AFECTOS Y DEMOSTRACIONES GEOMÉTRICAS EN LA FORMACIÓN INICIAL DOCENTE

Araujo, Jacqueline[1], Giménez Rodríguez, Joaquim[2] y Rosich Sala, Núria[2]
[1] Departamento de Matemática. Universidad de Goiania. Campus de Jataí (Brasil)
[2] Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y la Matemática. Universidad de Barcelona (España)
gynjak@yahoo.com
jgiménez@uoc.edu
nuriarosich@ub.edu

Resumen. Se estudia el desarrollo de problemas de demostración geométrica en un curso de formación inicial de profesores de matemáticas, examinando si se manifiesta la dimensión afectiva y de qué modo. Se presenta el caso de una estudiante y su comportamiento frente a dos problemas de demostración. Se analizan las dificultades, esquemas de demostración y elementos de lenguaje asociados con las creencias y las actitudes acerca de la demostración geométrica de los estudiantes. También se reconoce el perfil evolutivo de su desarrollo y el análisis de las emociones en distintos momentos de la demostración; ello permite establecer asociaciones entre el dominio afectivo y las actividades de demostración.

Palabras clave. Emociones, afectos, desarrollo profesional en matemáticas, formación inicial, demostración geométrica.

Affects and geometrical proof for initial teacher training

Summary. Geometrical proving problems are studied during a first mathematics training course, analysing if and in which way affective dimension is manifested. A case of a student is presented observing her behaviour during two proof solving activities. The difficulties, proof schemes and language aspects were analyzed and associated with beliefs and attitudes towards geometrical students' proof. A development profile and analysis of emotions in separated moments during the proof is recognized. It gives the opportunity to establish relations among affective domain and proof activities.

Keywords. Emotions, affective domain, profesional development in mathematics, initial training, geometrical proof.

1. INTRODUCCIÓN

La investigación reciente evidencia las dificultades en asumir competencias en la resolución de problemas de demostración geométrica en la formación inicial docente (Jones, 2000 y Jones y Fujita, 2002) y también nos muestra la necesidad de analizar los factores que puedan explicarlas. Es, a la vez, un problema cognitivo, afectivo y de desarrollo profesional.

El tema de la demostración es uno de los más estudiados en la educación matemática en la etapa preuniversitaria (Thurston, 1994). Sabemos cómo se enfrentan los estudiantes ante tipos de prueba (Balacheff, 2000) y cómo dan argumentos de inferencia figurativa (Richard, 1999). La mayoría de estos estudios usan situaciones de geometría euclidiana. En efecto, la geometría euclidiana es una disciplina que durante cierto tiempo, y para algunas culturas, ha sido el paradigma para mostrar estos procesos de forma solvente, puesto que casi no se ha fomentado una cultura argumentativa fuera de la demostración clásica que estableciese conclusiones a partir de premisas y definiciones anteriormente reconocidas. Y aunque es un factor de fracaso para muchos alumnos, su aprendizaje aparece como uno de los más difíciles y menos coronados por el éxito, tanto de los resultados escolares generales como en el sentido de la noción que los alumnos obtienen de su enseñanza (Arsac, 1988; Bates, 1996). Por otra parte, el rigor de la demostración deductiva tiene un rol central en la enseñanza de la matemática y se asocia tanto a las frágiles cadenas de razonamiento que se privilegian en la matemática, como a la búsqueda de lo general dentro del *discurso matemático* (Noss, 1994).

Hay pocos trabajos que analicen las concepciones de los futuros profesores ante la demostración (Jones 1997, 2000, 2004 y Jones y Fujita, 2002). Los que citamos se han realizado en contextos más amplios que los de un curso específico de geometría euclidiana. En otros casos, el objetivo ha sido más bien el uso de mediadores, que propiamente el análisis del curso. En otras investigaciones sobre demostración y formación de profesores se han estudiado elementos de lenguaje demostrativo, como indicadores semióticos (Martínez Recio, 1999), o el uso de paradojas (Movshovitz-Hadar y Hadass, 1988) o de elementos históricos, etc., pero en ninguno de ellos se observan elementos afectivos. ¿Qué sucederá en una realidad como la brasileña, donde se mantiene un curso de geometría euclidiana al inicio de la formación docente? ¿Cuál puede ser la influencia de los factores afectivos cuando sabemos que la actitud ante el trabajo matemático geométrico es negativa (Dias, 2001)?

No es fácil que los futuros docentes sean conscientes del valor de las demostraciones geométricas. Realizar actividades para aprender el valor de la demostración y pasar el límite de la argumentación para aprender a enseñar a demostrar es complejo y arduo (Jones, 2004). Es lógico que nos preguntemos si podemos incidir positivamente en el desarrollo profesional docente integrando el sistema de afectos y emociones de los sujetos (Gómez-Chacón, 2000) con el desarrollo de actividades de demostración de manera que podamos incidir en el futuro docente, de forma que se integre una componente cognitiva con la afectiva.

Por todo ello, en este artículo, presentamos un estudio de caso, en el que nos proponemos identificar algunos elementos de la dimensión afectiva que pueden observarse en el desarrollo de situaciones de demostración realizadas en un curso de formación docente. Pretendemos reconocer algunos elementos del llamado «dominio afectivo», es decir, creencias, sentimientos, emociones y actitudes que se mantienen o cambian en el proceso de resolución de tareas de demostración geométrica. En el caso que analizamos se constatan algunas concepciones iniciales y se analiza cómo evolucionan, junto con sus esquemas de prueba, interpretación, argumentación, y estilo de lenguaje en relación con el sistema de afectos del estudiante. En particular, nos proponemos realizar un estudio cualitativo de la evolución de los comportamientos individuales a largo plazo de un grupo de estudiantes en situación de prueba-demostración, entendida como un componente discursivo importante de la comunicación dentro de la comunidad matemática.

2. CUADRO TEÓRICO

Tratar distintos aspectos importantes de la formación en un mismo estudio pide una aclaración sobre los diversos términos usados, así como el significado que les otorgamos en este estudio. Así, se explicará a continuación: el marco de desarrollo profesional en el que nos movemos, el significado de *formación geométrica* que se da, el sentido de la demostración y su alcance, así como el significado que otorgamos al componente *dimensión afectiva* que se desarrolla y a los términos que van a ser usados. La docente, a su vez investigadora, asume en todo momento este marco teórico.

Sobre el desarrollo profesional

Entendemos el ***desarrollo profesional*** *como un proceso sistemático y reflexivo que busca la mejora de la práctica, consideramos las creencias y los conocimientos profesionales con tres componentes principales: epistemológico-matemático, estratégico-didáctico y profesional-afectivo* entrelazados (Bairral, 2002). En ese marco, trabajar la demostración significa reconocerla como un procedimiento de validación (Maher y Martino, 1996) que caracteriza la matemática respecto de las ciencias experimentales y así ocupa un lugar central desde el punto de vista epistemológico en esta disciplina.

