FUNCIONES COMPLEMENTARIAS DE LOS ARTEFACTOS EN EL APRENDIZAJE DE LAS TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS EN LA ESCUELA SECUNDARIA[1]

Hoyos, Verónica
CAEMTIC, Universidad Pedagógica Nacional. México
vhoyosa@upn.mx

Resumen. En este artículo se presentan algunas secuencias de trabajo sobre el aprendizaje de las transformaciones geométricas, en particular sobre la homotecia, y simetría, reflexión, y traslación (isometrías). Éstas se instrumentaron en un estudio exploratorio que se llevó a cabo con 18 estudiantes del 9º grado, en una escuela pública en México. Su diseño se basó en la exploración y manipulación de un *software* de geometría dinámico, *Cabri-II*[2], y un conjunto de pantógrafos[3] con configuraciones geométricas distintas. La tesis principal que aquí se maneja es que hubo una función complementaria entre los artefactos que se utilizaron. En particular, se argumenta que esa utilización específica dio lugar a procesos de intuición y objetivación en torno de algunas nociones matemáticas en el ciclo de educación básica, como son la proporcionalidad y la comparación entre longitud y área.

Palabras clave. Enseñanza de las matemáticas, funciones de los artefactos, tecnología en el aula.

Complementary function of the artifacts in the learning of geometric transformations with ninth graders

Summary. This article presents several sequences of activities designed to promote the learning of geometric transformations, particularly dilation, and symmetry, reflection, and translation (isometries). An exploratory study was conducted with 18 ninth grade students in a public school in Mexico, based on the exploration and manipulation of the dynamic geometry software, *Cabri-II*[4], and a set of pantographs[5] of diverse geometric configurations. Our main hypothesis relates to a complementary functionality important among the artifacts deployed. In particular, it is argued that specific utilization became useful to promote intuition and objectification of some mathematical notions at the end of basic education, such as proportionality and comparison between length and area.

Keywords. Teaching of mathematics, artifacts' functions, technology in the classroom.

1. PROBLEMÁTICA

Resultados recientes de investigación constatan la potencia del uso de nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas y las ciencias, y en la incorporación al trabajo científico por parte de los estudiantes. En sesiones de trabajo dirigido, los alumnos son capaces de desplegar recursos matemáticos que se desencadenan por medio de la comprensión de nociones (Hoyos, Capponi y Génèves, 1998), o se promueve la creatividad y el ingenio en el diseño científico mediante el uso de nuevas tecnologías (Verillon y Rabardel, 1995; Jörgensen, 1999). Así, estudiantes al término de la educación media, vía los desarrollos recientes de la informática, actúan y acceden al estudio de nociones, propiedades y procedimientos matemáticos como anteriormente sólo era posible en estadios más avanzados del desarrollo (Vincent et al., 2002; Hoyos, 2002).

Por otro lado, perspectivas teóricas y prácticas alternativas complementarias en didáctica de las matemáticas (Mariotti, Bartolini, Boero et al., 1997; Boero, 1998; Arzarello, 2004) argumentan a favor de la introducción en el salón de clases de contextos históricos de recreación de la experiencia científica, en particular aquéllos que tienen que ver con la práctica de la geometría y que utilizan modelos mecánicos o articulados de máquinas para dibujar o trazar como un medio de generación de ideas o nociones matemáticas complejas.

En el trabajo que aquí se presenta se pretende contribuir en una línea de investigación que fusiona la utilización de nuevas tecnologías y la introducción de contextos históricos (Hoyos, Capponi y Génèves, 1998; Vincent et al., 2002; Hoyos, 2002) en la búsqueda de contextos escolares que sean significativos para el aprendizaje de las matemáticas (Confrey, 1993; Noss y Hoyles, 1996).

Según Verillon y Rabardel (1995, p. 77), como resultado de una creciente atención a los efectos de la tecnología y del cambio tecnológico en la forma en que vivimos, aprendemos y trabajamos, actualmente se ha vuelto a poner a discusión la cuestión referente a las relaciones entre cognición y la naturaleza de los artefactos a partir de los cuales ésta se origina en situaciones cotidianas, del trabajo y escolares. En sus indagaciones, estos autores han hecho énfasis en las funciones específicas de los artefactos en el desarrollo cognitivo.

En particular, en la exploración que aquí se realizó, interesó incorporar el uso de ciertos artefactos tecnológicos, un *software* de geometría dinámico (SGD) y máquinas articuladas para dibujar, con la idea de potenciar o comparar los resultados de la manipulación de medios ambientes de aprendizaje distintos (Vincent et al., 2002; Hoyos, 2002) en el aprendizaje y la comprensión de las propiedades básicas de las transformaciones geométricas.

Con este propósito se elaboraron y montaron escenarios de aprendizaje que involucraron a ambas perspectivas. En las actividades participaron 18 estudiantes que estaban al término de la secundaria en México –con edades que oscilan entre los 14 y 15 años.

Adicionalmente, también se pretendió indagar acerca del establecimiento de conexiones entre dominios matemáticos distintos, como los de la geometría y la aritmética, o entre la geometría y el álgebra, con temas propios del currículo matemático del nivel educativo mencionado.

Si bien reformas educativas vigentes (NCTM, 1989, 2000; SEP, 1993, 2005) plantean el estudio de la aritmética, el álgebra y la geometría, como parte de los ejes temáticos a revisar a lo largo de todo el ciclo de educación media, y la comunidad de matemáticos y especialistas en educación matemática en México se ha preocupado por elaborar propuestas educativas novedosas para este nivel educativo, en muchos casos éstas se han concretado a producir análisis acerca de los cambios en el enfoque de los temas y a proponer textos adecuados al desarrollo de los planes y programas actuales. Y, aunque en varios trabajos importantes en el campo de la educación matemática (NCTM, 2000) se hace énfasis en la importancia del establecimiento de conexiones entre los diferentes ejes temáticos como vía para la asignación de significado de nociones o procedimientos matemáticos, lo cierto es que lo más frecuente en las aulas es que las diferentes temáticas se sigan abordando de manera alternada y aislada.

2. MARCO PARA LA EXPLORACIÓN Y EL ANÁLISIS

a) Funciones de los artefactos en la cognición: Verillon y Rabardel, 1995

Verillon y Rabardel parten de reconocer el papel relevante que han tenido los artefactos en el desarrollo del conocimiento desde el marco de la epistemología genética. Según este marco, el desarrollo se efectúa a partir de la actividad del sujeto, principalmente en su interacción con el medio ambiente.

Una de las aportaciones de estos autores es la de notar que deben existir diferencias sustanciales en los productos del conocimiento que se derivan de experiencias de manipulación que son muy distintas, como son aquéllas en donde un sujeto manipula (Piaget y Inhelder, 1958) únicamente barras de metal, de diferentes tamaños y grosores, o transvasa líquidos entre recipientes de diferente forma y tamaño, o bien como las que involucran la exploración o el uso de tecnologías, como la activación de un robot (Verillon y Rabardel, 1995).

Para Verillon y Rabardel (1995, p. 77) es una cuestión primordial, en el campo de la educación tecnológica y vocacional, indagar cuáles son los elementos particulares específicos y funcionales que aportan los artefactos a los procesos de asimilación o acomodación de la génesis del conocimiento.

De acuerdo con estos autores, cabe preguntarse acerca del efecto que puede inducir, en las matemáticas que el estudiante aprende, el uso de artefactos técnicos como la computadora y los pantógrafos. En particular, interesaría dar cuenta de patrones de uso o de esquemas de utilización de los instrumentos, resaltando la utilización del artefacto para incorporarlo a la resolución de un problema.

El interés de estos autores (1995, p. 84) es el desarrollo de perspectivas educativas renovadas que se basen en las transformaciones en las cuales pueden influir los artefactos tecnológicos al modificar las acciones o la actividad en general del sujeto que aprende.

