo has construido? ¿Conoces otra manera de hacerlo?

Tabla I
Grupos de estudiantes y números entre los que oscila el número de estudiantes/grupo que participaron en las experimentaciones.

Grupo/s y cursos	**3º C (tres grupos) 1992-95**	**3º EE (dos grupos) 1993-94**	**Opt. Geom. Esp. (dos grupos) 1994-96**	**Niños de 6º de EGB (dos grupos) 1991-93**
Núm. de estudiantes-grupo	50 - 60 50 - 60 50 - 60	20 - 30 10 - 15	8 - 11 5 - 8	3 4

También se plantearon tareas que pretendían averiguar las ideas que los estudiantes tenían acerca de los elementos de los sólidos, de los diferentes tipos de ángulos y de diagonales de los sólidos, o de la altura de los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides. También se presentan actividades de clasificación en las que se establecieron familias con criterios visuales (por ejemplo, los prismas rectos y los oblicuos, o los prismas cóncavos y los convexos), que resultaron interesantes.

Los niños tenían que dar la respuesta verbalmente o por escrito en una hoja que se les entregaba para que resolvieran la actividad correspondiente. Cuando las cuestiones se planteaban a cada niño, en muchos casos, se seguía un orden: o bien comenzábamos por los niños que tenían más dificultades y seguíamos progresivamente hasta los más avanzados, o comenzábamos por cualquiera de ellos y luego dejábamos que ellos respondieran libremente.

Las cuestiones se elaboraron de manera que con la respuesta de un niño no se agotasen todas las posibles respuestas. Otras veces, lo que se pedía era que se confirmase o refutase las respuestas de los compañeros: las discusiones entre ellos facilitaban que los niños exteriorizaran sus ideas sobre determinados conceptos, que era el objetivo principal. Todas las sesiones fueron grabadas en vídeo.

Procedimiento de las sesiones de trabajo con estudiantes de magisterio. Las actividades de clase

El estudio de estas formas tridimensionales en magisterio lo comenzamos organizando de alguna manera los objetos que encontramos en la vida diaria y que podían servirnos como envases. Centramos la atención en la gran variedad de formas que aparecen en estos objetos y en otros de uso común; los organizamos fijándonos en su forma y les dimos el nombre geométrico que tienen: cilindros, conos, esferas, prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides. Remitimos de nuevo al entorno para que se encontraran en él otros ejemplos de las familias nombradas; hicimos ver que las formas podían encontrarse en algunos edificios, en cuadros o en esculturas, incluso en la naturaleza, y que las formas podían no encontrarse solas sino inmersas en una estructura.

Se construyeron y generaron modelos y armazones de poliedros (ejemplos de las familias que se habían nombrado) con material comercializado (formado por polígonos o por varillas y mecanismos de engarce), a partir de un desarrollo plano o tomando como punto de partida otros modelos en vez de sus elementos: truncando, apilando, descomponiendo..., desplazando unidades base; juntando piezas de puzzles; inscribiendo e intersectando sólidos.

Tabla II

Secuencia temporal de las actividades de descripción de familias de sólidos. Sugerencias.

1. **Descripción de los prismas.** Al describir una familia de sólidos, para no olvidar ninguna propiedad resulta conveniente:

   – Considerar por orden todos los elementos (las caras, vértices y las aristas), indicar su disposición en el espacio y hallar las expresiones correspondientes al número de caras, número de vértices y número de aristas para un prisma n-agonal.

   – Indicar si hay relación de igualdad, paralelismo o perpendicularidad entre sus elementos (por ejemplo, en un prisma las bases son paralelas, las aristas laterales tienen la misma longitud).

   – Considerar los diferentes tipos de ángulos que hay en los sólidos (ángulos de las caras, ángulos diedros y ángulos de los vértices) y los diferentes tipos de diagonales (diagonales de las caras y diagonales del espacio) y hallar la expresión que da su número y su disposición en el espacio, para un prisma n-agonal[8].

Nota: Las sugerencias que damos cuando se pide que se describa una familia de sólidos, consideradlas cuando se os pide que describáis otras y decidid si son adecuadas en cada caso o no.

2. **Descripción de los antiprismas.** Para cada propiedad de los prismas discutid si se puede extender o adaptar como propiedad de los antiprismas. Después de enumerar las propiedades de los antiprismas, centrad la atención en las propiedades de una familia que no se cumplen en la otra.

3. **Descripción de las pirámides y de las bipirámides**.

4. **Descripción de cada una de las subfamilias que se van estableciendo al tratar el problema de la clasificación.**

   – Intentad acortar la lista de propiedades que habéis enumerado. Para ello indicad grupos de propiedades «englobadas» como propiedades de otras familias de sólidos. Por ejemplo, todas las propiedades de los poliedros están en la lista de las propiedades de los prismas, porque los prismas son poliedros; en vez de indicarlas explícitamente, que haría la lista bastante larga, se pueden indicar «englobadas» como «propiedades de los poliedros».

   – Fijaos en si habéis indicado como atributos críticos de una familia propiedades que dejan fuera alguno de los ejemplos de esa familia. Si es así, enunciadlas de nuevo para que los incluya. Por ejemplo, si para el romboedro se enumera, como atributo crítico, *que las caras tienen ángulos de dos medidas diferentes*, esta propiedad excluye el cubo como ejemplo de romboedro. La propiedad se tiene que enunciar como: «las caras tienen *como mucho* ángulos de dos medidas diferentes».

Tabla III
Tareas que relacionan familias de sólidos y propiedades.

T.1. De las propiedades que indicamos a continuación, seleccionad las que cumplen los prismas de caras regulares. Para cada propiedad, explicad vuestra respuesta.

a) Toda cara tiene otra cara, su opuesta, que es paralela a ella.
b) Todas sus caras son iguales.
c) Las aristas tienen como máximo dos medidas diferentes.
d) Los ángulos de los vértices tienen tantas medidas diferentes como ángulos diferentes tenga el polígono de las bases.
e) El número de diagonales de las caras es $n(n-3)$ y el de diagonales del espacio es $n(n-2)$, siendo n el número de lados del polígono de sus bases.

T.2. Para cada una de las propiedades que enumeramos en la tarea T.1, indicad qué familia o familias de prismas las verifican.

T.3. Adivinad el sólido que verifica las propiedades siguientes. Considerad cada propiedad una por una y para cada una dad respuesta a las preguntas que se te plantean. Tened en cuenta que el sólido tiene que cumplir la propiedad que se os indica y todas las anteriores.

a) Sus caras son polígonos. ¿Elimináis algún sólido de los que hemos tratado?
b) Tiene como mucho dos tipos distintos de caras. ¿En qué sólidos podemos estar pensando?
c) Todos los vértices tienen el mismo orden. ¿Añade información?
d) Tiene más de dos caras triangulares. ¿Añade información?
e) Todas las diagonales del sólido quedan en el interior de él. ¿Añade información? ¿En qué familia específica estamos pensando?
f) La altura del sólido coincide con la distancia entre los centros de sus bases. ¿Añade información? ¿En qué familia específica estamos pensando?
g) Tiene todas las aristas de la misma longitud. ¿En qué familia específica estamos pensando?
h) Tiene 40 diagonales de las caras y 48 diagonales del espacio. ¿Cuántos lados tiene el polígono de la base? ¿En qué sólido estamos pensando? Dad nombre y si podéis dibujadlo. Si no sabéis dibujarlo, dibujad el polígono de la base o de las bases.

Las actividades que los estudiantes resolvieron antes de tratarlas en clase, cuyas respuestas soportan los resultados que presentamos aquí, eran actividades de identificación y descripción de familias de sólidos y otras en las que estaban implicadas familias de sólidos y sus propiedades. A continuación las describimos brevemente y presentamos algunos ejemplos.