A pesar de valorar la importancia del componente estratégico-didáctico, en este trabajo acentuamos la reflexión sobre la actividad matemática de la demostración y de la prueba. Ello pasa por aceptar la reconceptualización de las influencias del afecto junto al pensamiento matemático que supere el simple hecho de desarrollar instrumentos para medir lo afectivo en un contexto social en que surge el aprender a aprender.

El curso de geometría euclidiana es un entorno clásico de trabajo en el que se desarrollan actividades de demostración constantes, pero que se transforma para dar cabida a actividades de apreciación didáctica sobre la demostración en secundaria (Araujo, 2004). El estilo de trabajo permite que los estudiantes discutan sobre las demostraciones, su valor y su relación con los principios clásicos de la geometría euclidiana, en un ambiente de fomentar conjeturas, pruebas y refutaciones. Asimismo, se incluyen procesos de desarrollo mediante las TIC.

Sobre la demostración como actividad de formación

Consideramos la **actividad de demostración** como un experimento de pensamiento (en el sentido de Lakatos, 1976) desde diversos aspectos: verificación o justificación, iluminación o *insight* acerca de proposiciones, y organización de resultados en un sistema deductivo (Coe y Ruthven, 1994). Sabemos que los estudiantes tienen un concepto débil del significado de *demostración*, y un objetivo clave del curso es convencerlos de que puede desarrollarse en todos los niveles de la educación secundaria. No es aquí el lugar de hacer una relación exhaustiva de cómo se desarrollan dichos aspectos, pero digamos que el curso propone situaciones clásicas en las que se muestran esos tres aspectos. Se pretende que los futuros docentes reconozcan la demostración como una construcción social. Así, se hacen demostraciones por pares y con toda la clase. En este artículo, nos centramos en ejemplos de las elaboraciones personales, en cuanto nos permiten reconocer aspectos de la construcción personal relacionados con las muestras afectivas y también personales de los sujetos observados. Aun siendo personales, las demostraciones euclidianas son una construcción social en la cual los estudiantes se enfrentan con la historia y explicitan negociaciones de significado (Restivo, 1994) que comparten en el grupo.

Sobre el dominio afectivo

La construcción del dominio afectivo como algo separado de lo cognitivo se explica mediante taxonomías que se inician con la mera conciencia, y sigue con respuesta, valoración, organización y caracterización valorada (Kratwohl, Bloom, Masia, 1964, revisado por Kratwohl y Anderson, 2001; Atherton, 2005). Posteriormente, se conecta con experiencias de sentimiento positivo o negativo, así como la conciencia de placer o de disgusto (Beatty et al., 1991) causadas por percepciones relacionadas con la motivación y la emoción. Algo más adelante, aparece la consideración de las emociones como parte del dominio afectivo (Anderson 1981 citado por Anderson y Krathwohl, 2001). Diversos autores han aproximado lo afectivo con lo cognitivo (Mandler 1975 y 1989) hasta que McLeod (1989) incluye en el componente afectivo las creencias junto con las actitudes y las emociones.

Un poco más tarde, Taylor (1989) y Evans (2001) consideraron de utilidad las aproximaciones psicoanalíticas y las ideas postestructuralistas como marco de interpretación de las reacciones afectivas de los estudiantes y de los profesores. De todos modos, se vio enseguida que su forma de ver psicoanalítica debía complementarse con aproximaciones discursivas, para reconocer las influencias del grupo social, ya que (Nimier, 1977; Buxton 1981) habían señalado que se hace matemáticas y se aprende a enseñar matemáticas en una cultura determinada (Walkerdine, 1988). Pero sólo recientemente, autores como Evans (2005) enfatizan el dominio afectivo como un fenómeno discursivo socialmente organizado por sistemas de signos que subyacen en lo que significa hablar de emociones positivas y negativas (Hall, 1997). Gómez-Chacón (2001) introduce las apreciaciones necesarias que son consideradas en este estudio.

En nuestro trabajo con futuros docentes, entendemos por **dimensión o dominio afectivo** *un amplio conjunto de aspectos del desarrollo relacionados con las emociones que incluyen los sentimientos, los estados de ánimo, así como las creencias, las actitudes, los valores y las apreciaciones que se expresan mediante procesos discursivos del futuro docente respecto a las matemáticas, su enseñanza-aprendizaje y las prácticas asociadas*. En nuestro caso, nos van a interesar especialmente cómo influyen en las actividades de demostración en un curso de geometría euclidiana. Y consideramos la **educación emocional** como *un proceso educativo de formación y actuación sobre las emociones, que involucra algunos aspectos como permanencia, continuidad y prevención* (Gómez-Chacón, 2001). La preocupación no es ya taxonómica, sino interpretativa, y enmarcada en la naturaleza situada del conocimiento.

Entendemos por **emoción** *un estado complejo del organismo caracterizado por una excitación o perturbación que predispone a una respuesta organizada* (siguiendo a Gómez-Chacón, 2003). Por tanto, entendemos que incluye respuestas organizadas más allá de la frontera de los sistemas psicológicos, con aspectos fisiológicos, cognitivos y de motivación. Las emociones suelen ser generadas como respuesta a acontecimientos externos (resultado del aprendizaje, influencia social, influencia cultural, conocimientos previos, etc.) e internos (interpretación de una situación, valoración personal de un hecho o evento como relevante de un objetivo personal (Gómez-Chacón, 2000 y Bisquerra, 2000), reflejados en estados emocionales acompañados de reacciones involuntarias de cambios fisiológicos (como son temblores, taquicardia, sudores, etc.) y reacciones voluntarias (expresiones faciales y verbales, comportamientos, acciones, tono de voz, volumen). Buscar emociones no es el resultado de encontrar respuestas automáticas, sino un resultado del complejo entramado de aprendizaje, interpretaciones e influencias sociales.

La identidad social es el principio organizador que moviliza la totalidad de las respuestas emocionales de cada individuo frente a la actividad matemática y su aprendizaje. Queremos mostrar cuáles son las emociones ante las actividades de demostración, que no las entendemos sólo como gestos que hace el sujeto para sí mismo sino como formas de relación con el docente y con el grupo. Son pocas las investigaciones que estudian las reacciones afectivas en situaciones en que los estudiantes desarrollan la actividad matemática junto con otros. Así, aunque nuestro estudio no analiza una construcción colectiva de demostración, las acciones de los estudiantes por separado se analizan en el interior del grupo clase.

Es importante analizar el nivel de consideración y control de las emociones, porque éstas pueden influenciar el proceso del resolutor (Gómez-Chacón, 2000) y se relacionan con las distintas fases del proceso. Pero sabemos muy poco de cómo se producen los estados-reacciones emocionales perceptibles en el desarrollo de demostraciones geométricas y qué influencia puede tener el tipo de situación y la actuación formadora en el caso de futuros docentes.