En el estudio exploratorio que aquí se presenta se encontraron respuestas parciales a la cuestión de las funciones que juegan ciertos instrumentos en el aprendizaje y la comprensión de las propiedades de las transformaciones geométricas. En particular, se aportan datos empíricos acerca de la influencia de un contexto tecnológico –basado en la exploración de un *software* de geometría dinámico (SGD), en este caso Cabri-II, y la utilización de un conjunto de pantógrafos de configuraciones geométricas distintas– en la actividad de los alumnos y en sus producciones orales y escritas al término de secuencias de trabajo específicas.

Se decidió comenzar por el estudio de las transformaciones geométricas con la utilización del SGD, pues Cabri-II cuenta con un Menú de transformaciones geométricas y tiene una particular disponibilidad de un comando de Ayuda, el cual, al activarlo, hace que se despliegue en la parte baja de la pantalla de la computadora una leyenda en donde aparece una descripción textual de las características de construcción o de utilización de cada transformación, lo que permite introducir los nombres de los elementos constituyentes en cada construcción desde el inicio de las actividades.

Por ejemplo, si se ha seleccionado, en el menú de transformaciones geométricas, la simetría axial o reflexión, la leyenda que despliega el comando de Ayuda al ser activado, indicará [que la simetría axial] «construye la imagen simétrica de un objeto respecto de una recta, semirrecta, vector, eje o lado de un polígono», como se puede apreciar en la figura 1.

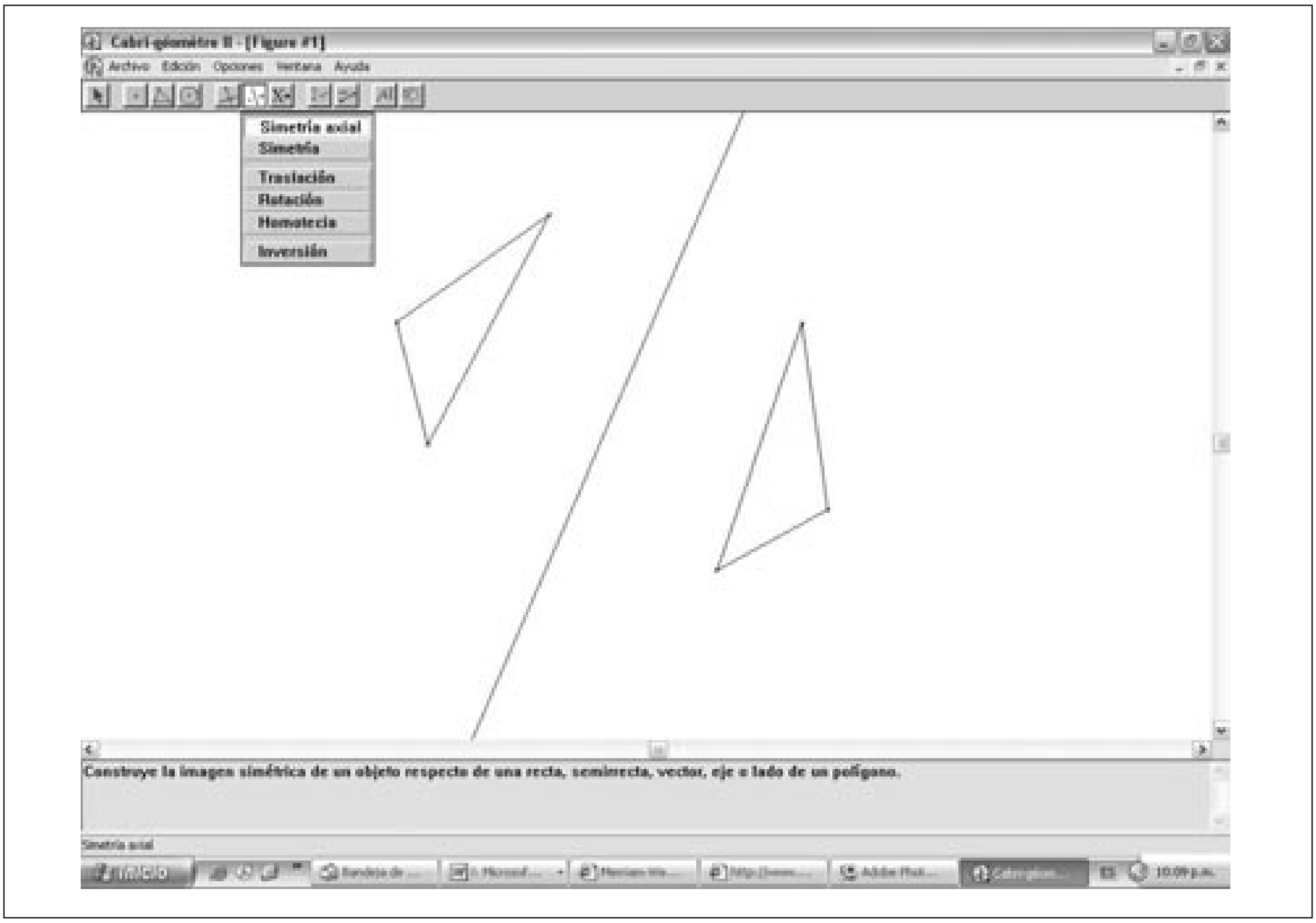
b) El aprendizaje como desarrollo de un discurso: Sfard, 2001

En relación con la utilización de la Ayuda de Cabri-II y sus características en este estudio exploratorio, es importante mencionar que una hipótesis que entró en juego fue que al *disponer* los alumnos, desde el inicio de la actividad, de un lenguaje formal que hasta el momento no habían usado o experimentado (en este caso, materialmente sólo lo tienen a la vista, en la parte baja de la pantalla), se podría hacer un seguimiento de la evolución del discurso matemático de los estudiantes a medida que ellos construyeran o asignaran significados a tales referentes.

Sfard (2001) toma, como un ejemplo en este sentido, un caso de interacción de una clase de grado 7 en el aula, en torno del aprendizaje de los números negativos, para mostrar lo dispersa que resulta la información cuando recién se han introducido en la clase estos números, así como la poca comprensión que al respecto tienen los alumnos en ese momento. Un basamento de este tipo haría imposible avanzar inmediatamente hacia una capitalización inmediata, que se podría traducir, por ejemplo, en un manejo operatorio de los nuevos términos. Para Sfard (2001, p. 28), «la introducción de nuevos nombres y nuevos significadores es el comienzo más que el final de la historia[6]».

Figura 1

Pantalla de Cabri-II donde se muestra la activación del comando Ayuda con respecto a la simetría axial o reflexión.



La autora enfatiza en que la introducción de nuevos símbolos actúa como el mecanismo de un pistón, en el sentido de que éstos empujan y crean nuevos espacios semánticos, los cuales apelan a necesidades de nuevos significados y de nuevos hábitos discursivos (p. 32).

Sfard identifica el acto de comunicar con el de pensar, y el desarrollo del discurso, en un proceso de dos fases. La primera de ellas se caracterizaría por un uso de los términos en base a plantillas, y la segunda por una objetivación o uso objetivado de los símbolos.

Siguiendo esta perspectiva, en esta exploración, se pidió a los estudiantes que manipularan los artefactos guiados por las leyendas de la Ayuda del *software* y por secuencias de actividades que se elaboraron para tal efecto, sin que hubiera mediado otro tipo de acercamiento al tema.

Desde el enfoque que plantea Sfard del aprendizaje como el desarrollo de un discurso, interesa entonces obtener descripciones acerca de las identificaciones que realizan los estudiantes de los símbolos o términos en uso, dado que una persona que aprende un determinado tópico está en posibilidades de extender sus capacidades discursivas de tal manera que, en algún momento, será capaz de comunicar sobre el tema (p. 26).

c) Manipulación directa y expresión de las ideas matemáticas: Laborde, C. (1993) y Laborde, J.M. (1996)

Al trabajar en un medio tecnológico, es importante que los estudiantes expresen oralmente, y también por escrito, lo que han obtenido al término de sus ejecuciones. De acuerdo con Laborde (1993), un punto crucial para producir resultados de aprendizaje en geometría con la ayuda de un SGD está constituido por la enunciación de las propiedades matemáticas que subyacen en la configuración geométrica que se obtuvo al utilizar tal instrumento.