Identificación. Los modelos físicos que utilizamos para que se identificaran o construyeran eran modelos y objetos del entorno que se habían mostrado al introducir las familias, o habían surgido en el contexto de la actividad, inmersos en los procedimientos de construcción, o de generar los sólidos que hemos mencionado. Para seleccionar estos modelos físicos concretos y para presentarlos, consideramos los diferentes factores determinados por la investigación, que son los que influyen en la dificultad de estas tareas (Burger y Shaughnessy, 1986; Freudenthal, 1973, 1983; Fuys, Geddes y Tischler, 1988; Guillén, 1997; Laborde, 1996; Vinner y Hershkowitz, 1983): la familiaridad con ellos, la posición, la esbeltez o achatamiento y los materiales que se han utilizado para construir los modelos. Así, los ejemplos y no-ejemplos seleccionados para que se identificaran los presentamos en diferentes posiciones y con diferentes representaciones físicas (modelos macizos, como estructuras de superficie y como estructuras de aristas).

Descripción y clasificación. Algunas actividades de análisis se referían a la descripción de modelos y a la descripción de las familias tratadas y de las subfamilias establecidas al tratar el problema de la clasificación.

Al abordar este problema trabajamos clasificaciones particiones[6] con criterios geométricos que tienen gran componente visual; así establecimos los prismas rectos y oblicuos, los prismas convexos y cóncavos. Al considerar criterios que centran la atención en la/s base/s o en las caras laterales, establecimos los prismas triangulares, cuadrangulares, etc.; así como los prismas de bases regulares y los de bases irregulares; los prismas de caras laterales regulares y los de caras laterales irregulares. Clasificar con el criterio de regularidad (igualdad) de todas las caras nos llevó a los prismas de caras regulares (prismas de caras iguales)[7]. También consideramos las subfamilias correspondientes de los antiprismas, las pirámides y las bipirámides. Dentro de los prismas cuadrangulares centramos la atención en el cubo, romboedro, ortoedro, paralelepípedo, prismas de bases trapecios isósceles, prismas de bases cometas y los prismas de bases trapecios.

La tabla II presenta una descripción temporal de cómo se fueron planteando a los estudiantes estas tareas de descripción; en ella se indican sugerencias que se dieron a los estudiantes cuando se les pidió que describieran familias, que reflejan aquello en lo que se centró la atención al resolver las actividades en clase.

Familias de sólidos y propiedades. Las actividades de análisis que propusimos no se referían sólo a descripción de familias de sólidos. Como muestra la tabla III, respondían a situaciones en las que se relacionaban familias de sólidos dadas por su nombre, con propiedades: en unas actividades, las propiedades se daban enunciadas y se cuestionaba si una familia dada verificaba la propiedad (tarea T.1); en otras, lo que se cuestionaba eran las familias que cumplían la propiedad dada (tarea T.2); y en otras se tenía que adivinar una familia o subfamilia de sólidos basándose en las propiedades que se iban enumerando sucesivamente (tarea T.3).

Las entrevistas

Los estudiantes de magisterio del curso 1994-95 de la optativa de Geometría del espacio estuvieron organizados en dos grupos durante todo el curso. Las actividades que realizaron en clase se grabaron en vídeo y en casete: cada día de clase se grababa un grupo con vídeo y otro con casete alternativamente. Las actividades que se resolvían en los grupos eran las propuestas para que se trabajaran antes de clase. Cuando los estudiantes ya las habían resuelto, las comparaban con las de sus compañeros.

Las entrevistas realizadas con estudiantes de magisterio en su mayoría fueron individuales; sólo en algunas los estudiantes intervinieron por parejas. Fueron grabadas en vídeo o en casete. Si bien las entrevistas realizadas con niños de 12 años eran más bien exploratorias, en un intento de determinar ejemplos, ideas, propiedades o relaciones erróneas que se incluyen en los objetos mentales, las realizadas con estudiantes de magisterio eran semidirigidas o dirigidas, ya que su objetivo era diferente. Por un lado, pretendían aclarar respuestas pobres, o respuestas que podían tener interpretaciones diferentes. Por ejemplo, dos respuestas que necesitan aclaración son: *a)* cuando se tiene que identificar un prisma de base regular y se indica que *es prisma de base irregular porque tiene los lados y ángulos desiguales*; y *b)* la que se daba en actividades de adivinanza cuando la propiedad que se consideraba era «como mucho tiene dos tipos de caras». Para la primera cuestión, dado que, además de estar el modelo en una mesa, se disponía del dibujo del mismo en la hoja que se entregaba con las cuestiones, no se podía saber si la respuesta respondía a que no se interpretaban los convenios de la representación o bien a que los juicios no se basaban en las propiedades que se indicaban. Para la segunda cuestión, si en la respuesta no se nombran las «bipirámides», puede ser: porque se considera que en las bipirámides todas las caras son triángulos (se tiene en cuenta que la base no es cara de las bipirámides) y *como mucho* se interpreta como «exactamente»; o porque se asocia la base como cara y *como mucho* se interpreta como con el significado de «exactamente», pero se piensa sólo en las bipirámides triangulares. Por otro lado, si se incluye esta familia en la respuesta, puede ser: porque se interpreta *como mucho* como «exactamente» y se cree que las bipirámides tienen dos tipos de caras (se considera la base como cara de las bipirámides), o porque se aplica que las caras son triángulos (no se considera la base como cara) y se interpreta adecuadamente el término *como mucho.*

Por otro lado, otras entrevistas pretendían averiguar lo persistentes que son: los ejemplos, las ideas, las propiedades o las relaciones erróneas que se habían indicado; el lenguaje que se utiliza; y la fluidez y los problemas de lenguaje que se tienen para expresar las propiedades, las ideas y las relaciones.

ANÁLISIS DE DATOS

Las respuestas de estudiantes de magisterio

Cada estudiante tenía asignada una carpeta en la que se depositaban las actividades que resolvía por escrito antes de que el estudio de éstas fuera abordado en clase. Además, las respuestas de cada estudiante las agrupamos según que correspondieran a tareas de identificación o a los diferentes tipos de tareas que planteamos sobre análisis.

Para cada actividad, las respuestas de varios alumnos las utilizamos en plan exploratorio; servían además para corroborar lo que ya habíamos observado con las experiencias previas que realizamos los años anteriores con otros cursos. Para cada uno de estos alumnos y para cada tipo de actividades, en hojas que diseñamos para ello, nos anotábamos lo más característico de sus respuestas. Por ejemplo, para las tareas de descripción de familias o subfamilias de sólidos en la hoja correspondiente a cada familia indicábamos:

¿Qué ejemplos introducen en su objeto mental de esta familia? ¿Qué ejemplos incluyen que no lo son? ¿Qué

Tabla IV
Sobre lo que hay que observar al comparar la descripción de diferentes familias de sólidos.

La descripción de los sólidos, los poliedros, los prismas, los antiprismas, las pirámides y las bipirámides

– El procedimiento sistemático indicado como ayuda, ¿en qué familias se aplica?

– Las sugerencias dadas: «Indicar las propiedades que se mantienen en esta familia respecto de las propiedades de las familias descritas antes». «Precisar las propiedades que se pueden adaptar con algunas modificaciones». ¿En qué familias se aplican?

La descripción de las subfamilias de los prismas

– ¿Pueden aplicar las sugerencias dadas al describir una subfamilia? ¿Pueden hacerlo cuando ya se han descrito varias subfamilias?

– ¿Qué errores cometen al describir una subfamilia? ¿Persisten errores del mismo tipo al describir otras subfamilias?

ejemplos que lo son no los identifican como tales? ¿Qué propiedades enumeran? ¿Qué propiedades indican que no lo son? ¿Cuáles que lo son no las enumeran? ¿Qué relaciones entre familias incluyen? ¿Qué errores?

Además de observar por separado la respuesta dada para cada familia, teníamos en cuenta que las actividades de descripción de familias se planteaban en una secuencia temporal. La tabla IV aclara de qué manera lo teníamos en cuenta.