Por otra parte, consideramos el afecto en sus dos formas: individual y compartido (Damasio, 2001), llamados local o global por Gómez-Chacón (1997). El **afecto local** es el que está *relacionado con los cambios de sentimientos o reacciones emocionales durante una tarea matemática*. Mientras el **afecto global** *involucra escenarios más complejos y permite contextualizar las reacciones emocionales en la realidad en que las produce.*

En nuestro estudio identificamos los ***estados de ánimo, emocionales o de humor*** como un *estado emocional de* *mayor duración y de menor intensidad que las emociones agudas* y dependen más de las valoraciones globales del mundo que nos rodea que de un objeto específico (Bisquerra, 2000: p. 67). Éstos se caracterizan por una magnitud o intensidad, dirección, control, a nivel de conciencia en cuanto que las emociones pueden influir en el proceso de resolución de un problema o, en nuestro caso, en una situación del proceso de demostración y estructura. Así, en nuestro estudio se han considerado como dirección positiva los siguientes: *euforia-excitación* y *satisfacción.* En el caso de las emociones ambiguas se ha tenido en cuenta la *indiferencia* como un estado neutral. Y en el caso de dirección negativa se han considerado: *inquietud, abatimiento, preocupación, cólera, rabia y tensión*. Mediante el análisis de estos aspectos tratamos de reconocer cómo se refuerzan las estructuras de creencia.

Consideramos los ***sentimientos*** como aquellas *actitudes originadas a partir de una emoción, pero que perduran más allá del estímulo que lo origina, siendo por tanto, más duraderos y estables que la emoción y generalmente asociados con la voluntad.* Y llamamos **metaafecto** (tomado de Gómez-Chacón, 2003) a la *toma de conciencia del estado emocional, así como a sus causas, perjuicios y posibles respuestas para confrontar los problemas ocasionados por las emociones negativas y que generan perjuicio al desarrollo del proceso cognitivo.*

En la dimensión afectiva, entendemos las ***concepciones*** de los futuros docentes como *organizadores implícitos de los conceptos de naturaleza esencialmente cognitiva y que incluyen creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, preferencias, etc., que influyen en lo que se percibe y en los procesos de razonamiento que se realizan (Moreno y Azcárate, 2003). Para reconocer las creencias, asumimos que se trata de conocimientos subjetivos, poco elaborados, generados a nivel particular por cada individuo para explicarse y justificar muchas de las decisiones y actuaciones personales y profesionales vividas (Llinares, 1991). Por último digamos que los modelos adoptados para identificar a los estudiantes respecto de lo que piensan de la geometría y la demostración son: constructivismo, platonismo, instrumentalismo y formalismo (Ernest, 1989).*

En ese marco de referencia se desarrolla un estudio empírico, que describimos a continuación, para la constatación de algunas relaciones entre esos cuadros teóricos expuestos para tratar de mostrar cómo se pueden vencer algunas resistencias clásicas (Evans y Wedge, 2004) del futuro docente.

3. DESARROLLO Y MÉTODO DE ANÁLISIS

Para detectar algunas de las relaciones entre cognición-afecto se desarrolla un proceso de investigación-acción mediante situaciones de demostración con un grupo clase de 32 alumnos, de los cuales 20 eran chicas y 12 chicos, con edades comprendidas entre los 17 y 36 años de edad en un curso de geometría euclidiana, que se imparte en el primer año en la formación de futuros profesores en la Universidad de Jataí, en el interior de Brasil. La investigadora principal es a la vez la profesora del curso. A partir de observaciones y cuestionarios iniciales sabemos que los conocimientos que tienen los estudiantes sobre geometría y demostraciones son escasos. Un 91% decía no haber tenido ninguna formación geométrica previa digna de mención, y sólo un 3% tienen conocimiento geométrico. Éstos provenían de escuelas privadas en las que se ha trabajado bastante geometría. Un 63% manifestaron que en sus estudios anteriores nunca habían tratado las demostraciones geométricas en la escuela y sólo el 6% decían que se les enseñaba regularmente las mismas, recordando el teorema de Pitágoras como ejemplo. Del 13% de los estudiantes que habían dado clases en secundaria o estaban dando clase[1], sólo el 6% que daba clases regularmente afirmaba enseñar a demostrar a sus alumnos.

Para la investigación se decidió escoger un subgrupo heterogéneo de seis estudiantes (caracterizado en la figura 1) con el fin de realizar un estudio pormenorizado de sus producciones y afectos (Araujo, 2004), del cual consideramos a Tereza como caso paradigmático en el grupo; en este artículo, será el foco de ejemplificación del análisis.

Mostramos, a continuación, cinco bloques de instrumentos usados para la detección de las concepciones de los futuros docentes, descripción del proceso y observación de elementos de la dimensión afectiva.

a) Para conocer las concepciones iniciales de los estudiantes sobre la geometría, la demostración geométrica, el proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes y los sentimientos desarrollados en tareas de demostración geométrica, se realizan **entrevistas** semiestructuradas y se usa una **carta de posicionamiento**. En ella escriben a su mejor amigo explicando cómo era el curso de geometría, así como sus intereses y motivaciones, procurando describir los sentimientos desarrollados a lo largo del curso.

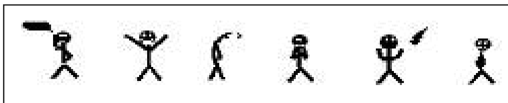
b) Se toman registros del proceso en audio y video, así como el **portafolio de actividades de clase y diarios de la profesora,** con informes personales de los hechos ocurridos, sentimientos y reflexiones sobre los mismos.

c) Para el seguimiento específico de lo afectivo, se usan cuatro instrumentos concretos: mapas de humor, gráficos motivacionales, etiquetas emocionales y observación *in situ*. En los **mapas de humor** los alumnos han de elegir, de entre varios rostros, el que mejor expresa su sentimiento hacia la geometría, también se usan para saber acerca de los métodos de enseñanza y del interés por su aprendizaje. Para el análisis, se toman las categorías que surgen del trabajo de Knapp (2001) que permiten detectar cinco de las seis emociones llamadas básicas: miedo, cólera, disgusto, alegría y tristeza. En los **gráficos motivacionales** se pide a los alumnos que realicen un gráfico de puntuaciones motivacionales que se otorgan de cero hasta el diez a lo largo del desarrollo del curso. Las **etiquetas emocionales** son gráficos que se usan para poder obtener información sobre las emociones que experimentaban los sujetos durante el proceso de demostración.

Figura 1
Características del alumnado que participa en el estudio general.