Resalta la importancia de esta cuestión sobre todo cuando se piensa que la característica más importante del SGD la constituye la manipulación directa[7] de los objetos geométricos. Tal manipulación es una herramienta informática que pedagógicamente sirve para promover la percepción de las propiedades geométricas invariantes que subyacen en una construcción o dibujo específico, particularmente al hacer variar las configuraciones obtenidas arrastrando los elementos de construcción de los objetos iniciales.

En este estudio exploratorio interesó conocer las posibles relaciones aritméticas o geométricas invariantes que los estudiantes pudieran percibir al seleccionar alguna de las transformaciones geométricas. Esta percepción está facilitada por el dinamismo del SGD (en el caso del soporte de la computadora) o por las configuraciones provistas por las articulaciones de las máquinas o pantógrafos de transformación geométrica.

3. METODOLOGÍA

El escenario de observación

Dada la compleja manufactura de los artefactos que aquí se pusieron en juego (Cabri-II y máquinas articuladas), en particular por el soporte matemático que subyace en ellos –lo que potencia entonces su posible utilización (Noss y Hoyles, 1996; Boero et al., 1997)–, las preguntas que aquí interesó abordar fueron las relativas a cuáles serían los posibles resultados, en torno del aprendizaje de las transformaciones geométricas, si las actividades que se plantearan a los estudiantes en el salón de clase estuvieran basadas en explorar cada uno de estos artefactos, basándose mayormente en la realización de tareas dirigidas.

Con el fin de avanzar en esta indagación, se diseñaron e instrumentaron varias secuencias de aprendizaje, en una secundaria pública de México, con un grupo de 18 estudiantes de 14 a 15 años de edad (en 9°grado), en torno del estudio de la homotecia y de las isometrías (excepto la rotación, la cual aquí no se abordó).

Es de notar que, en el currículo escolar mexicano, el estudio de las transformaciones geométricas y de los temas relacionados se plantea de manera aislada o separada y a lo largo de los diferentes grados. Por ejemplo, en *primero de secundaria* (grado 7) sólo se sugiere abordar el tema de proporcionalidad aritmética y la simetría axial (Alarcón et al., 1994); en el grado 8 o *segundo de secundaria* se vuelve a tocar el tema de la reflexión con respecto a una recta y se introduce el de la reflexión con respecto a un punto; y, finalmente, es en *tercero de secundaria* (grado 9) que se plantea el estudio de la homotecia y de la semejanza.

En particular, en el grado 9 se recomienda la «[…] práctica del dibujo a escala. Efecto de una reducción o ampliación a escala sobre las magnitudes lineales, la superficie y el volumen de figuras y cuerpos geométricos […] Estudio informal de las homotecias, por ejemplo: [la] imagen bajo una homotecia de una recta o segmento de recta, un triángulo […] Búsqueda del centro de homotecia de figuras dadas […] Teorema de Thales en el triángulo y su recíproco; criterios de semejanza de triángulos. Aplicaciones de la semejanza al estudio de las homotecias y las construcciones geométricas (por ejemplo: división de un segmento en *n* partes iguales, en una razón dada; construcción de la cuarta y la media proporcional).» (Alarcón et al., 1994).

Si esta propuesta temática oficial para el estudio de la homotecia y semejanza en verdad fuera la que se abordara en la escuela, probablemente los estudiantes lograrían un conocimiento más que inicial sobre el tema; pero lo cierto es que resultan ser temas de geometría que se proponen casi al final del noveno grado escolar, y lo que sucede frecuentemente es que los maestros los postergan, o terminan por no abordarlos.

En este estudio exploratorio, toda la instrucción escolar que se desplegó consistió en llevar a cabo actividades dirigidas de exploración con el SGD y con los pantógrafos. Para ello se elaboraron secuencias de trabajo que se instrumentaron en diez sesiones de 50 minutos. El cuerpo de datos de esta indagación se constituyó a lo largo de las observaciones del transcurso de cada sesión, vía la recopilación de las hojas de trabajo de los alumnos al final de cada sesión, y la vídeo-grabación de las ejecuciones de algunas de las parejas explicando lo que habían logrado al término de la sesión correspondiente.

El estudio exploratorio tuvo lugar en el mes de abril, esto fue el tercer bimestre del año escolar en curso, y para los estudiantes constituyó su primer acercamiento al tema de las transformaciones geométricas de manera integral y, por supuesto, al uso de Cabri-II y de los pantógrafos.

Las sesiones transcurrieron a lo largo del horario normal de clases, bajo la guía de un instructor distinto de la maestra responsable del grupo en cuestión, la cual se limitó a dar su autorización para que los estudiantes acudieran a las clases que aquí se denominaron «de trabajo práctico». El trabajo se llevó a cabo en un espacio especial que la escuela adecuó para tal propósito, y se contó con una computadora para cada pareja de alumnos, así como con el número correspondiente de pantógrafos. En todas las sesiones hubo vídeo-grabación al término de las ejecuciones de los estudiantes, las cuales se transcribieron posteriormente.

Secuencias de trabajo

I. En las dos primeras sesiones se realizó una exploración general de los comandos básicos del *software*, en particular, del trazado de puntos, segmentos, rectas, triángulos y circunferencias. También se habló de las posibilidades de «arrastrar» (*dragging*) o manipular directamente tales objetos, haciéndolos cambiar de lugar, de tamaño o de forma, por ejemplo.

Es de lo más importante hacer notar a los estudiantes que las elecciones que se realizan cuando se traza o construye un objeto o figura geométrica son las que posteriormente determinan las posibilidades de *arrastrarlos*, conservando o no las propiedades de la construcción. Básicamente, las posibilidades de variación que se obtienen al *arrastrar* los objetos deben ser encaminadas a la comprobación o verificación de las propiedades geométricas invariantes que subyacen en una construcción geométrica bien ejecutada desde un punto de vista matemático.

II. En la tercera y cuarta sesiones se abordó el estudio de la homotecia con Cabri-II. La actividad se basó en el llenado y el seguimiento, por parte de los alumnos, de las indicaciones que se imprimieron y se les entregaron en «hojas de trabajo» (Fig. 2, 3).

Figura 2

Hoja de trabajo 1, para el estudio de la homotecia, usando Cabri-II.

¿QUÉ ES LA HOMOTECIA?

1) Homotecia con respecto al punto *O* y en una razón dada.

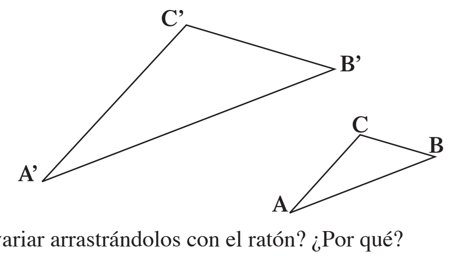
a) Construye un triángulo *ABC*.

b) Construye el triángulo *A'B'C'*, el homotético de *ABC*, usando el comando Homotecia de Cabri-II. (Haz clic también en el comando de Ayuda).

c) ¿Qué objetos geométricos son necesarios para la construcción?

Respuesta:

Cuando seleccionas el comando Homotecia, el comando Ayuda dice: «Construye la imagen dilatada de un objeto con respecto a un punto y a un número o razón de homotecia dados.» Debes indicar el objeto, después el punto y, por último, el número. Entonces los objetos que debes tener en la pantalla para poder efectuar la homotecia son: un punto, un número y un objeto geométrico (ya se debe tener el triángulo *ABC*). Después de haber editado un número de tu elección y de poner un punto *O*, efectúa la homotecia requerida.



d) ¿Qué objetos geométricos puedes mover o variar arrastrándolos con el ratón? ¿Por qué?

e) ¿Qué cosa sucede cuando hacemos variar los siguientes objetos geométricos en la pantalla?