Con la información obtenida elaboramos diferentes hipótesis y diseñamos otras hojas para poder registrar si los otros estudiantes también presentaban las características delimitadas. Así, las respuestas de los otros alumnos nos servían para decidir si la característica observada se presentaba con suficiente frecuencia para poder presentarla como resultado de la investigación. Si con las respuestas de estos estudiantes aparecía algo nuevo que consideráramos interesante, lo introducíamos también como característica a tener en cuenta cuando analizáramos las respuestas de otros estudiantes.

Todos los datos que se repitieron en todos los grupos de magisterio que participaron en la investigación, y que se reflejaban en más de 2 ó 4 estudiantes, según el número de estudiantes del grupo, los agrupamos de nuevo. Y los de cada grupo los separamos en otros grupos, que es como los presentamos en el apartado siguiente en calidad de resultados de la investigación.

Respecto de la identificación de ejemplos de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides y de las subfamilias establecidas al clasificar, además de anotar los que no se identificaban adecuadamente, observamos qué ejemplos eran los que se nombraban primero y tratamos de determinar los factores que habían influido en la identificación. Así, presentamos cuatro resultados que hacen referencia a los ejemplos de familias de sólidos que los estudiantes incorporan en los objetos mentales que constituyen para estas familias; uno de ellos constata que hay un orden jerárquico en el logro de ejemplos de conceptos relativos a los sólidos. El resultado 2 indica los ejemplos que se mencionan de manera incorrecta. Los resultados 3 y 4 señalan los factores que hemos determinado como los que influyen en tareas de identificación: los que provienen de las propias representaciones físicas de los sólidos y los que se pueden fomentar con la enseñanza: la familiaridad que se tenga con los objetos y la posición.

Los resultados que incluimos en los puntos 5 y 6 hacen referencia a ideas o propiedades erróneas. En el punto 5 incluimos las que provienen de los distractores visuales; son consecuencia de la tendencia de los alumnos a dejarse llevar por su percepción visual. Las hemos agrupado a su vez en las ideas o propiedades erróneas que provienen de las diferentes representaciones físicas de los sólidos y aquéllas cuya causa es la dificultad que conlleva hacer una lectura geométrica. En el punto 6 hemos incluido ideas y propiedades erróneas que no provienen de distractores visuales. En este caso las hemos agrupado según la posible causa que las ha ocasionado. Al hablar de ellas en el apartado siguiente indicamos varias respuestas ilustrativas de cada resultado.

Las sesiones de trabajo y las entrevistas

Para los datos recopilados en cintas de vídeo o de casete, o bien hicimos transcripciones literales (para todas las sesiones con niños de 12 años y para algunas entrevistas con estudiantes de magisterio) o bien resúmenes (para las sesiones de clase del grupo de Geometría del espacio) que contenían lo más destacable de cada sesión. Así pues, conseguimos varios protocolos que constituían el objeto de análisis y también varios resúmenes, en los que apuntamos lo que se consideraba relevante, bien porque confirmaba lo que ya se había observado con las experimentaciones con otros estudiantes, bien porque podía introducirse como algo nuevo que tenía que ser objeto de experimentación.

En el anexo indicamos dos protocolos que reflejan cómo se desarrollaron las entrevistas y discusiones de clase y dan cuenta de alguno de los resultados que vamos a presentar.

El primero narra parte de una sesión con niños de 12 años (E1, E2, E3 y E4) y da cuenta de tres de los resultados que presentamos en este artículo: estas respuestas fueron corroboradas con las respuestas de otros estudiantes, incluidos estudiantes de magisterio. El protocolo muestra la sorpresa de uno de los niños cuando se le pide que identifique como poliedro un modelo que no había visto antes y que no pertenece a las familias que se habían estudiado; el niño piensa que, si el poliedro no tiene nombre, entonces, no es nada. Otro niño señala que para él la identificación de modelos a partir de armazones es más difícil que a partir de los modelos físicos correspondientes. El protocolo refleja también que, cuando se presentan los armazones como representaciones materiales de los ejemplos de las familias de sólidos, para algunos estudiantes aceptar como atributo de los poliedros que las caras encierran perfectamente un espacio entra en conflicto con la materialización del poliedro mediante su armazón; es necesario advertir que los detalles de que el interior o que las caras estén materializadas no hay que tomarlos en consideración, siempre que, con la representación que se trabaje, quede perfectamente delimitada la forma del sólido.

El segundo protocolo muestra respuestas que dieron estudiantes de 3ºC de magisterio, después de que en clase se hubiera discutido acerca de si eran perpendiculares a una recta algunas rectas contenidas en el plano perpendicular y que la cortan, o las rectas que, situadas en este plano, no cortan la recta considerada. Los estudiantes (E1, E2, E3 y E4) a los que hacemos referencia fueron los que en clase plantearon y respondieron las preguntas que transcribimos; el protocolo corresponde a la entrevista grabada en casete que tuvimos posteriormente con estos estudiantes, con el fin de poder registrar lo que, según ellos, reproducía la discusión que había tenido lugar en clase.

En los prismas rectos, el que la base no sea un rectángulo dificulta la identificación de la perpendicularidad entre la arista lateral y las aristas de las bases que comparten un vértice del prisma. Estudiantes que no tuvieron dificultades para determinar las aristas perpendiculares a una dada en el cubo y ortoedro, cuando presentamos un prisma recto de base pentagonal, indicaron que, «si una de las rectas es vertical y la otra es horizontal, lo veo claro, pero si no [...] Es que aquí, este lado [*se refiere al lado del pentágono*] está inclinado». La dificultad aumenta cuando no se trabaja con modelos sino con dibujos. El protocolo muestra cómo, en un prisma recto pentagonal, uno de los estudiantes no reconoce la perpendicularidad entre una arista lateral y una de la base, y el otro estudiante le hace ver dónde radica su idea errónea y cómo se puede evitar el problema usando modelos en vez de dibujos.

Una vez aceptado que, en los prismas rectos, las aristas laterales eran perpendiculares a las de las bases, algunos estudiantes todavía no identificaron como perpendiculares la arista lateral y una diagonal de la base que compartían un vértice del prisma. Fue necesario colocar varillas que representaban los elementos del prisma o centrar la atención en la sección correspondiente para que se aceptara la perpendicularidad de estos elementos.

Respecto de la perpendicularidad también comprobamos que un atributo crítico que tiene mucho peso en el objeto mental de perpendicularidad de segmentos es que ambos tienen que tener un punto común. Cuando, en las experimentaciones realizadas, un estudiante (en el protocolo lo nombramos como E3) planteó la cuestión de si las aristas laterales de un prisma recto eran perpendiculares a las aristas de la base con las que no comparten vértice (una vez que ya se había discutido que sí que lo eran con las otras), de nuevo surgió una discusión, reflejada con las respuestas de E3 y E4. La mayoría de estudiantes se mostraron muy reacios a admitir éstos como segmentos perpendiculares; pero, una vez que un estudiante (E4) cuestionó si incluir esta condición como atributo crítico de rectas perpendiculares provenía del mundo de ejemplos que se había visto hasta entonces, otros estudiantes estuvieron de acuerdo en que esto era posible, y después sugirieron que se eliminase esta condición para extender la idea de perpendicularidad de manera que se incluyan estas situaciones.

RESULTADOS: LOS OBJETOS MENTALES CONSTITUIDOS. RESPUESTAS ILUSTRATIVAS

Como hemos indicado en el apartado anterior, vamos a presentar como resultados, cuatro que hacen referencia a ejemplos de familias de sólidos y dos que se refieren a propiedades o ideas erróneas de estas familias. De la gran variedad de respuestas que los estudiantes mostraron en las entrevistas, en las preguntas de clase y en las actividades que resolvieron, para narrarlas aquí hemos seleccionado las que consideramos representativas de cada resultado.