Sujeto	Percepción sobre conocimientos geométricos previos	Concepciones acerca de la geometría	Experiencia docente	Utilidad de las demostraciones geométricas	Carácter
Tereza	Geometría plana y espacial: áreas y volúmenes.	Herramienta que sirve básicamente para aplicar fórmulas.	No impartió clases de matemáticas.	Las demostraciones facilitan el aprendizaje geométrico, porque evitan la memorización.	Abierta y comunicativa.
David	Geometría espacial (poliedros y cuerpos redondos) y de geometría plana, estudió áreas y definiciones generales.	Materia que permite conocer y comprender el espacio, así como interrelacionarlo con otras partes de la matemática.	Nunca en geometría euclidiana, pero sí de matemáticas.	Las demostraciones geométricas son algo complicado, se sentía inseguro cuando empezaba una demostración y feliz cuando las concluía.	Abierto y comunicativo.
Eliana	Geometría espacial, construcción de maquetas y de geometría plana, recordaba haber trabajado con áreas en papel milimetrado.	La geometría es lógica y según ella esta concepción fue reforzada en la universidad.	No había impartido clases de matemáticas.	Creía que era importante enseñar demostraciones en la universidad, porque era un medio de dar seguridad a los futuros profesores.	Bastante reservada.
Helio	Se acordaba de haber estudiado los ángulos, y los cálculos de los elementos notables de un triángulo.	Veía la geometría como búsqueda de características de las figuras y las formas.	Sin experiencia docente.	Dijo no haber realizado nunca ninguna demostración.	Muy reservado.
Rosa	Nociones elementales de los poliedros y cuerpos redondos. Ante alumnos con dificultades de aprendizaje, estudió por su cuenta el reconocimiento y las construcciones de polígonos, poliedros y cuerpos redondos.	La geometría ayuda a comprender el entorno y el espacio.	Tres años.	Las demostraciones ayudaban a tener seguridad, aunque durante las mismas se sentía nerviosa y preocupada por mejorar sus resultados.	Abierta y comunicativa.
Sonia	Triángulos, áreas de figuras geométricas y en relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo.	La geometría es necesaria para el aprendizaje matemático y ayuda a comprender el entorno y el espacio.	Experiencias puntuales en álgebra y geometría en general.	Son necesarias. Se manifestaron en la universidad bloqueos importantes durante situaciones de pruebas, debidos a sucesivas frustraciones vividas en las diferentes asignaturas.	Reservada y sensible.

Figura 2
Muestra de iconos usados como etiquetas emocionales.



d) Mediante la **observación *in situ*,** los alumnos señalan el icono que mejor representa su estado de ánimo en fases del proceso de resolución. Los iconos sobre las reacciones emocionales muestran diferentes estados de ánimo, que cada estudiante debía comentar. Esta técnica se aplicó dos veces y permitía contrastar las observaciones faciales de los videos, con los estados que ellos señalaban. Para analizar las reacciones utilizamos como categorías las de Weil y Tompakow (2002), que permiten identificar aspectos de las emociones como son: nerviosismo, tensión, tranquilidad, alegría, miedo, cólera, disgusto y tristeza.

e) Los datos empíricos de las demostraciones se toman a partir de las transcripciones grabadas de seis tareas de los alumnos a lo largo del curso, registradas junto con la fase en que se encontraban en una ficha destinada a esta finalidad.

Reducción de datos y proceso de investigación-acción

Los datos se tomaron en tres fases sucesivas, contrastándolos con los investigadores externos y, en algunos casos, con los propios estudiantes. En la figura 3 mostramos cómo se conjugan los métodos de acción y validación en el desarrollo de la investigación. En el primer ciclo de investigación-acción, se diseña un nuevo programa para la asignatura de geometría euclidiana, que aporta cambios importantes sobre la propuesta de nuevas tareas de demostración geométrica y sobre cómo los futuros han de afrontar este reto en la clase de secundaria. En esta primera fase, se reconocen las producciones de los futuros docentes. Para cada situación y para cada sujeto construimos un esquema de la evolución de las reacciones emocionales y a partir de estos datos realizamos los análisis y mostramos los resultados. Se caracterizaron esquemas de prueba (Martínez Recio, 1999), y se observa si muestra coherencia o no con el sistema de creencias sobre la geometría evidenciado por los sujetos.

En la segunda fase, se asocian a estos resultados las actitudes de los estudiantes para poder identificar las posibles relaciones, así como los cambios de las reacciones emocionales. Las grabaciones en video actúan como contraste. A partir de las soluciones de los alumnos se determinan las estructuras de prueba más finas (Harel y Sowder, 1998). Y para el análisis de los procesos argumentativos se sigue la caracterización y se asignan categorías de interpretación de los esquemas personales asociados a los tipos de demostración y elementos de lenguaje (Ibañes y Ortega, 2001).

Para el análisis del nivel de prueba se usan árboles de demostración y la asignación de tres niveles (siguiendo la idea de Fortuny y Giménez, 2001). Un ejemplo de su uso se verá en las figuras 4, 5 y 6.

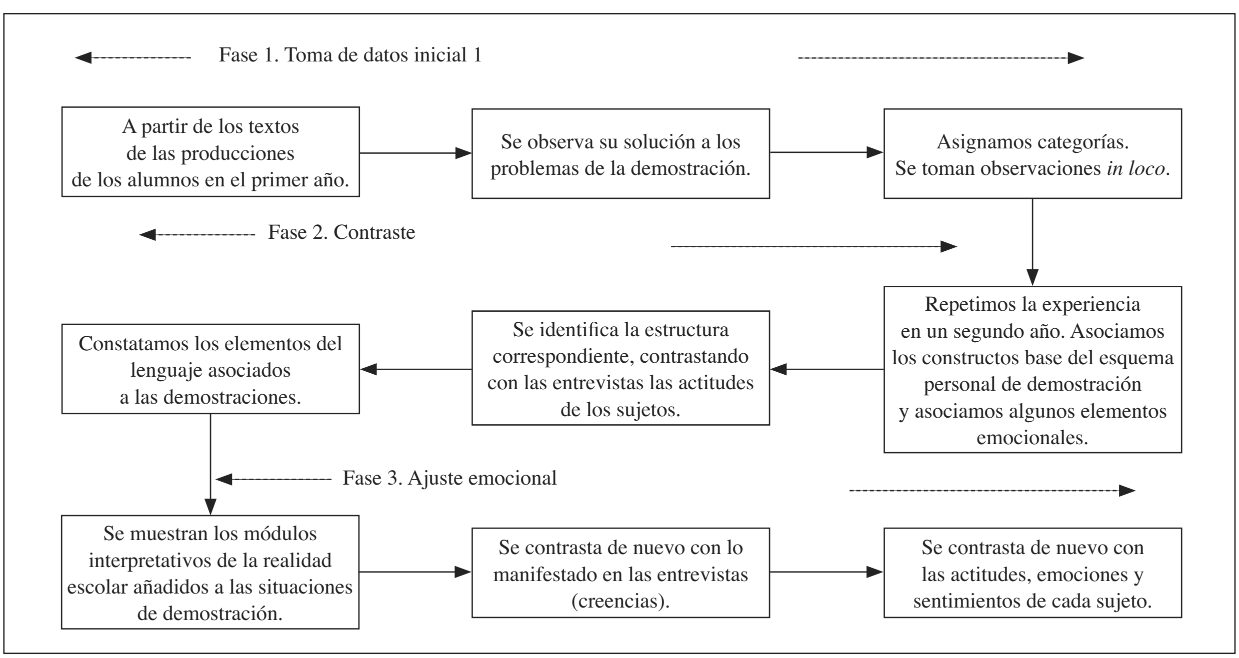
En todo momento la docente-investigadora está acompañada de dos investigadores externos que son los coautores de este artículo.