Si movemos o variamos... /	Entonces…
– Los vértices del triángulo ABC	________________________
– El triángulo ABC	________________________
– El punto O	________________________
– Un punto cualquiera P sobre el triángulo ABC.	

2) Antes de encontrar su homotético por medio del comando Homotecia…

…¿puedes avanzar dónde estará su imagen homotética? Respuesta 2: ______________

Se inició con el estudio de la homotecia por las posibilidades que ofrece de conexión con el tema de razones y proporciones de la aritmética. También se pensó en la posibilidad de su extensión hacia la generalización de las expresiones aritméticas utilizadas, esto es, en formulaciones algebraicas o simbólicas de esta transformación.

Figura 3
Hoja de trabajo 2, continuación del estudio de la homotecia usando Cabri-II.

> 3) Utiliza ahora el comando Homotecia para encontrar la imagen *P'*en *A'B'C'*.
> Mueve el punto *P* y observa qué pasa con su imagen *P'*.
> Respuesta 3: _________________________
>
> *f*) Describe cómo podrías encontrar la imagen homotética con respecto al punto *O*
> de cualquier punto *P* sobre el triángulo *ABC*.
> (Sin utilizar el comando Homotecia de Cabri-II)
>
> *g*) Describe en qué consiste la configuración de Tales.
>
> *h*) Construye la imagen de otros objetos geométricos
> (segmento de recta y círculo) y explora su homotecia.
> Anota tus observaciones.
>
> *i*) Caracteriza el objeto geométrico imagen en una homotecia.
>
> *j*) Da una definición general de homotecia.

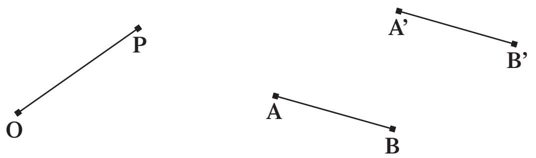
III. Posteriormente, en las sesiones cinco y seis se abordaron la simetría, la reflexión y la traslación por las posibilidades de explotar matemáticamente las propiedades que comparten (son isometrías) y porque podían proporcionar a los estudiantes antecedentes geométricos empíricos para el concepto de *función*. Las secuencias de trabajo para el estudio de estas isometrías fueron en términos generales muy similares a las instrumentadas para la homotecia.

IV. En las sesiones 7ª y 8ª se trabajó con los pantógrafos o máquinas articuladas. La actividad básica nuevamente consistió en explorar y manipular ahora estas máquinas, las que en principio permiten a los alumnos trazar dibujos guiados por configuraciones geométricas específicas, subyacentes en la construcción de cada pantógrafo. Esto es, en cada máquina, las articulaciones reflejan configuraciones geométricas distintas que materialmente se concretan en cada uno de los pantógrafos específicos, los cuales son usados para obtener las figuras simétricas, trasladadas o reflejadas, según sea el caso.

Es de notar que las acciones involucradas en el trabajo con las máquinas articuladas se estructuraron de manera inversa a las que se plantearon en el trabajo con el *software*.

Figura 4
Página 1 de la hoja de trabajo para las isometrías usando Cabri-II[8].

> **¿Qué son las isometrías?**
>
> I. Traslación determinada por el vector *OP*
> – Construye un segmento *AB*.
> Construye el segmento *A'B'* el trasladado de *AB*, usando el comando «Traslación» de Cabri (abre el menú Ayuda con F1).
> ¿Qué objetos geométricos son necesarios para la construcción?
>
> Cuando seleccionas el comando Traslación, la leyenda de Ayuda te dice: «Construye la imagen de un objeto trasladado de un vector dado. Se indica el objeto y después el vector.» Entonces los objetos que debes tener en la pantalla, para poder efectuar la traslación, son: un vector y un objeto geométrico (tú ya debes tener el segmento *AB*). Después de haber creado un vector *OP*, efectúa la traslación requerida.



> ¿Cuáles son los objetos geométricos que puedes mover o variar arrastrándolos con el ratón? ¿Por qué?

Con el SGD, el soporte que éste proporciona permite activar, de entrada, nombres y propiedades geométricas invariantes para cada una de las transformaciones en juego. En cambio, en el caso de la manipulación con los pantógrafos, los estudiantes primero tienen que proceder a la realización de un dibujo; enseguida han de establecer una comparación con el dibujo que mecánicamente obtienen con ayuda del trazador de la articulación de la máquina en juego; finalmente, tienen que determinar y decir qué tipo de transformación geométrica está en juego. Esta secuencia, de hecho, proporciona una manera inversa de proceder en relación con las acciones realizadas con el SGD, para el estudio de las transformaciones.

Figura 5
Hoja de trabajo[9] para el estudio de las transformaciones geométricas usando las máquinas articuladas.

> **Máquinas matemáticas para transformaciones**
>
> PARTE I
> – Tú tienes una máquina matemática. Dibuja la imagen de algunos objetos (rectas, círculos, triángulos) utilizando esta máquina.
> – Explora la transformación y descríbela.
> – Elabora dibujos que te ayuden en tu descripción y explica qué es lo que sucede con los objetos imagen cuando mueves la máquina en torno de los objetos originales.
> – Haz dos dibujos o esquemas de la máquina en dos posiciones distintas. Coloca en los esquemas que realices letras distintas según corresponda.
> – ¿Qué transformación es?
> – Haz un esquema o dibujo en donde indiques cuáles son los elementos básicos de la transformación (p.e., cuál es el centro de simetría, o punto fijo de la homotecia, o eje de simetría, o el vector, etc.).

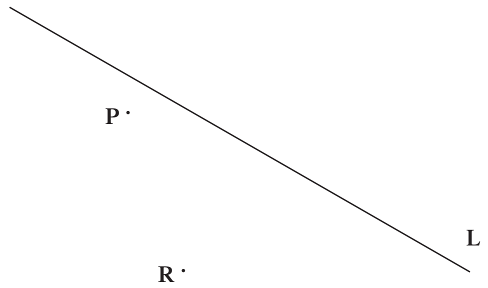
V. Por último, en las últimas dos sesiones de trabajo, la novena y la décima, se planteó a los estudiantes una serie de problemas a resolver, problemas que son usuales y que fueron tomados del *Libro para el Maestro* (Alarcón et al., SEP, 1993). Estos problemas en general son difíciles de resolver sin una comprensión del tema.

Figura 6
Hoja de trabajo para la resolución de problemas. Parte 1.

Resolución de problemas. Parte 1

Resuelve los problemas siguientes:

1) Si *L* es el eje de simetría y *P* y *R* son dos puntos dados:
a) Encuentra las imágenes simétricas de *P* y *R* con respecto al eje *L*.
b) Traza la recta que une *P* con R y encuentra la imagen simétrica de dicha recta con respecto al eje *L*.
c) Responde: ¿Existen puntos de la línea que pasa por *P* y *R* que permanezcan siendo el mismo bajo la simetría axial en cuestión? (Sí/No. ¿Cuáles son dichos puntos?)



2) Los puntos *P’* y *Q’* son los simétricos de *P* y *Q* respecto a una recta l. ¿Puedes encontrar cuál es esa recta l utilizando tu regla pero sin medir? ¿Qué trazos podrías efectuar con el fin de encontrar el eje de simetría en cuestión?

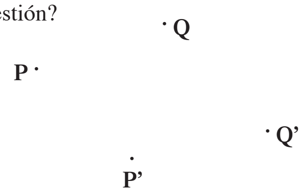
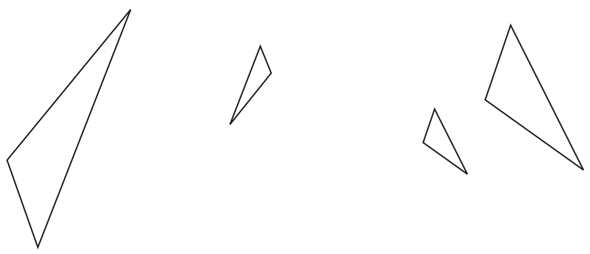


Figura 7
Hoja de trabajo para la resolución de problemas. Parte 2.