1) Para los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides, los ejemplos que más peso tienen en el objeto mental correspondiente son generalmente los que tienen la lista de atributos más larga.

Ejemplos ilustrativos

– En un principio, los ejemplos prototípicos de estas familias (en los que se piensa primero para basar las respuestas en ellos) son los prismas (antiprismas, pirámides, bipirámides) rectos de base/s regular/es y que tienen dos medidas para las aristas (una para las aristas laterales y otra para la/s base/s).

Cuando, con criterios visuales, se establecen las familias correspondientes (por ejemplo, los prismas cóncavos y convexos, y los prismas rectos y oblicuos), si se presta la misma atención a las dos familias que se establecen con un criterio dado, las familias de los cóncavos y de los oblicuos, que tienen atributos visuales muy fuertes, se incorporan rápidamente en el objeto mental correspondiente y llegan a tener gran peso en el primer objeto mental que se constituye.

– Los ejemplos que más peso tienen en las subfamilias de antiprismas y pirámides de caras iguales son los que tienen además las caras regulares.

En las familias de los ortoedros y los romboedros, a menudo no se tiene en cuenta el cubo. El que las familias del romboedro (ortoedro) y del cubo se hayan visto como excluyentes y las características visuales de los ejemplos más generales (romboedros u ortoedros que no son cubos) explica las respuestas y corrobora el resultado indicado.

– Los ejemplos que más peso tienen en las subfamilias de prismas de caras laterales regulares son los que tienen además las bases regulares. Los que tienen bases polígonos de lados iguales tienen menos peso. Y es necesario recurrir a los prismas cóncavos de caras laterales regulares en sucesivas ocasiones para que los estudiantes los evoquen cuando tienen que hacer juicios sobre esta familia.

2) En el objeto mental constituido para algunas familias de sólidos, algunos ejemplos no se incluyen como tales y se incluyen como ejemplos modelos que no lo son.

Ejemplos ilustrativos

– El cilindro y el cono se incluyen como ejemplos de poliedro.

– Los modelos con caras cuadriláteros (triángulos) no se identifican correctamente como ejemplos de prismas (antiprismas):

• Modelos que tienen todas las caras cuadriláteros que no son paralelogramos se incluyen como prismas. Los estudiantes indican que «las caras laterales tienen que ser cuadriláteros» (en vez de paralelogramos) o que «son prismas, pues son prismas truncados».

Los prismas de bases trapecios no se incluyen como ejemplos. Si en otros casos la posición de un objeto influye considerablemente en su identificación, en estos casos aún influye más.

• El octaedro y otras bipirámides cuadrangulares se incluyen como ejemplo de bipirámides pero no como ejemplo de antiprisma. Aunque se insista en ello en diferentes contextos, estos ejemplos siguen teniendo poco peso en el objeto mental de antiprisma.

3) Las representaciones físicas de los sólidos pueden condicionar la identificación de los sólidos como ejemplos o no-ejemplos de una familia.

Respuestas ilustrativas

– Hay que abstraerse de imperfecciones que vienen del objeto, del material o de la construcción y delimitar dónde está el límite para la tolerancia de estas imperfecciones.

• Ante dos modelos construidos con cartulina, uno con imperfecciones que vienen de la construcción y otro que no tiene las bases paralelas, algunos estudiantes aceptan ambos como prismas (aclaran que están un poco mal hechos) o rechazan ambos (aclaran que no se cumple alguna propiedad).

• Como ejemplos de una familia de sólidos se nombran objetos reales que, en algunos casos, no corresponden exactamente a una forma en un contexto geométrico. Por ejemplo, como objetos con forma de cilindro se nombran los vasos. Aun aclarando *que se ha añadido la cara que delimitaría un espacio cerrado*, hay que tener en cuenta también que en los vasos se pueden aplicar transformaciones que siguen convirtiendo la forma original en vaso, y los objetos resultantes, aunque se parecieran a un cilindro, ya no tendrían la forma de cilindro: las bases no serían iguales.

– Algunos ejemplos de familias de sólidos que se identifican correctamente cuando se muestra un modelo físico de cartulina no se reconocen como ejemplo cuando se muestra un armazón del mismo (Anexo, protocolo 1). Como en los armazones, las caras no están materializadas, la identificación conlleva más problemas de visión espacial.

– Algunos armazones de sólidos no se identifican como poliedros porque el atributo de los poliedros «las caras delimitan un espacio» entra en conflicto con la materialización del poliedro a través de su armazón (Anexo, protocolo 1).

4) Algunos factores que influyen en la identificación de los sólidos como ejemplos o no-ejemplos de una familia dada provienen de la enseñanza recibida (de los ejemplos seleccionados o de cómo se muestran éstos). Los que hemos detectado son: la familiaridad que se tenga con los objetos presentados como ejemplos de una familia de sólidos; la esbeltez o achatamiento de los modelos y la posición.

Ejemplos ilustrativos

– Al pedir la identificación como poliedro de un modelo físico que no se había visto antes, un niño de 12 años respondió: «Ése no es nada. No lo hemos visto nunca.» (Anexo, protocolo 1).

– Algunos niños no identificaron como prismas modelos físicos de prismas muy «chatitos».

– Ante un modelo físico de un prisma apoyado en una cara lateral, algunos niños de 12 años, y también estudiantes de magisterio, respondieron: «Así no es prisma. No encuentro dos caras iguales. La cara de arriba no es igual que la de abajo. No son bases.» Al mostrarlo apoyado en una de las bases respondieron: «Sí que es prisma. Las bases son iguales y paralelas y se juntan con paralelogramos.»

5) Algunas ideas erróneas que los estudiantes incluyen en el objeto mental constituido para algunas familias de sólidos provienen de distractores visuales:

– De las diferentes representaciones físicas de los sólidos.

– De la dificultad para que se haga una lectura geométrica.

Ejemplos ilustrativos

– Los aspectos perceptivos de los modelos físicos de los sólidos pueden entorpecer la lectura geométrica de algunos estudiantes, al atraer la atención sobre elementos del modelo no pertinentes para esa lectura.

• En los modelos físicos cuyas caras están formadas por varios polígonos de material comercializado (todos quedan en el mismo plano), especialmente si son de diferente color, algunos estudiantes identifican cada pieza del material como una cara del sólido que se construye.

• Cuando la arista de un modelo está formada por varias varillas unidas con bolitas, algunos estudiantes identifican cada varilla con una arista y cada bolita con un vértice.

• En las bipirámides construidas con dos pirámides que se han juntado por sus bases, algunos niños de 12 años indican que «la base de las pirámides es cara de las bipirámides porque no se puede quitar.»

– Cuando los modelos se apoyan sobre un vértice o sobre una arista, la identificación de igualdad, paralelismo o perpendicularidad de elementos presenta dificultad. Se indica como propiedad de los prismas rectos «que tienen las aristas laterales iguales» y se añade «que los prismas oblicuos no la cumplen.»

– Al principio, en el espacio no se tiene una idea clara para rectas perpendiculares, para rectas paralelas y para rectas que se cruzan. El protocolo 2 del anexo lo confirma para la perpendicularidad de rectas. Respecto del paralelismo, depende de si se aplican ideas visuales o geométricas de las que provienen del plano para que dos rectas que se cruzan se vean como paralelas o no.

6) Ideas erróneas ocasionadas:
– Por problemas de lenguaje.
– Por basar los juicios en subfamilias o en parte de la figura.
– Por el mismo proceso de enseñanza.
– Por la extensión de una propiedad de una familia de sólidos a otra o de elementos del plano a elementos del espacio.
– Por la aplicación incorrecta de relaciones de inclusión, exclusión o solapamiento.
– Por una incomprensión de las expresiones *como mucho, como mínimo, tantas medidas diferentes como.*
– Por una incomprensión de conceptos implicados en la propiedad.

Tabla V
Propiedades que se enuncian para familias de sólidos y subfamilias que no las verifican.