En la tercera fase, se realiza el análisis más detallado de contraste con lo que muestran los sujetos, y se triangula mediante las entrevistas, diarios e investigadores externos la co-construcción del proceso.

Sobre las situaciones de demostración

A continuación se analizan con detalle las observaciones de una alumna ante dos situaciones, llamadas S4 y S6, entre un total de seis que se estudiaron en la investigación más amplia que incluye una descripción detallada del curso (Araujo, 2004). Estas dos situaciones se eligen para mostrar explícitamente cambios emocionales, en un caso en que se considera de nivel simple S4, y otra que se considera intermedia-avanzada S6. Además, también consideramos que estas demostraciones en dos momentos del proceso indican un cambio entre dos momentos: uno más al inicio y la otra demostración en momentos cuando más adelantados del proceso, la alumna ya ha realizado diversas situaciones de demostración por su parte. Estas seis situaciones a las que nos referiremos aquí son elaboradas totalmente por los propios estudiantes individualmente, a diferencia de otras que son mucho más guiadas por la formadora o bien otras en las que se desarrolla un trabajo grupal. Debemos de considerar que los alumnos previamente a la resolución de las demostraciones ya habían trabajado con anterioridad todos los conceptos implicados, así como las relaciones correspondientes.

Figura 3
Esquema de desarrollo del proceso de selección y análisis de datos.



La primera situación que analizamos (S4) se presenta a mediados del curso, y pide que se ***muestre que las diagonales de un rectángulo son congruentes.*** Se considera de grado intermedio y aunque sea de tipo bastante lineal se plantea de forma abierta, permitiendo que el problema sea demostrado de varias maneras. Este tipo de demostración suele ser un resultado observable en cursos de educación secundaria pero ahora tiene un valor diferente, puesto que se requiere que el estudiante busque en los referenciales teóricos los presupuestos que son relevantes en la deducción a partir del conocimiento de elementos definitorios. Se acompaña de una figura que quizás pueda ser un distractor, según como se interprete.

La segunda situación que analizamos (S6) se muestra unas semanas más adelante: ***«Muestre que la medida del ángulo con vértice P cuyos lados son tangentes a una circunferencia en los puntos A y B es igual a 180º menos la medida del arco menor AB y que PA = PB.»*** La clasificamos como de nivel intermedio avanzado, ya que no se trata de un proceso inmediato y el alumno debe tener en cuenta diversos contenidos (concepto de *tangente*, *arco*, *radio*, etc.), así como la relación existente entre tangente y radio; nociones conceptuales previas respecto circunferencias; relación entre ángulo central y arco, entre otras. El detalle de la participación del alumnado en el curso y la interacción con el profesor y los compañeros se encuentra en Araujo (2004).

4. RESULTADOS

Para identificar los resultados del proceso decidimos mostrar aquí, como ejemplo, las respuestas de Tereza. Su posición inicial negativa y de carácter abierto nos parecen importantes para considerarla como caso paradigmático y normal en las universidades brasileñas, ya que cuando la observamos era la segunda vez que hacía la asignatura porque había tenido que abandonar el curso anterior por cuestiones personales.

Concepciones y afectos iniciales

A partir de los registros obtenidos, identificamos que la mayoría de los estudiantes mostraron concepciones formalistas-técnicas al inicio. Tereza, en particular, nos mostró la geometría como una herramienta que sirve básicamente para aplicar fórmulas.

«Porque pensamos que vamos a estudiar de la misma forma, sólo fórmulas y aplicar fórmulas. El año pasado, yo estudié más o menos así. […] La geometría que estoy estudiando hoy la encuentro mucho mejor, porque estamos yendo más allá de la definición. Aprendemos mejor así, sabemos de lo que se trata sin tener que decorar.» (Entrevista con Tereza, E1: 21-24)

Muchos estudiantes, como Tereza, creen inicialmente que las demostraciones son un medio importante de aprehensión del conocimiento geométrico sin tener que memorizar los conceptos. Piensan que las demostraciones dan seguridad a las personas que las saben realizar y también llevan a un aprendizaje más permanente. Consideran que el aprendizaje de la geometría y sus demostraciones hacen que las matemáticas se vuelvan más agradables. Identifican la demostración como un instrumento de validación de una proposición matemática, pero afirman que el trabajo realizado no les proporcionó el significado exacto del papel de la demostración en el aprendizaje. A pesar de que la estudiante ya había realizado demostraciones geométricas durante cuatro meses, aproximadamente, en la universidad mantuvo, a lo largo de la primera fase de trabajo, una concepción de la geometría y la demostración como contenidos que debían ser memorizados con la finalidad de sacar buenas notas en las pruebas. A partir de éstas y otras observaciones constatamos que l*as creencias sobre la demostración están directamente relacionadas con las experiencias previas del alumnado* (McLeod, 1989).