Resolución de problemas. Parte 2

3) Encuentra el centro de homotecia de los siguientes pares de figuras:



b) ¿Puedes decir cuál es la razón de homotecia en cada uno de los dos casos anteriores?

Aunque la mayoría de los estudiantes lo intentó, casi ninguno de ellos alcanzó una respuesta completa al término de la primera sesión de 50 minutos que se había dispuesto para ello. Ya hacia el final de la novena sesión, sólo uno de los estudiantes había resuelto bien todos los problemas, y los demás se los preguntaban. El único estudiante que los resolvió fue aquél que desde las sesiones anteriores se había mostrado como de rendimiento académico fuera de lo común. Por ello todas las observaciones que se realizaron con respecto a las ejecuciones de este estudiante constituyeron un estudio de caso separado, el cual se aborda en otro texto distinto del presente.

Finalmente, en la décima sesión, con el deseo de potenciar las ejecuciones de todos los demás estudiantes, los cuales en general tenían capacidades y habilidades de nivel estándar (todos ellos eran considerados buenos estudiantes por sus profesores, incluso la mayor parte de ellos gozaba de una beca de manutención económica por parte de la SEP), se trató de promover una discusión colectiva en torno de las diferentes aproximaciones a las soluciones, aquéllas que se hubiesen producido en la sesión anterior.

Se animó a la participación de los estudiantes pidiéndoles que expusieran ante el grupo las soluciones que habían encontrado y que las compararan. Aunque algunos de ellos sí expusieron sus resultados, no fue posible obtener argumentos en torno de las diferencias existentes.

De ahí que se haya inferido, como hipótesis de continuación del trabajo, que probablemente el desarrollo del discurso matemático necesario para participar en procesos colectivos de institucionalización o validación involucra competencias y habilidades discursivas que sólo son alcanzables a más largo plazo.

4. ANÁLISIS DE DATOS Y APORTACIONES

Enseguida se mostrarán y comentarán algunas de las respuestas prototípicas que dieron los estudiantes a preguntas específicas que hizo el conductor de las sesiones, en el marco general de pedir a los estudiantes que enunciaran o describieran lo que en un momento dado habían llegado a elaborar. Las respuestas de los estudiantes fueron captadas en vídeo, y se obtuvieron mayormente como colofón de sus ejecuciones al término de cada una de las secuencias de trabajo.

Por un lado, de acuerdo con Laborde (1993), el análisis de tales registros permitiría dar cuenta del aprendizaje de los estudiantes con respecto a las propiedades geométricas involucradas; y, por otro lado, también es probable que tales registros permitan dilucidar las posibles relaciones de lo aprendido con las manipulaciones de los artefactos recién completadas.

En particular se presentarán los resultados de las descripciones de los estudiantes, buscando identificarlas con elementos asociados al desarrollo de un discurso (Sfard, 2001) en torno del tema de las transformaciones geométricas, así como detectando la influencia de los artefactos en lo aprendido al término de cada una de las ejecuciones, ya sea 4.1, con el SGD, o 4.2, después de la exploración con las máquinas articuladas.

4.1. Resultados de la exploración con el SGD: uso de «plantillas» para articular nociones recién introducidas

Al término de la tercera sesión, se pidió a los estudiantes, cuando ya habían acabado con las actividades propuestas en la primera parte de la secuencia de trabajo sobre homotecia, describir las configuraciones que percibían en la pantalla de la computadora (ver hoja de trabajo respectiva en la figura 1).

Uno de los estudiantes (Abraham) que primero respondió, contestó lo siguiente:

Abraham: «Digamos, si estamos reflejando, bueno, estamos haciendo una recta que pasa por este punto, va a pasar por la homotética, por la figura refleja. Al segmentarlo, va a quedar recto...» [Es decir que al trazar los segmentos que van del centro de homotecia *O* a un punto *P* de un objeto inicial, y del punto *P* al punto *P'*(*P'* el homotético o punto imagen de *P*), entonces los segmentos trazados de *O* a *P* y de *P* a *P'* van a estar sobre una línea recta.]

Nótese que fue posible entender y explicar lo que Abraham mencionó porque el estudiante, mientras hablaba, señalaba los puntos y los objetos a los que hacía referencia, los cuales habían aparecido en la pantalla de su computadora después de que había realizado manipulaciones con el *software*.

Obsérvese también que el estudiante no está haciendo mención explícita de nombres o *etiquetas* de los puntos y, aun cuando usó términos matemáticos de manera vaga, fue posible entender, ayudándose de lo que señaló, que lo que intentaba expresar era la propiedad de la homotecia relativa a la alineación de los puntos correspondientes *P* y *P'*, desde el centro de homotecia *O*.

En general, sucedió que los estudiantes, después de que trabajaron, con Cabri-II, la primera parte de la secuencia dedicada a la homotecia, podían visualizar algunas relaciones y propiedades e indicarlo utilizando las imágenes que tenían en la pantalla. Sin embargo, las propiedades fueron enunciadas de manera fragmentada y local, sin una descripción precisa de la situación general que guardaban entre sí la figura dibujada u objeto geométrico inicial y su imagen bajo la homotecia.

De manera similar, también fue vago lo que contestaron en relación con el arrastrado de los objetos geométricos que se les pedía realizar en la Parte 2 de la secuencia sobre homotecia con el SGD (ver hoja de trabajo en figura 2).

Así, en uno de los bloques de preguntas se les pidió observar el efecto de mover cualquiera de los puntos *P* en un triángulo inicial y describir lo que sucedía en el punto *P'*, imagen de *P* en la figura transformada. Muchos de los estudiantes no pudieron determinar de ninguna manera específica su percepción de las trayectorias del recorrido de los puntos mencionados, si éstas eran iguales o diferentes, y en qué sentido eso las caracterizaba.

Nótese que, por ejemplo, se podría haber utilizado la orientación en el sentido de las manecillas del reloj para dar una respuesta más adecuada. Sin embargo, sus respuestas fueron del tipo «un punto se mueve con el otro», respuesta que no caracteriza a ninguna de las transformaciones, pues es válida para todas ellas.

Por ejemplo, cuando se consideran los casos de reflexión y de traslación, si se ha trazado un triángulo como figura inicial en la pantalla o página de trabajo de Cabri-II, al poner un punto *P* sobre el triángulo y arrastrarlo en el sentido de las manecillas del reloj, lo que se puede ver que sucede es que, en el caso de la figura reflejada, el movimiento del punto correspondiente *P'* se realiza en contra de las manecillas del reloj; mientras que en el caso de la transformación geométrica de la traslación, el efecto de arrastrar *P* hará que *P'* se mueva con la misma orientación que *P*.

En síntesis, en las descripciones de los estudiantes es notorio el intento de usar los términos geométricos introducidos a través de las hojas de trabajo y del comando de Ayuda de Cabri-II. También existieron esbozos de las propiedades geométricas en cuestión, que se podrían considerar como producciones ostensivas facilitadas por las imágenes o configuraciones que provee el SGD.

Es posible interpretar tales descripciones, como resultado de la utilización de *plantillas* (Sfard, 2001, p. 33), es decir, aquéllas que la instrucción les proporcionó para avanzar hacia la apropiación de términos y propiedades en uso.

En otras palabras, los estudiantes ensayaron una manera de hablar sobre conceptos o nociones nuevos, usando palabras y frases recién introducidas, las que en este caso fueron provistas por las hojas de trabajo y a través del comando de Ayuda de Cabri-II. Lo hicieron como intentando un primer uso de una plantilla que se tiene a mano; por ello la elaboración de sus frases fue muy restringida y sus producciones resultaron vagas, fragmentadas o limitadas.