Propiedades	**Familias de sólidos a las que se les asigna**	**Algunas subfamilias para las que no es atributo crítico**
La longitud de la altura coincide con la de las aristas laterales.	Prismas	Prismas oblicuos
Las diagonales de las caras están en la superficie (completamente). Las diagonales del espacio quedan completamente en el interior del sólido. Las diagonales de las caras y las del espacio tienen que ser inclinadas y no pueden coincidir con parte de otra, ni con parte de una arista, ni con una arista.	Prismas	Prismas cóncavos
Tiene caras paralelas dos a dos.	Prismas de bases regulares	Prismas de bases regulares con número impar de lados
Las caras laterales son iguales.	Prismas de bases regulares	Prismas oblicuos de bases regulares
Las aristas tienen dos medidas: la de las aristas laterales y la de las bases.	Prismas de bases regulares	Prismas de caras regulares
Tienen por caras rectángulos y otros que no son rectángulos, las dos bases.	Prismas rectos	Ortoedros
Tienen vértices iguales.	Prismas de bases regulares	Prismas de bases regulares oblicuos
Tienen vértices iguales.	Prismas de caras iguales	Romboedro no cubo
Los ángulos de las caras tienen dos medidas. Las diagonales del espacio se cortan en el centro, no son iguales, no se cortan perpendicularmente. Las diagonales de las caras no son iguales. Tienen dos medidas.	Romboedro	Cubo
Tienen caras rectángulos que no son iguales. Tienen 4 aristas iguales más largas y 4 más cortas y otras 4 (las laterales iguales).	Ortoedro	Cubo
Cumple las propiedades de los prismas convexos.	Prismas de caras laterales regulares	Prismas cóncavos de caras

Respuestas ilustrativas

– Algún término funciona como distractor. Cuando se aplica el significado que tiene el término en el contexto cotidiano y que además se puede haber fomentado con la instrucción, o bien se tiene en cuenta que el nombre dado sólo hace referencia a parte de las caras, o bien que no hace referencia a ellas. Los tres ejemplos que nombramos son ideas muy resistentes:

• Algunos estudiantes tienen una idea de base de las familias de sólidos como cara en la que se apoyan los objetos.

• Algunos estudiantes aplican que la base de los prismas, antiprismas y pirámides no es cara de la figura; como caras sólo se tienen en cuenta las caras laterales.

• Algunos estudiantes tienen la idea de que la base de las bipirámides es cara de éstas.

– Se basan los juicios en subfamilias (los ejemplos prototípicos), por lo que se dejan fuera ejemplos de las familias a las que se asocia la propiedad. La tabla V muestra algunas respuestas.

– Algunas respuestas se basan en juicios que sólo consideran parte de la figura, en vez de tener en cuenta toda ella. Por ejemplo, como propiedad de los prismas de caras regulares se indica que *las caras son iguales*, y como propiedad del ortoedro, que *las diagonales de las caras son iguales*

– Otras causas de ideas erróneas pueden ser la introducción de conceptos a partir de familias específicas, los modelos empleados, las situaciones presentadas o las sugerencias dadas. Respuestas que dan cuenta de ello son:

• *Los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides no tienen ejemplos comunes. Si es prisma no es de otra familia, y lo mismo con las otras.*

• *Una propiedad de los vértices iguales es que los polígonos que los forman tienen que ser cuadriláteros todos, o de otros; pero de la misma familia.*

• *El cubo y el octaedro (o el dodecaedro e icosaedro) sólo son duales cuando el tamaño permite que uno quede inscrito en el otro.*

Tabla VI
Propiedades que se enuncian, familias de sólidos de las que son atributos críticos y familias de sólidos a las que se extienden las propiedades sin ser atributos críticos de ellas.

Propiedades	**Familias de sólidos para las que es atributo crítico**	**Familias a las que se extiende, para las que no es atributo crítico**
Las aristas laterales son iguales.	Prismas	Antiprismas, pirámides
Los primas tienen desarrollos en los que las caras laterales forman un paralelogramo y los polígonos de las bases quedan uno o cada lado.	Prismas rectos	Prismas oblicuos
Cuando, en la base, los lados opuestos son iguales (perpendiculares) también lo son las caras laterales del prisma correspondiente.	Primas rectos	Prismas oblicuos
La longitud de la altura coincide con la de las aristas laterales.	Prismas rectos	Prismas oblicuos Antiprismas rectos Pirámides rectas
La altura dibujada desde un punto de la base o desde el ápice no va a caer (o pasar) fuera de la otra base.	Prismas rectos	Pirámides rectas
Tiene al menos una diagonal de las caras que no está completamente en la superficie.	Prismas cóncavos	Bipirámides cóncavas Sólidos cóncavos
Tiene al menos una diagonal del espacio que no está completamente en interior del sólido.	Prismas cóncavos	Pirámides cóncavas Sólidos cóncavos
Las diagonales de la base tienen el mismo tamaño.	Ortoedro	Prismas de bases regulares
Las diagonales del espacio son iguales.	Ortoedro	Prismas de caras regulares

• *Cuando me pides que elabore definiciones (que ponga en la lista las propiedades necesarias), yo entiendo que con las que ponga tengo que decir todas las familias a las que pertenece el modelo: prismas, prismas convexos, etc.*

– La tabla VI muestra propiedades erróneas ocasionadas por la extensión de una propiedad que se cumple en una familia de sólidos a otra familia que no la verifica; o por la extensión de resultados del plano a los elementos análogos en el espacio. La tabla refleja la propiedad, la familia para la que la propiedad es atributo crítico y la familia a la que se extiende la propiedad.

– La aplicación incorrecta de relaciones de inclusión, exclusión o solapamiento también es posible causa de errores. Ejemplos de respuestas en las que esto ocurre son: Como propiedades de los prismas de base cometa se indica: *Son las de los paralelepípedos porque el romboedro es ejemplo de ambas. Son las de los romboedros porque los romboedros son ejemplos de cometas (las varillas de las diagonales se cortan en el punto medio de las dos).*

– En algunas respuestas los términos *como mucho* o *como máximo* se interpretan como «exactamente», y las expresiones *tiene tantas medidas diferentes como...* se interpretan como que «tienen que tener medidas diferentes». En otras respuestas, estos términos no se niegan adecuadamente:

• Como propiedad de los prismas oblicuos se indica que *las caras laterales de los prismas oblicuos no tienen ángulos rectos.*

• Como familia dicotómica de los prismas de caras regulares y de los prismas de caras iguales se nombran respectivamente *los prismas que no tienen ninguna cara regular* y *los prismas que tienen todas las caras desiguales*.

• Como propiedad de los prismas de bases irregulares se indica que *las bases tienen lados y ángulos desiguales*.

– Por último, vamos a presentar respuestas que pueden explicarse desde la incomprensión de los conceptos implicados en la propiedad.

• Sobre el concepto de *vértices iguales. Los vértices del romboedro son iguales porque los polígonos que los forman son cuadriláteros todos. Los vértices de los prismas de caras regulares son distintos. En ellos el ángulo de la base es distinto del de las caras laterales (90° + 90°).*

• Caras iguales y caras del mismo tipo. *En los prismas rectos, las caras laterales son iguales. Son rectángulos todos. En los antiprismas, las caras laterales son iguales. Son triángulos. Los ortoedros no cumplen la propiedad tiene caras de la misma clase. Algunos tienen caras distintas. Lo mismo pasa con el paralelepípedo.*

• Medida de un ángulo diedro. *Los prismas rectos cumplen que los ángulos diedros de las caras laterales coinciden con el correspondiente de la base; y los oblicuos también. Cuando pongo dos segmentos que se juntan en la arista lateral, forman el ángulo de la base.*

• Las propiedades que pueden expresarse de manera más precisa para una familia de sólidos. *Los prismas de caras regulares no cumplen que están formados por una cinta de rombos unida y cerrada por ambos lados por dos polígonos. La cinta es de cuadrados. No cumplen que sus aristas tienen como mucho dos medidas diferentes. Tienen una medida.*

CONCLUSIONES

1) En el contexto de la geometría de los sólidos, trabajando con diferentes representaciones físicas de los mismos, hemos corroborado los resultados obtenidos por investigaciones realizadas en un contexto de geometría plana o considerando dibujos de los sólidos.