Concepciones, reacciones emocionales y afectos en la situación S4

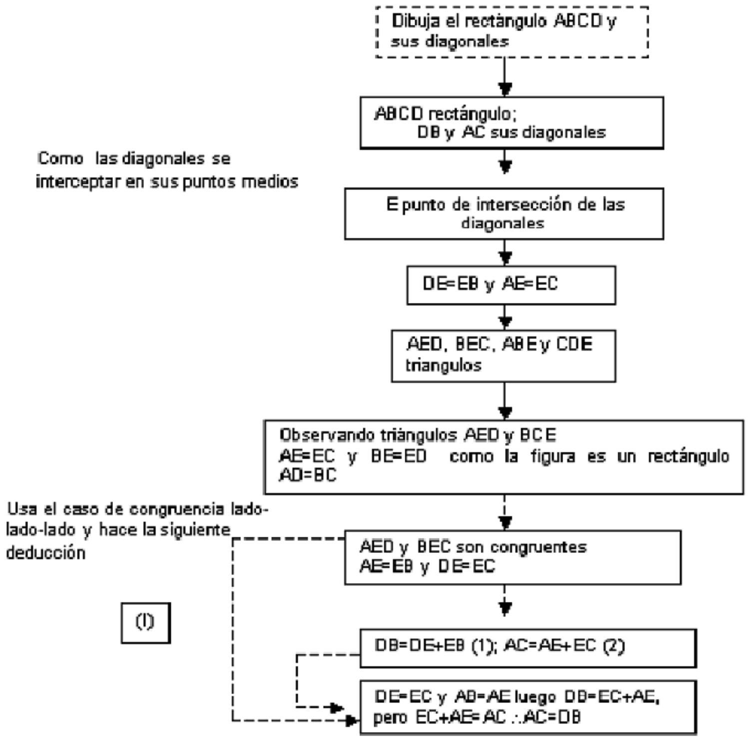
Ante la primera demostración, la estudiante justifica lógicamente la validez de la proposición de forma parcialmente correcta (Figura 4) a través de una argumentación simbólica que resulta incompleta, y un árbol de proceso que se muestra como lineal. Su idea de demostrar parece, pues, que coincide con la de cadena de argumentos.

A pesar de la omisión de algunos argumentos, consideramos que la estudiante tiene un esquema de prueba casi deductivo, y bastante estructurado, ajustado a su idea previa sobre lo que ocurre cuando sabes demostrar. Dicho esquema de prueba coincide bastante con reacciones emocionales positivas y concepciones formalistas-técnicas explicitadas. Tereza dice sentirse eufórica durante toda la demostración, lo que contrasta con su postura corporal y análisis facial, ya que presentaba rasgos de atención con momentos de inquietud. Ahora bien, pensamos que la muestra de inquietud fue debida al hecho de que quisiera concluir con éxito y de forma rápida la demostración, porque estos rasgos no interfirieron en el estado eufórico (rictus serio, pero no apesadumbrado) que sintió durante todo el proceso ya que se sentía segura de las respuestas que daba.

En el momento en que Tereza se enfrenta ante la segunda situación analizada (S6), que hemos categorizado de rango intermedio avanzado, afirma que las demostraciones *son un medio importante para la adquisición del conocimiento geométrico, ya que nos permiten trabajar los conceptos sin tenerlos que memorizar, dan seguridad a las personas que las saben hacer y facilitan un aprendizaje más permanente.* Dice que *el aprendizaje de la geometría y sus demostraciones hacen que las matemáticas sean más agradables*.

Tereza presenta ahora una respuesta parcialmente correcta y su esquema de prueba, que lo hemos caracterizado de deductivo informal.

Figura 4
Respuesta y árbol de prueba de Tereza en la situación (S4).



Muestre que las diagonales de un rectángulo son congruentes

Sea un rectángulo ABCD con diagonales $\overline{DB}$ y $\overline{AC}$. Sabemos que
las diagonales se cortan en sus respectivos puntos medios, y
designamos y deesignamos el punto de intersección como punto E.
Tenemos por tanto que $\overline{DE}=\overline{EB}$ y $\overline{AE}=\overline{EC}$. Trazando las
diagonales verificamos la formación de triángulos AED, BEC,
ABE y CED. Vamos a analizar primeramente los triángulos AED
y BEC
Como ya dijimos, $\overline{AE}=\overline{EC}$ y $\overline{BE}=\overline{ED}$, y podemos ver como las
figuras es un rectángulo, por lo tanto $\overline{AD}=\overline{BC}$. Así, por el caso
L.L.L. los triángulos AED y BEC son congruentes y $\overline{AE}=EB$ y
$\overline{DE}=\overline{EC}$. Podemos verificar que la diagonal DB viene dada por
DB=DE +EB (1)
La diagonal AC viene dada por
$\overline{AC}=\overline{AE}+\overline{EC}$ (2)
DE (1) tenemos que:
Como $\overline{DE}=\overline{EC}$ y $\overline{EB}=\overline{AB}$
Pero $\overline{EC}+\overline{AB}=\overline{AC}$ Por lo tanto $\overline{AC}=\overline{DB}$
Las diagonales del rectángulo son congruentes. c.q.d

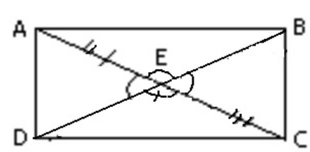
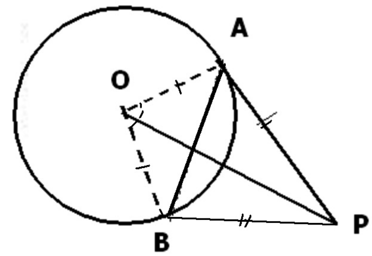


Figura 5
Demostración de Tereza en la parte 2 de la actividad.

Como la recta que pasa por A y C pasa también por B son tangentes a la circunferencia y como $\overline{OB}$ y $\overline{OA}$ son radios de la circunferencia.
tenemos que $\widehat{OAP} = \widehat{OBP} = 90^o$
Trazamos una recta OP
Como forman dos triángulos equiláteros, la hipotenusa en común es $\overline{OA} = \overline{OB}$ que son dos radios. Los otros dos catetos son iguales $\overline{AP} = \overline{OP}$



Dibuja la circunferencia de centro O;
A y B puntos de tangencia
P está situado fuera de la circunferencia

↓

Las rectas que pasan por A y B son tangentes;
OB y OA son radios de la circunferencia ∴
OÂP = OBP = 90º

Traza la recta OP ↓

Se tiene triángulo equiláteros con hipotenusa
OA = OB (radios) ∴ AP = BP

Figura 6
Estructura de árbol de la respuesta de Tereza en la situación (parte 1).

Δ AOB y Δ AOC son isósceles y sus ángulos son iguales

A partir del trazado de la recta por A y B se tiene ↓

OAPB es un cuadrilátero con ángulos rectos
y su suma es 180º y para completar los 360º
(ángulos internos del cuadrilátero) se tiene BÔA + BPA

↓

P es 180º menos BÔA

Los errores cometidos por esta estudiante en esta demostración quizás se deban (según manifestó en la entrevista final) a la decisión que tomó de dedicar menos tiempo al estudio de la geometría para poder dedicar más tiempo a otras asignaturas. Este hecho se tradujo en inquietud ante la realización de tareas de demostración, que registramos repetidamente en los diarios. Podemos ver cómo empieza por la segunda parte, presenta por primera vez argumentos informales y sus conexiones están poco estructuradas. Su esquema de prueba es deductivo informal. Realiza razonamientos deductivos no aplicados y en cuanto al lenguaje usa inferencias argumentativas, con conexiones débiles. Su estilo es ahora informal-semi-estructurado. Muestra dificultades en reconocer y definir las propiedades esenciales de los conceptos en cuestión y establecer conclusiones coherentes mediante argumentos deductivos (síntesis de las ideas). En cuanto a la primera parte de la demostración que trata de hacer a continuación (Figura 6), sigue una estructura semejante al caso anterior. Los argumentos en este momento son aún más débiles, ya que la estudiante no logró establecer las conexiones apropiadas entre ellos. Emocionalmente Tereza se muestra tensa en casi todo el desarrollo de la demostración. Al inicio de la demostración, quizás sea debido a que tenía dudas de cómo proponer un plan de solución para el teorema.