4.2. Resultados de la exploración con las máquinas articuladas: objetivación de las propiedades geométricas

En los datos que se presentan a continuación se aprecia un contraste entre los resultados de las ejecuciones de los estudiantes al término de las sesiones 7 y 8, y después de las exploraciones que realizaron con las máquinas articuladas (ver en figura 4, el ejemplo de la hoja de trabajo[10] al respecto) en relación con lo obtenido con el SGD (sesiones 3 a 6).

Tanto en el contexto de utilización del SGD como en el de las máquinas articuladas, los estudiantes trabajaron en parejas, las mismas que se habían formado desde el inicio de las sesiones. Es interesante notar que hubo un énfasis en la interacción entre las parejas en el momento de la descripción después de lo realizado con los pantógrafos más que al final de lo realizado con el SGD; tal vez debido a que, con las máquinas articuladas, surgió una serie de actividades manuales que fue más práctico realizar entre parejas, como por ejemplo ayudarse al utilizar regla o escuadra para guiar las articulaciones de las máquinas en un esfuerzo adicional de precisión en el trazo. Estas actividades fueron subyacentes al trazado con las máquinas y están ligadas a la materialización de las articulaciones disponibles.

Como enseguida se podrá apreciar en el protocolo que se derivó de la actividad de una de las parejas, la formada por las estudiantes Dulce y Coral, la interacción entre ellas cambió de nivel al pasar de la realización conjunta de las actividades prácticas de trazado que antes se mencionaron, a una complementación alternada de frases o pensamientos que se vincularon entre sí para que ellas vislumbraran y articularan algunas de las propiedades matemáticas en juego (ver hoja de trabajo en la figura 4):

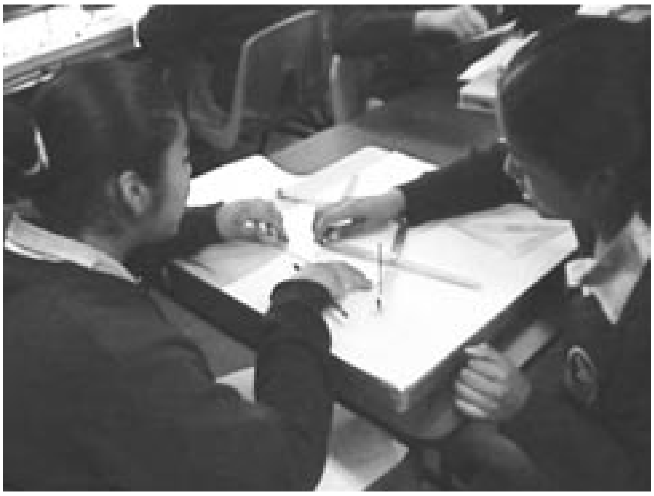
Entrevistador (E): ¿Qué fue lo que hicieron?
Dulce: Ésta es la figura original, este punto es el que traza la figura original [señalando el punto *A*, un punto sobre la figura que dibujaron y que es el más cercano al centro de homotecia *O*]; ésta es la figura resultante. Estas figuras… [señalando las dos figuras trazadas, la que ellas dibujaron y la obtenida de manera correspondiente por el punto trazador de la máquina articulada]
E: Ajá ¿Y cómo las trazaron? Enséñame. [Coral toma una regla, la pone cercana a la figura dibujada y al punto *A*]
E: No, cómo la trazaron con el aparato.
Dulce: [Mueve una de las articulaciones de la máquina en torno de la figura que dibujaron y da una explicación] Siguiendo a este punto. Por ejemplo, al trazar, éste la sigue [Dulce está haciendo referencia a los puntos guía y trazador de la articulación correspondientemente]
Coral: Y éste [el trazador] forma una figura más grande.
E: Ok.
…
E: Está bien. Pero, podríamos saber… Digamos, lo que yo estoy mirando aquí es que esta figura es más chica que esta otra, ¿no? Pero, ¿podríamos saber cuánto más chica? Es decir, ésta es, digamos, ¿qué parte? ¿Es la mitad? ¿Qué parte es?
Dulce: [Mide con una regla los lados del cuadrado dibujado] La mitad.
E: La mitad. ¿Cómo sabes?
Coral: Es la cuarta parte.
Dulce: … Porque la medimos.
E: Porque la mediste… ¿Y luego?
Dulce: Ésta mide 3,5 y ésta mide 7. [Dulce está midiendo los lados de los respectivos cuadrados]
…
E: De lado. De lado mide la mitad.
Coral: Mide la mitad. Y de este lado [señala otro de los lados del cuadrado, perpendicular al inicialmente medido], otra vez mide la mitad.
E: Y entonces, tendría yo…
Dulce: La figura
Coral: Se forma la figura, y ésta [la figura original] viene siendo la cuarta parte del cuadrado original; perdón, del cuadrado resultante. [Refiriéndose como cuadrado resultante al cuadrado transformado u obtenido por homotecia]

A diferencia de la descripción de Abraham que antes se reseñó, en la que sólo se hacía referencia a una situación local entre puntos, las estudiantes Coral y Dulce percibieron una relación global entre las dos figuras, la que ellas trazaron y la hecha por el punto guía o trazador de la máquina articulada en turno.

También se pudo observar un avance hacia una concepción más precisa de la transformación, pues las estudiantes no sólo perciben una interrelación entre ambas figuras, la inicial y la transformada (recuérdese que Coral casi inmediatamente dice: «Y éste forma una figura más grande»), sino que llegan a establecer de manera conjunta una relación numérica entre las medidas y el área de las figuras dibujadas: «Ésta viene siendo la cuarta parte de la figura resultante.» Como claramente manifiesta Coral, tal vez incluso antes de que su compañera tome conciencia de este hecho.

Es probable que, de haber continuado el instructor con un planteamiento de preguntas adecuadas en torno de las situaciones hasta entonces abordadas, las estudiantes hubieran podido llegar a explicitar el resto de las relaciones numéricas que plantea la proporcionalidad implícita en las figuras dibujadas y a tener un acercamiento, desde esta perspectiva, al teorema de Tales.

Figura 8
Dulce y Coral manipulan el pantógrafo para el estudio de la homotecia.



En síntesis, probablemente, en caso de haberse prolongado la sesión de cuestionamiento entre los estudiantes y el instructor, sobre lo realizado en torno de la homotecia, se hubiera podido llegar a la representación de esta transformación usando otros términos matemáticos, nuevos en el contexto trabajado. Éstos hubieran podido manifestarse, por ejemplo, como referencias a las clases de equivalencia o razones entre las medidas del perímetro y el área, como una posible generalización de las distintas relaciones numéricas previamente establecidas.

5. CONCLUSIONES Y APORTACIONES

El discurso o formas de utilización de los términos matemáticos como el presentado por Abraham permitió dar cuenta de un proceso de formación intuitivo de la noción de homotecia, en particular de la propiedad de colinealidad entre puntos correspondientes y el centro de homotecia. Tal intuición se manifestó por una producción ostensiva de tal propiedad y, en general, por hacer referencia a la transformación y a sus propiedades de manera vaga o débil. Desde nuestro punto de vista, ello está relacionado con una de las características de la fase uno del proceso de desarrollo del discurso en el salón de clase señalada por Sfard (2001, p. 32). Esta característica es la del uso de significadores a través de plantillas, en este caso las provistas por las leyendas del comando de Ayuda del SGD y por las secuencias de trabajo que guiaron la actividad a través de los distintos escenarios de aprendizaje.

Por otro lado, es de resaltar que el curso de las acciones involucradas en las primeras secuencias de trabajo que se realizaron con el SGD Cabri-II siguió un orden inverso a las que se realizaron con las máquinas articuladas. Brevemente, en el primer bloque de actividades se parte de la *activación* de una transformación geométrica en el SGD para avanzar hacia el conocimiento o identificación de las propiedades geométricas que la caracterizan; mientras que en el segundo bloque, se comienza por efectuar trazos con la máquina articulada partiendo de la activación de la propiedad geométrica representada concretamente por una configuración específica de las articulaciones y se avanza hacia el reconocimiento de la transformación geométrica correspondiente.