El resultado que Hershkowitz (1990) constató en el estudio de los polígonos, «hay un orden jerárquico en el logro de ejemplos de conceptos», se extiende a los sólidos, como así lo corrobora nuestro primer resultado acerca de los ejemplos que los estudiantes incorporan en sus objetos mentales de familias de sólidos.

Los resultados 3 y 4 también han sido señalados por otros investigadores. Laborde (1996), considerando los dibujos de objetos geométricos, ha subrayado que las propias representaciones físicas de los sólidos y la familiaridad con los objetos influyen en tareas de identificación. Freudenthal (1983), respecto al primer problema, plantea la cuestión de por qué un dado de marfil con las esquinas redondeadas y un dado con las esquinas afiladas se aceptan ambos como ejemplos de cubo y dónde está el límite para que un dado rugoso se acepte también como ejemplo. Y el segundo problema se ha puesto de manifiesto en las investigaciones sobre polígonos de Hershkowitz (1990); ella lo llama *fenómeno prototipo y juicios prototípicos*.

Por otro lado, varios investigadores han subrayado que la posición de los objetos influye considerablemente en su identificación (Burger y Shaughnessy, 1986; Fuys, Geddes y Tischler, 1988). Ya hemos hablado de lo que Vinner y Hershkowitz (1983) llaman *distractores de orientación*. Freudenthal (1973, 1983) también comenta este problema en varias ocasiones. Incluso se aventura a pronosticar que esto es una consecuencia de la enseñanza recibida, que tiende a presentar los objetos con dibujos, en una posición dada. Asimismo señala que esta posición estándar no se presenta cuando los objetos se muestran en un contexto topográfico, y que uno se puede desprender de ella cuando se está ya en el contexto geométrico de las formas rígidas reproducibles por congruencia o similaridad.

El resultado 5 hace referencia a ideas erróneas que provienen de los distractores visuales. Las dificultades y errores derivados de las propias representaciones físicas de los sólidos surgen como consecuencia de que los modelos físicos con los que se trabaja en tareas de identificación de formas son objetos del entorno (por ejemplo, botes, cucuruchos, etc.) o representaciones materiales de los sólidos. En el contexto de clase, el estudiante tiene que considerar los modelos físicos, dentro de una interpretación geométrica, pero cuando no se tienen suficientes conocimientos teóricos geométricos, los modelos de los sólidos o de sus elementos se interpretan a partir de una lectura perceptiva. Este resultado también se presenta en Laborde (1996, p. 69) al interpretar los dibujos geométricos en vez de las representaciones materiales de los sólidos.

Los otros factores perceptivos que indicamos como causa de otras ideas erróneas, intrínsecos a los modelos y que entorpecen la lectura geométrica, corresponden a distractores de los que Vinner y Hershkowitz (1983) llaman *distractores de orientación*.

Por último, en el resultado 6 hemos incluido ideas y propiedades erróneas que, si bien algunas pueden interpretarse desde lo que Hershkowitz (1990) llama *fenómeno prototipo y juicios prototípicos* (las ocasionadas por basar los juicios en subfamilias), otras aportan resultados novedosos específicos de esta investigación.

Destacamos las ideas erróneas en las que el nombre que se ha dado a parte de los elementos de los sólidos funciona como distractor (el nombre de *bases* y de *caras laterales*) y las que centran la atención en parte de la figura cuando se debería tener en cuenta toda ella; estas ideas, en muchos casos, pueden llevar asociado un problema de lenguaje.

También hay que subrayar las propiedades e ideas erróneas que pueden explicarse desde: *a)* el procedimiento utilizado para enunciarlas (extensión de una propiedad a otro contexto o situación); *b)* el tipo de conceptos implicados en ellas (en las propiedades intervienen relaciones entre familias que se tienen que enunciar o las propiedades incluyen términos similares a *como máximo* para reflejar el tipo de clasificación que se establece); *c)* el contenido del concepto (hay diferentes conceptos implicados en la propiedad). Llegar a expresar correctamente este tipo de propiedades colleva gran dificultad. Resulta bastante difícil que los estudiantes lleguen a utilizar correctamente el vocabulario geométrico para enunciar estas propiedades y relaciones.

2) Las tareas propuestas para este estudio implicaban una gran variedad de contextos en los que se presentaban los contenidos geométricos. Éstas se mostraron muy eficaces para revelar los ejemplos y las propiedades erróneas que los estudiantes incluyen en sus objetos mentales de algunas familias de sólidos. En nuestras experimentaciones también se mostraron muy adecuadas a fin de que los estudiantes adquirieran objetos mentales suficientemente ricos en ejemplos, atributos, relaciones, ideas y clasificaciones para una gran variedad de contenidos geométricos.

3) El éxito de la entrevista estructurada, usando un guión específico como base, y el de las sesiones exploratorias con los niños de 12 años, así como la gran cantidad de estudiantes de magisterio que resolvieron las tareas de manera voluntaria, permitió que determinásemos una gran variedad de respuestas y que pudiéramos comparar muchas respuestas de los estudiantes a las mismas cuestiones. Adaptar la metodología empleada en este estudio para investigar otros conceptos geométricos nos parece claramente apropiado.

IMPLICACIONES DIDÁCTICAS

Los hallazgos de este estudio tienen implicaciones prácticas tanto para maestros o profesores como para diseñadores de currículo. Pueden utilizarse para el diseño de actividades que tengan como propósito la enseñanza-aprendizaje de los sólidos y de ellos se desprenden también sugerencias para la instrucción.

Las experiencias seleccionadas para incluirse en el currículo de geometría de los sólidos deben considerar que, en los primeros niveles, los estudiantes necesitan representaciones físicas de los sólidos y que las actividades que se deben proponer han de estar inmersas en procedimientos de construir o generar estas representaciones. Una parte del trabajo inicial, especialmente si se trabaja con niños pequeños, debe mostrar las diferentes representaciones materiales de los sólidos (modelos macizos, modelos huecos y armazones) y aprovechar cada una de ellas para trabajar el tipo de propiedades de los sólidos que remarcan.

Hemos comprobado que, cuando se muestran los armazones de los sólidos, resulta más difícil identificar a qué familia pertenece el sólido correspondiente que si se muestra un modelo del mismo. Por lo tanto, el comienzo del estudio de la geometría de los sólidos tiene que estar basado en modelos, bien sean macizos (de madera o de plastilina) o huecos (construidos con cartulina a partir de uno de sus desarrollos o con los materiales comercializados formados por polígonos). Hay que tener en cuenta que los estudiantes han de integrar en el objeto mental que van construyendo todos los significados que provienen de los diferentes contextos en los que aparecen los sólidos. Para ello es aconsejable presentar los sólidos materializados de diferentes maneras, que lleven a los estudiantes a ideas diferentes (macizos, huecos pero con la superficie cubierta o sólo el armazón); así, si los estudiantes han incluido en su objeto mental de una familia de sólidos atributos que provienen de las diferentes materializaciones (es hueco, es macizo, está con agujeros), pronto pueden llegar a prescindir de ellos. Cabe recordar la conveniencia de prestar atención a las ideas erróneas de cara, arista y vértice, que provienen de estas representaciones físicas.