Después sigue sintiéndose insegura porque no sabía cómo deducir el resultado y, de acuerdo con lo que estábamos observando en el papel, en este momento presentaba deducciones equivocadas en su respuesta, que después modifica y no entrega. Seguramente el motivo de la tensión que experimentaba se debiera a su inseguridad y dudas acerca de la solución. Al final ella se siente satisfecha porque piensa que la primera parte de la demostración estaba correcta y creía que la segunda también podría estar correcta. Observamos, a partir de las grabaciones de vídeo, que las posturas corporales evidenciaban una atención con estados de tensión de diferentes intensidades durante los cuatro primeros momentos del proceso de resolución de la demostración, mientras que en el último momento la postura corporal de la estudiante nos muestra una posición de atención sin evidentes rasgos de euforia.

Figura 7

Reacciones emocionales en dos situaciones de demostración en momentos diferentes de Tereza.

Fases y momentos de la desmostración		Tipos de emociones y comportamintnos en las demostraciones geométricas analizadas			
Introducción	M1	Euforia	Atención	Tensión	Atención
	M2	Euforia	Atención	Tensión	Atención
Desarrollo	M3	Euforia	Atención	Tensión	Atención
	M4	Euforia	Atención	Tensión	Atención
Conclusión	M5	Euforia	Atención	Satisfacción	Atención

Las reacciones emocionales de los estudiantes como Tereza cambian a lo largo del proceso de realización de las demostraciones. En la tabla de la figura 7 se contrastan las reacciones emocionales de Tereza en las dos demostraciones descritas anteriormente en los distintos momentos de la demostración. Para cada situación, en la columna de la izquierda se indican las reacciones emocionales manifestadas en la observación *in loco* y la columna derecha corresponde a los resultados del análisis de contraste del comportamiento facial a partir de las grabaciones hechas en las cintas de vídeo, que coinciden casi en su totalidad.

Estas observaciones se realizan para cada una de las demostraciones y nos permiten conocer cómo evolucionan los afectos locales a lo largo del proceso.

Evolución general de afectos en el conjunto de las situaciones de prueba

Para mostrar la evolución de los esquemas de prueba en las seis situaciones de demostración citadas, utilizamos unos gráficos (llamados **trayectorias evolutivas**) para visualizar las oscilaciones del nivel de esquema de prueba transcurridas a lo largo del curso (Figura 8). En el caso de Tereza comienza con nivel de indiferencia en la situación 1 y de deducción formal en la situación 2. A la mitad del curso en la S3 su esquema de prueba fue de nuevo de indiferencia y en S4, S5 dieron muestras de deducción casi formal para volver a la deducción informal en la S6. Al contrastar con los datos de las entrevistas y cuestionarios, vemos que Tereza en el desarrollo del curso pasó a ver la demostración como un proceso fundamental de verificación de las proposiciones geométricas. El lector puede ver las categorías en Ortega e Ibañes (2001).

Sus esquemas y árboles de prueba fueron casi de deducción formal, junto con reacciones emocionales positivas. Al final del curso, aunque decía mantener su concepción de demostración, su esquema de prueba fue tipo informal, coincidiendo con emociones menos positivas. La evolución cualitativa puede observarse en la tabla de la figura 9.

Figura 8

Evolución del nivel de esquema de prueba de Tereza en las seis situaciones investigadas.

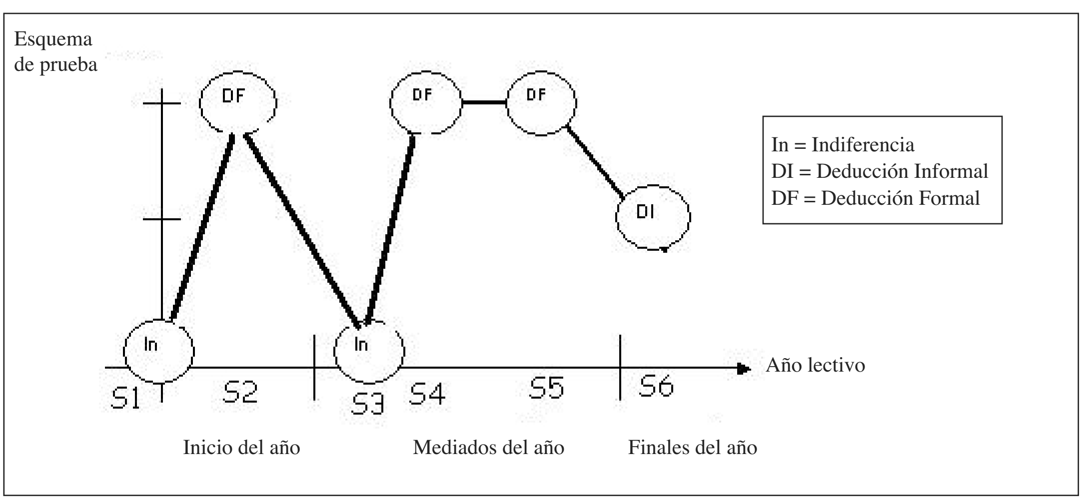


Figura 9
Síntesis evolutiva en las tareas de Tereza.

Situaciones de demostración	Esquema de prueba	Modo de interpretación	Argumentación	Estilo de lenguaje	Concepciones de demostración
S1	Enuncia de forma correcta el enunciado sin demostrarlo.	No manifiesta un tipo de razonamiento.	Indiferente.	Presenta informalmente el enunciado del teorema.	No tenía idea.
S2	Demostración deductiva.	Razonamiento deductivo formal.	Relacional justificativo.	Formal-estructurado.	Medio de explicación de una proposición.
S3	Indiferencia.	No manifiesta un tipo de razonamiento.	Indiferencia argumentativa.	Inexistente.	Esencial para la comprensión de la geometría.
S4	Demostración deductiva.	Razonamiento deductivo semi-estructurado.	Relacional justificativo.	Formal semi-estructurado.	Idem. No se modifica.
S5	Demostración deductiva.	Razonamiento deductivo.	Relacional justificativo.	Formal estructurado.	Idem. No se modifica.
S6	Prueba deductiva informal.	Razonamiento deductivo semi-estructurado.		Informal semi-estructurado.	Idem. No se modifica.