En síntesis, es probable que el *software* y los pantógrafos hayan satisfecho funciones complementarias en el desarrollo del aprendizaje y la comprensión de las propiedades de las transformaciones geométricas.

Esto se manifestó en las producciones de los estudiantes, quienes mostraron inicialmente a través de sus descripciones intuiciones de las nociones en juego para avanzar, posteriormente, hacia una objetivación matemática que quedó expresada en un uso más preciso de los términos y en un tránsito de percepciones cualitativas a cuantitativas –y locales a globales– de las propiedades en juego.

Además, las evidencias del establecimiento de relaciones numéricas entre las figuras dibujadas dieron cuenta de cómo los términos o símbolos en uso pueden llegar a ser representaciones adecuadas de propiedades que tal vez se percibieron como invariantes entre las clases de dibujos obtenidos.

Finalmente, algunas de las posibilidades didácticas que emergieron de los resultados empíricos que se mostraron están en relación con las necesidades de instrumentación de secuencias de aprendizaje que permitan que todos los estudiantes generen pensamiento y discurso matemáticos en la escuela. O sea, es probable que una base para que se desarrolle discurso matemático en el aula y para que surjan significados matemáticos adecuados al tópico en cuestión se pueda alcanzar a través de la instrumentación de secuencias de actividades que involucren el uso de artefactos culturales que tienen una carga semántica fuerte desde el punto de vista matemático (Noss y Hoyles, 1996; Boero et al., 1997).

En particular, es de notar que las ejecuciones y el entusiasmo de las niñas que participaron en el estudio fueron muy similares a los de los niños. Por ello se escogió a dos de las alumnas del grupo, Dulce y Coral, como representantes del estándar alcanzado por el grupo de participantes.

En general, de acuerdo con Szendrei (1996), el papel del uso de materiales concretos (herramientas comunes o artefactos culturales y materiales educativos o manipulables) en las clases de ambos géneros es el de facilitar un desarrollo igualitario de habilidades matemáticas en niños y niñas de la misma edad en la escuela. Esto es, vale la pena destacar el papel y el tipo de competencias matemáticas que genera la utilización de ciertos materiales específicos en el aula, pues se ha visto que algunas habilidades científicas no se desarrollan de la misma manera a través de las experiencias que los niños y las niñas tienen de manera diferenciada fuera de la escuela, tal vez por cuestiones arraigadas en la cultura (p. 427).

En síntesis, en el estudio exploratorio que aquí se presentó, las actividades que se instrumentaron permitieron observar que todos los que participaron lo hicieron animadamente a lo largo de todas las secuencias. En particular, se observó que todos desarrollaron procesos de intuición y objetivación como los que se mostraron, con relación a ciertas funciones específicas de los artefactos involucrados.

Es decir, en todos los sujetos que se consideraron de competencia estándar, se pudieron detectar procesos de:

a) Emergencia de intuiciones en torno de las transformaciones geométricas por medio de la exploración de un *software* de geometría dinámico (SGD) que en este caso fue Cabri-II. Para ello inicialmente se partió de la *activación* o selección de alguna de las transformaciones geométricas en el Menú de las transformaciones del SGD, y se avanzó hacia el conocimiento o identificación de propiedades geométricas básicas, características de la transformación geométrica en juego. En esta fase jugaron un papel relevante las leyendas de la Ayuda con que viene provisto el *software*, así como las hojas de trabajo de las secuencias que fueron elaboradas para dirigir la actividad de los alumnos (Fig. 1-4). Aunque los estudiantes avanzaron en la comprensión del tema, sus descripciones sobre lo que hasta entonces habían completado carecieron de precisión en el uso de los términos matemáticos involucrados, y su percepción de las propiedades de las transformaciones fue puntual o localizada. En general, los estudiantes se expresaron haciendo un uso muy restringido de *plantillas* para hablar del tópico, aquéllas que se les habían proporcionado para abordar el tema.

b) Objetivación de las propiedades matemáticas en juego por medio del uso de máquinas articuladas o pantógrafos. En esta fase del trabajo se acentuó la interacción entre las parejas, tal vez debido a que surgieron actividades subyacentes al trazado con las máquinas articuladas, como la utilización adicional de regla o escuadra para alcanzar mayor precisión en el trazo (Fig. 8). Los datos obtenidos permitieron que se avanzara la hipótesis de que los pantógrafos desempeñaron una función complementaria con respecto a lo elaborado con el SGD. Al respecto, es importante destacar que, en el curso de las acciones involucradas en la fase de exploración con el SGD, se siguió un orden inverso al de las acciones que se realizaron en la fase de trabajo con las máquinas articuladas (ver secuencias de trabajo respectivas). Dicha hipótesis de funcionalidad complementaria estaría confirmada por la constatación del ciclo intuición-objetivación en torno de las propiedades de las transformaciones geométricas que se revisaron.

En general, los aspectos de intuición y objetivación son considerados como componentes importantes en la promoción del pensamiento matemático en cualquier nivel educativo, máxime cuando tienen lugar en relación con el desarrollo de nociones matemáticas básicas, como son la proporcionalidad y la comparación entre magnitudes de diferente dimensión.

AGRADECIMIENTOS

– Se agradece la valiosa colaboración de Mariolina Bartolini B., de la Universidad de Módena (Italia), de Bernard Capponi, del Equipo EIAH de la Universidad Joseph Fourier (Francia), y de Federica Oliveiro, de la Universidad de Bristol (UK), en la conformación de las hojas de trabajo y en su instrumentación en el aula.

– También se agradece el financiamiento parcial del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) de México, con números de referencia 30430S y 38432S. Sin el soporte económico que brindan a la comunidad que realiza investigación, trabajos como el presente no podrían llevarse a cabo.

NOTAS

[1] La escuela secundaria en México corresponde a los grados 7°, 8° y 9° de instrucción escolar después del kindergarten. Las edades de los estudiantes en estos grados normalmente oscilan entre 11 y 15 años, siendo los 11 años la edad mínima y 15 años la edad máxima para los grados 7° y 9°, correspondientemente.

[2] Cabri-II es un nombre corto del *software Cabri-Géomètre II*, el cual es un medio ambiente informático de aprendizaje interactivo, de manipulación directa de los objetos matemáticos y figuras que el usuario construye. Cabri-II fue elaborado principalmente por Jean-Marie Laborde y Franck Bellemain, miembros del equipo EIAH del laboratorio Leibniz, de la Universidad Joseph Fourier, en Francia. Fue diseñado para la enseñanza de la geometría, para abordar desde las propiedades geométricas más elementales hasta la geometría hiperbólica. Además, actualmente se han encontrado aplicaciones en otros dominios matemáticos distintos, como son la probabilidad, la física y el álgebra. Cabri-II ha tenido aceptación mundial por el soporte matemático importante que presta al usuario durante sus ejecuciones. La página de *Cabri* en internet es <http://www-cabri.imag.fr>.

[3] Estos *pantógrafos* son artefactos mecánicos conformados por varillas articuladas montadas sobre planos de madera. Tal vez uno de los más conocidos sea el pantógrafo que agranda o achica dibujos que se trazan en acuerdo con una cierta razón dada. Además de este pantógrafo, aquí también se dispuso de otros artefactos similarmente construidos, pero con configuraciones adecuadas al estudio de la simetría, la reflexión y traslación. Estos materiales fueron originalmente construidos por la Universidad de Módena (UNIMO), en Italia. Para ver más detalles sobre este conjunto de pantógrafos y demás instrumentos de los que dispone la UNIMO, ver su página electrónica: < http://www.mmlab.unimo.it>.

[4] Cabri-II is a short name for the software *Cabri-Géomètre II*, which is a microworld of direct manipulation of mathematical objects and figures. Cabri-II was made by Jean-Marie Laborde and Franck Bellemain from Laboratoire Leibniz at University Joseph Fourier in France. In according with Bellemain (1992), it promote the perception of invariant geometrical properties: «[…] we make the assumption that the computer can guide the student in the exploration of designs while inciting him/her to discover invariants among several designs, invariants which may lead to the unveiling of geometrical notions and properties of a general nature. As a matter of fact... it can propose several designs representing one and the same set of theoretical data». The electronic address of Cabri-II on internet is <«http://www-cabri.imag.fr» http://www-cabri.imag.fr>.