De los resultados obtenidos se puede concluir que, en el diseño de tareas de introducción de conceptos, debemos preocuparnos de presentar diferentes ejemplos de cada uno de los conceptos tratados o de que aparezcan en el contexto de la actividad (en tareas de construcción o de generar modelos); que se observen construidos con diferentes materiales, en distintos contextos y en diferentes tiempos. Se pretende que la mayoría de los estudiantes lleguen a estar libres de las posiciones prototipo y de las ideas erróneas que puedan surgir y generalicen su objeto mental de una determinada familia de sólidos o de sus elementos; esto es, se pretende que los estudiantes incluyan en el objeto mental correspondiente todos los ejemplos de la familia de sólidos, en diferentes posiciones, junto con propiedades de la familia y relaciones de sus elementos o con ejemplos de otras familias. Vale la pena subrayar el papel primordial que tienen los errores de los estudiantes en la selección que se haga de los ejemplos y no ejemplos que se propongan a los estudiantes.

Hay que aclarar también que las primeras ideas sobre las familias de sólidos se basan en un mundo de ejemplos y tienen que irse precisando como consecuencia de ejemplos que van surgiendo en el contexto de la actividad. Conviene destacar el papel de las tareas que permiten a los estudiantes experimentar, reflexionar y comprender que las ideas de los conceptos se van precisando cuando se encuentran ejemplos que obligan a ello.

Por último, queremos hacer referencia a la dificultad que presenta para los estudiantes utilizar correctamente el vocabulario geométrico cuando enuncian propiedades o relaciones, especialmente cuando hay implicados conceptos conectados. No sólo hay que prestar atención a las ideas y a las propiedades erróneas que tienen los estudiantes; también hay que trabajar para que los estudiantes vayan desarrollando su lenguaje geométrico.

NOTAS

[1] El término *objeto mental* lo utilizamos con el significado que se indica en Freudenthal (1983). Puig (1997) apunta que podemos partir «de una imagen inicial: la contraposición objeto mental/concepto es una contraposición entre lo que está en la cabeza de las personas –los objetos mentales– y lo que está en las matemáticas como disciplina –los conceptos». Puig (1997) señala que la idea de objeto mental hay que verla también como un medio de organización de fenómenos. Y que los objetos mentales se constituyen en cadenas fenómenos/medios de organización, de la misma manera que sucede con los conceptos, con el consiguiente aumento de nivel. Las propias definiciones de los conceptos pueden formar parte de los objetos mentales que se están constituyendo pero no los sustituyen. Por ejemplo, aunque se tenga una definición de *caja,* además de la definición, forman también parte del objeto mental las cajas que se han construido con diferentes materiales, los dibujos que se han visto o que se han dibujado, las acciones que ha realizado para construirlas, dibujarlas o experimentar con ellas, el conjunto de ejemplos que esa persona ha visto o ha experimentado.

[2] Los *antiprismas*, al igual que los prismas, tienen dos caras iguales y paralelas (las bases), pero las caras laterales son triángulos en vez de paralelogramos. Las *bipirámides* guardan relación con las pirámides. Están formadas por las caras laterales de dos pirámides que tienen la misma base.

[3] Vinner (1983) introduce la terminología de *imagen del concepto* y de *definición del concepto.* La imagen del concepto se refiere al concepto como se refleja en la mente del individuo. Incluye todo lo que puede venir a la mente relacionado con el concepto (todo lo que se evoca cuando, por ejemplo, se escucha la palabra o se ve un dibujo asociado al concepto). La definición del concepto se refiere a la definición verbal que se tiene para una cierta noción (si es que se tiene alguna, y no siempre recoge todo lo que sabe el individuo), que no tiene por qué ser la definición matemática. También habla del *concepto:* el concepto que se deriva de su definición matemática.

[4] Laborde (1996, p. 67) aclara: «La figura geométrica consiste en el emparejamiento de un referente dado con todos sus dibujos. [...] La expresión «figura geométrica» así entendida remite al establecimiento de una relación entre un objeto geométrico y sus posibles representaciones. Visto así, las relaciones entre un dibujo y su referente construidas por un sujeto, lector o productor de un dibujo, constituyen el significado, para este sujeto, de la figura geométrica asociada. Este significado corresponde a lo que Fishbein (1993) llama *figural concept.*»

[5] Esta asignatura corresponde a una versión del curso de *geometría* impartido a los estudiantes de 3ºC adaptado a las nuevas circunstancias.

[6] Por *clasificaciones inclusivas* queremos decir la clasificación de un conjunto de conceptos de tal manera que los conceptos particulares forman subconjuntos de los más generales. Sin embargo, en una *clasificación partición,* los subconjuntos son disjuntos unos con otros.

[7] Hemos nombrado como *prismas de caras regulares* la familia de los prismas que tienen bases regulares y caras laterales cuadradas. Los *prismas de caras iguales* son los *romboedros* (tienen caras rombos) y hemos considerado el cubo como ejemplo de romboedro

[8] Hemos nombrado, como *ángulos de las caras,* los ángulos de los polígonos que forman la superficie del poliedro; los *ángulos diedros* corresponden a los ángulos que forman dos caras al juntarse formando una arista; y hemos nombrado, como *ángulo del vértice,* la suma de los ángulos de los polígonos que se juntan en el vértice.

Las *diagonales de caras* unen dos vértices del sólido no vecinos y que pertenecen a una cara, y las *diagonales del espacio* juntan dos vértices del sólido que no pertenecen a la misma cara.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BISHOP, A. J. (1989). Review of Research on Visualization in Mathematics Education. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 11(1), pp. 7-16.

BURGER, W.F. y SHAUGHNESSY, J.M. (1986). Characterizing the Van Hiele Levels of Development in Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education,* 17(1), pp. 31-48.

CLEMENTS, D.H. y BATTISTA, M.T. (1992). Geometry and Spatial Reasoning, en Grouws, D. A. (ed.) (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* pp. 420-464. Nueva York: MacMillan.

CHARLES, R.I. (1980). Some Guidelines for Teaching Geometry Concepts. *Arithmetic Teacher,* 27(8), pp. 18-20.

DREYFUS, T. (1991). On the Status of Visual Reasoning in Mathematics and Mathematics Education, en Furinghetti, F. (ed.) (1991). *Proceedings of the l5th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 1, pp. 33-48. Italia: Asís.

FISHBEIN, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematic.* Dordrecht: Reidel.

FISHBEIN, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics,* 24(2), pp. 139-162.

FREUDENTHAL, H. (1971). Geometry Between the Devil and the Deep Sea. *Educational Studies in Mathematics,* 3(2/4), pp. 413-435.

FREUDENTHAL, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task.* Dordrecht: Reidel.

FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Reidel.

FUYS, D., GEDDES, D. y TISCHLER, R. (1988). *The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents.* Journal for Research in Mathematics Education Monograph, 3. Reston: NCTM.

GUILLÉN, G. (1991). *El mundo de los poliedros.* Madrid: Síntesis.

GUILLÉN, G., JAIME, A., CÁCERES, M. y GUTIÉRREZ, A. (1992). *La enseñanza de la geometría de los sólidos en EGB.* Memoria final del proyecto de investigación. Valencia: Institución Valenciana de Estudios e Investigación «Alfonso el Magnánimo».

GUILLÉN, G. (1996). Identification of Van Hiele Levels of Reasoning in Three-Dimensional Geometry, en Puig, L. y Gutiérrez, A. (eds.) (1996). *Proceedings of the 20th Conference of the In ternational Group for the Psychology of Mathematics Education,* pp. 43-50. València: Universitat de València.

GUILLÉN, G. (1997). *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje.* Tesis doctoral. València: Universitat de València.

HERSHKOWITZ, R. (1990). Psychological Aspects of Learning Geometry, en Nesher, P. y Kilpatrick, J. (eds.) (1990). *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* pp. 70-95. Cambridge: Cambridge UP.

HERSHKOWITZ, R., BRUCKHEIMER, M. y VINNER, S. (1987). Activities with Teachers Based on Cognitive Research, en NCTM (1987): *Learning and Teaching Geometry, K-12.,* 1987 Yearbook, pp. 222-235. Reston-VA: NCTM.

HOFFER, A. (1978). *Mathematics Resource Project: Geometry and Visualization.* Palo Alto (Estados Unidos): Creative Publications.

LABORDE, C. (1996). Cabri-Geómetra o una nueva relación con la geometría, en Puig, L. y Calderón, J. (eds.) (1996). *Investigación y didáctica de las matemáticas,* pp. 67-85. Madrid: CIDE.

MESQUITA, A.L. (1992). The Types of Apprehension in Spatial Geometry: Sketch of a Research, *Structural Topology,* 18, pp. 19-30.

[Artículo recibido en marzo de 1999 y aceptado en octubre de 1999.]

ANEXO

Protocolo 1

P: [Muestra el armazón del rombododecaedro] ¿Es un poliedro o no?

E1: Ése no es nada. No lo hemos visto nunca. A ver... ¿qué es?

P: Sí, es verdad, no lo habéis visto aún.

E1: Pues eso... Si no lo hemos visto nunca, ¿cómo quieres que lo sepamos? ¿Cómo se llama? Si no tiene nombre, entonces no es nada.

P: Pero vamos a ver, piensa en lo que tiene que cumplir un poliedro, en sus propiedades y si las cumple, aunque no tengas otro nombre, como en los prismas, las pirámides... podrás decir que es un poliedro. ¿Qué propiedades tiene un poliedro?

E2: Tiene caras polígonos. Es que yo... sólo con varillas no lo veo bien. A ver... ¿tienes uno tapado que se ve mejor? A mi sólo con las varillas me lío. Es mejor de éstos [Se refiere a modelos.] ¿Tienes alguno?

P: Vamos a intentar mirarlo con el armazón, después ya te enseñaré un modelo. ¿Pensáis que es poliedro? Ya le daremos nombre después.

E1: Vale. Sí. Pero aquí arriba yo creo que puedo poner... un romboide. Sí se puede poner. Eso sí que es.

E2: No, porque se puede poner ahí [señala una cara] una punta o algo. Mira, ahí se puede poner... una pirámide.

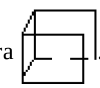
E3: Pero así se supone que esto va a ser algo...

E1: [Interrumpe] Pero no está tapado...

E3: Que ahí se va a poner una cartulina y lo va a tapar.

E2: Pero, como no está tapado, no es. Si estuviera tapado, pues sí.

E4: Yo creo que sí, porque sí; porque tiene forma de poliedro.

E2: Pero ése... [Señala los dos rectángulos unidos de la figura . Antes se había considerado como poliedro porque no encerraba perfectamente un espacio.]

E3: No tiene todos los bordes y éste sí. ¿Pero qué figura puedes pegar ahí si está recto? [Lo muestra con la mano.]

E2: Sí, algo que salga ahí de punta. [Y señala cómo añade una pirámide acoplada a la cara.] Sí que se puede poner.

P: Si queréis hacer este modelo con polígonos, ¿sabéis los polígonos que tenéis que elegir?

Todos: Sí. Rombos.

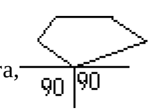
E4: Es poliedro. Los bordes ya están. Es como ése que tiene papel que tú puedes ver lo de dentro... [Se refiere a modelos que vieron en una de las sesiones en las que había poliedros inscritos en otros y el modelo circunscrito tenía las caras de acetato para poder ver el sólido inscrito en él.] Aunque no tiene el plástico, ése tampoco... Pero da igual... Si aquí pegáramos las caras de cartulina, simplemente pegarlas..., ya está. Y no hace falta.

E2: Si no tuviera esos bordes... [Se refiere a caras materializadas.]

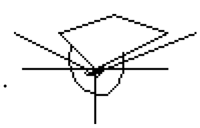
E3: Eso. Aquí está todo. [Se refiere al armazón.] Es como si lo hubieras hecho con las pajitas y lo sueldas. Pero aquí [Se refiere al modelo abierto.] si lo has empezado así... ¿por qué se dejan un poco? Si lo empiezas así... tienes que terminarlo con éstos... [Señala el material de troquelados con el que estaba construido el modelo abierto, formado por varios polígonos que no encerraban completamente un espacio, el cual se había presentado anteriormente para cuestionar la idea de poliedro.] Y si lo empiezas con pajitas, pues sigues así.... Pero todo...

E1: Ah, sí. Con los polígonos también pasaba eso. Lo de las varillas era polígono. Pues aquí, sólo con varillas, también será polígono. Da igual que esté con agujeros, porque ya está como si fuera tapado.

Protocolo 2

E1: Pero esa recta no es perpendicular a la arista. Porque mira, 

las aristas de la base y las laterales son ángulos distintos de 90°. Los que son de 90° son éstos.
[Los ha señalado en la figura].

E2: Pero no te tienes que fijar en esos. Bueno sí... pero no. Es en éstos... 
Hay el mismo ángulo que si coges los lados de la base.
Y esté lo girada que esté, si no lo inclinas para abajo o para arriba, estos ángulos son de 90° siempre.

E1: Yo no lo veo. Son más grandes que 90°.

E2: Pero es que es por el dibujo, que lo haces así... no recto aunque sea... Mira, coge el modelo y lo verás. Mira, las caras son rectángulos. [Se refiere a las caras laterales.] Ves... el ángulo es de 90°. [Señala las aristas de la base y lateral.] No te fijes en la base, que ese ángulo no es de 90°, y tampoco de 180°. Pero es que, si no lo inclinas y coges otra recta, si abres más la base, también es el mismo ángulo, ¿no? [Lo muestra en un modelo. Luego pregunta a la profesora si es verdad.]

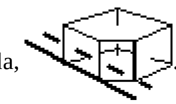
[...]

E3: Una arista lateral de un prisma recto, ¿es perpendicular a todas las aristas de la base? ¿Aunque no se corte?

P: ¿Tú qué crees?

E3: Puede ser como en las diagonales, que poníamos más atributos de los que toca, porque en los ejemplos que habíamos visto pasaba eso. [Se refiere al atributo «las diagonales de las caras quedan completamente en el interior de las caras».]

E4: Aquí no es como con las diagonales. Aquí sí que se dice, sí que es atributo crítico que para que sean perpendiculares ambos tienen que estar unidos, tienen que formar un vértice. Tiene que haber 90° y en los ángulos que forman dos segmentos tiene que haber un vértice.

E3: Pero es que también puedes hacer como para medir el ángulo que forman dos caras. Mira... [Coge un modelo de un prisma, elige una arista lateral y otra de la base y, como se muestra en la figura, sobre la arista de la base coloca una varilla que desplaza paralelamente sobre esta base para acercarla al vértice de la base del que salía la arista lateral elegida, .] Lo que tienes que hacer, cuando no se cortan para comprobar si dos son perpendiculares, es elegir otros segmentos, pero tienen que ser paralelos a los dados.

E4: [Se dirige a la profesora.] ¿Eso puede ser? ¿Es así? Yo creo que no, porque para que haya un ángulo tiene que haber un vértice y no lo hay. Yo siempre lo he visto con vértice, o con 180° también; sí, así, $\perp$. Pero ahí también hay vértice.

E3: [Se dirige a la profesora.] ¿Es así? ¿O eso también es propiedad de las rectas perpendiculares que hemos visto?

P: Todo va a depender de la idea que demos en el espacio para segmentos perpendiculares. Si incluimos que las rectas son concurrentes, las aristas elegidas no se podrían comparar con esta relación. Si queremos extender la idea de perpendicularidad de segmentos para que incluya a estos segmentos como ejemplos, eliminaremos la condición «que las rectas tienen que ser concurrentes» e incorporaremos las condiciones que ha señalado E3 sobre qué segmentos hay que considerar (el paralelo a uno de ellos que corte al otro).

E3: Eso, vamos a eliminar esta condición para extender la idea de perpendicularidad.

E4: Pues yo lo dejaría como estaba. Si no se cortan, se cruzan; puedo decir que se cruzan perpendicularmente.