[5] These *pantographs* are mechanical artifacts formed of articulated bars mounted on wooden platforms. One of the more well-known pantographs may be the one that enlarges or reduces a drawing by a given ratio. This research employed this artifact, and other similarly constructed ones designed to study symmetry, reflection, and translation. The materials were originally constructed by the Universidad de Modena (UNIMO), in Italy. For further detail on the pantographs and other UNIMO instruments, refer to <www.mmlab.unimo.it>.

[6] La frase de la autora originalmente está en inglés: «[The] introduction of new names and new signifiers is the beginning rather than the end of the story» (Sfard, 2001, p. 28).

[7] Según Jean-MarieLaborde (1996), uno de los principales creadores del SGD Cabri-II, el término *manipulación directa* se usa para caracterizar a interfases que permiten:
– una representación continua del objeto de interés;
– acciones físicas (movimientos y selección usando *el ratón*, o tocando la pantalla, o utilizando una barra de control a distancia, o…) o bien la presión de teclas etiquetadas, en lugar de sintaxis complejas;
– operaciones reversibles rápidas y en gran número, cuyo impacto sobre el objeto de interés es inmediatamente visible.
(Nota: En su texto, Laborde (1996) menciona que tal caracterización pertenece a Schneiderman).

[8] El total de las hojas de trabajo para el estudio de la simetría, la reflexión y la traslación puede consultarse en el cap. 7, «Exploración sobre el aprendizaje de las transformaciones geométricas en el Bachillerato: Coordinación del uso de herramientas cognitivas en la escuela.», en Falconi y Hoyos (eds.), *Instrumentos y matemáticas: historia, teorías y perspectivas educativas.* México: Facultad de Ciencias-UNAM y Universidad Pedagógica Nacional. Agosto de 2005.

[9] Esta hoja de trabajo difiere de la hoja de trabajo que se utilizó con estudiantes de bachillerato (ver pie de página anterior) en su extensión y complejidad, pues a la de bachillerato se agregaron dos fases más de exploración, una que tiene que ver con modificar la longitud de algunas de las barras, y la otra con la reproducción o simulación de cada una de las máquinas en Cabri-II.

[10] Aunque en la figura 4 sólo aparece una hoja de trabajo dedicada a la manipulación de las máquinas articuladas, nótese que la misma guía de la actividad se resuelve de manera distinta de acuerdo con el pantógrafo en uso. Esto es, cuando las parejas de estudiantes terminaron la exploración de una de las máquinas articuladas y el llenado de la hoja de trabajo correspondiente, se les entregó otra máquina articulada (distinta a la que acababan de entregar) y una «nueva» hoja de trabajo a llenar. (En realidad era la misma hoja de trabajo pero sin llenar y el mismo tipo de exploración a realizar. Lo que resultaba distinto cada vez era la experiencia obtenida como el resultado de la manipulación del artefacto en turno).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALARCÓN, J., ARRIAGA, A., BARRÓN, H. y DOMÍNGUEZ, R. (1994). *Secuencia y organización de contenidos. Matemáticas. Educación Secundaria*. México: Secretaría de Educación Pública (SEP).

ALARCÓN, J., BONILLA, E., NAVA, R., ROJANO, T. y QUINTERO, R. (1994). *Libro para el maestro: educación secundaria. Matemáticas.* Méjico: SEP.

ARZARELLO, F. (2004). Mathematical landscapes and their inhabitants: Perceptions, languages, theories. *Plenary and Regular Lectures at ICME10*. Copenhague: Technical University of Copenhagen.

BARTOLINI BUSSI, M. (1998). Drawing Instruments: Theories and Practices from History to Didactics. *Documenta Mathematica*, vol. extra, *ICM*, 3, pp. 735-746.

BARTOLINI BUSSI, M. y BOERO, P. (1998). Teaching & Learning Geometry in Contexts, en Mammana, C. y Villani, V. (eds.). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the XXI Century*, pp. 52-61. Kluwer Academic Publishers.

BELLEMAIN, F. (1992). «Conception, réalization et expérimentation d'un logiciel d'aide à l'enseignement de la géometrie: Cabri-géomètre». Tesis doctoral. Grenoble (Francia): Université Joseph Fourier.

BOERO, P., PEDEMONTE, B. y ROBOTTI, E. (1997). Approaching theoretical knowledge through voices and echos: A Vigotskian perspective, en *Proceedings of PME XXI*, pp. 81-88. Finlandia: Lathi.

CONFREY, J. (1993). The role of technology in reconceptualizing functions and algebra, en *Proceedings of XV PME-NA*. Pacific Grove, CA: San Jose State University.

HOYOS, V., CAPPONI, B. y GÉNÈVES, B. (1998). Simulation of drawing machines on Cabri-II and its dual algebraic symbolization…, en *Proceedings of CERME1*, <http://www.find.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1-proceedings.html>. Alemania: Universidad de Osnabrueck.

HOYOS, V. (2002). Coordinating Mediation of Activity in the Learning of Geometrical Transformations. Proceedings of PME-NA XXIV. Athens, Georgia: ERIC/ University of Georgia.

INHELDER, B. y PIAGET, J. (1958). The growth of logical thinking from childhood to adolescence: An essay on the construction of formal operational structures. ISBN: 0465027725

JÖRGENSEN, L. (1999). Involving Midlle Students in Research Design. Proceedings of CSCL99.

LABORDE, C. (1993). The computer as part of the learning environment: The case of géométrie, en Keitel, C. y Ruthven, K. (eds.). *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology*, pp. 48-67. Berlín: Springer-Verlag.

LABORDE, J.M. (1996). Intelligent Microworlds and Learning Environments, en Laborde, J.M. (ed.). *Intelligent Learning Environments: The Case of Geometry*. Alemania: Berlín: Springer-Verlag.

MARIOTTI, M.A., BARTOLINI BUSSI, M., BOERO, P., FERRI, F. y GARUTI, R. (1997). Approaching Geometry Theorems in Contexts: From History and Epistemology to Cognition, en *Proc. XXI PME Int. Conf.*, 1, pp.180-195, Finlandia: Lathi.

MARIOTTI, A. (2002). The Influence of Technological Advances on Students'Mathematical Learning, en Lyn D. English (ed.). *Handbook of International Research in Mathematics Education*. Nueva Jersey: LEA, Pub.

NOSS, R. y HOYLES, C. (1996). *Windows on Mathematical Meanings*. Dordrecht: Kluwer.

SCHOENFELD, A., SMITH, J. y ARCAVI, A. (1993). Learning: The microgenetic analysis of one student's evolving understanding of a complex subjet matter domain, en Glaeser, R. (ed.). *Advances in Instructional Psychology,* 4, pp. 55-175. Hillsdale: Erlbaum.

SFARD, A. (2001). Learning Mathematics as Developing Discourse, en Speiser, R., Maher, C. y Walter, C. (eds.). *Proceedings of PME-NA XXIII*. ERIC: Snowbird, Utah. EEUU.

SZENDREI, J. (1996). Chapter 11: Concrete Materials in the Classroom, en Bishop et al. (eds.). *International Handbook of Mathematics Education,* pp. 411-434. Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

VERILLON, P. y RABARDEL, P. (1995). Cognition and Artifacts: A Contribution to the Study of Thought in Relation to Instrumented Activity. *European Journal of Psychology of Education,* 10(1), pp. 77-101.

VINCENT, J., CHICK, H. y McCRAE, B. (2002). Mechanical linkages as bridges to deductive reasoning: A comparison of two environments. *Proceedings of PME26*. Reino Unido: University of Norwich.

[Artículo recibido en marzo de 2003 y aceptado en septiembre de 2005]