A partir de estas observaciones y otras semejantes del resto del grupo, reconocemos que los esquemas de prueba *no se desarrollan igualmente durante su proceso formativo, en donde influyen los estados emocionales de los sujetos*. Así, en los cuestionarios iniciales vimos que solamente Eliana y Tereza declararon tener conocimientos sobre la demostración. Ahora bien, mientras que para Eliana la demostración era una cuestión lógica, para Tereza significaba el uso de fórmulas. A pesar de ello, ambas logran realizar las demostraciones de niveles de deducción informal y formal, y expresan una concepción final de demostración como medio de explicación y verificación. A pesar de que la estudiante presenta al final de curso un esquema de prueba de deducción informal, reconoce bien la naturaleza de la demostración geométrica y del proceso de deducción. Respecto a las actitudes y afectos, vemos que en general éstas han sido positivas, incluso teniendo en cuenta las inquietudes manifestadas al final de curso.

Sobre las influencias de lo afectivo sobre el desarrollo profesional

Aunque no ha sido totalmente analizado aquí, a lo largo del desarrollo de la experiencia percibimos que las actitudes y sentimientos hacia la demostración de los estudiantes cambiaban a medida que fueron teniendo experiencias positivas o negativas ante las demostraciones, de manera que se asocian habitualmente actitudes positivas a creencias más sólidas y pruebas de más alto nivel (Araujo, 2004). Asimismo se asocian las negativas a fracasos e incomprensiones. Pero la relación de analogía entre actitudes y sentimientos no se da en todos y hay excepciones. En efecto, dos de los estudiantes que lograron contestar la primera situación de prueba manifestaron sentir inseguridad al inicio de la demostración y satisfacción cuando proponían una solución correcta a la proposición. Estas actitudes y sentimientos les acompañaron durante todo el curso.

Interpretamos que el motivo para tales reacciones afectivas está relacionado con el hecho de que estos alumnos, a pesar de tener una comprensión bastante clara de lo que significaba demostración, aún no dominaban bien el proceso del razonamiento deductivo y el concepto de *validación*, quedando reflejado en sus estructuras de prueba, que muestran la fase de transición del pensamiento informal al formal.

Así, por ejemplo, un estudiante que tenía una concepción bastante clara de todos estos conceptos manifestó sentirse alegre durante las demostraciones. Constatamos al final del curso que su sentimiento cambió pasando de alegría a cierta ansiedad cuando no conseguía establecer las debidas conexiones entre los argumentos y, consecuentemente, no tenía éxito en los problemas.

Los sentimientos hacia la demostración de los dos primeros sujetos que no lograron contestar la primera situación a lo largo del curso se fueron transformando en actitudes negativas, no sólo hacia la demostración, sino que también se manifestaron en el interés y en el estudio del trabajo geométrico. A medida que algunos de los estudiantes no superaban los obstáculos, al no encontrar estrategias de prueba coherentes y correctas, mostraban más ansiedad y abatimiento.

Algunas relaciones entre afectos locales y demostraciones

La metodología empleada ha permitido que mostremos resultados coherentes que nos permiten establecer hipó-

tesis sobre la existencia de implicaciones de los afectos locales sobre la demostración y viceversa. En la muestra de las seis personas analizadas se evoluciona habitualmente de forma positiva en los esquemas de prueba, pero los resultados son diferentes dependiendo del tipo de problema de demostración y ello, a su vez, está relacionado con los afectos locales. Así, reconocemos dos estudiantes que mantienen una situación de indiferencia a lo largo del curso que no logran probar muchas demostraciones. Uno de ellos veía la *demostración* como «mostración» y el otro, como constatación de una definición. Es decir, los estudiantes asociaban la demostración a la descripción de propiedades o características de los objetos geométricos. Pues bien, estas concepciones de demostración se reflejaron claramente en las sucesivas estructuras de árbol, con frases no comprometidas y ausencia de conexiones lógicas. Otro estudiante no da ni siquiera una respuesta a la respuesta de proposición que «coincide» con las concepciones que tiene sobre la demostración; vemos que la concibe como constatación de una definición. El último sujeto, que contestó en general con indiferencia, tenía una concepción de demostración como un sistema deductivo, pero no tenía claras las condiciones, necesidad y suficiencia, que tiene toda demostración. No resolvió las demostraciones de niveles intermedio e intermedio avanzado, lo que no ocurría con las de nivel más básico.

Sobre los efectos de la educación emocional en las demostraciones

La experiencia llevó a los estudiantes a un proceso de conocimiento y reflexión sobre sus propias emociones, lo que permitió encontrar salidas para afrontar este problema indiscutiblemente de orden afectivo como barrera al desarrollo cognitivo. Ejemplificamos, con el caso de Tereza, que aunque no logró contestar la tercera situación de demostración, sí tenía una concepción bastante clara de lo que era la demostración que le permitía desarrollar situaciones que no fueran de nivel alto. Constatamos que no dominar todas las reglas de la deducción, y la falta de comprensión del significado del proceso de validación, no sólo estaba relacionado con su resultado menor en la situación final sino que coincide con el aumento de las reacciones emocionales negativas. Con todo, las actitudes o sentimientos de ansiedad y nerviosismo de esta estudiante eran también debidas a la baja estima y a la dificultad de manejar sus emociones. Según ella manifestó, le creaban bloqueos en situaciones de demostración. Es evidente, por último, que quizás aparecieran otros resultados si hubiéramos analizado las tareas colectivas que aquí no se han mostrado.

5. CONCLUSIONES

La metodología usada en el análisis de las situaciones se ha mostrado eficaz para reconocer la existencia de relaciones entre afecto y desarrollo demostrativo en la formación inicial docente. En efecto, los constructos empleados, las trayectorias evolutivas de niveles de demostración y las comparaciones en momentos diferentes de la misma se mostraron instrumentos eficientes para nuestros objetivos. En el estudio detallado con todas las trayectorias evolutivas de los seis miembros del grupo de estudio se justifica cómo se desarrolla el contenido satisfactoriamente y mejoran los niveles de demostración en general, así como también se desarrollan positivamente las creencias sobre lo que es la demostración (Araujo, 2004).

Se percibe una mayor preocupación en general por parte de los futuros docentes en dar forma a los argumentos de modo que se aproximen aquellas soluciones discutidas en clase. Sin embargo, en el estudio global percibimos que sólo la mitad logran mejoras significativas desde el punto de vista del contenido matemático. En efecto, en los resultados encontramos muestras más que evidentes de las relaciones existentes entre lo afectivo y lo cognitivo a lo largo del proceso de estudio, que coinciden con las intuiciones de muchos docentes que, después del primer mes de clases, notamos algunos cambios en las respuestas de los estudiantes debidos a los afectos, aunque dependiendo de las demostraciones.

Entre las conclusiones más significativas a las que hemos llegado, consideramos las siguientes:

1) *La calidad de una demostración está asociada a la creencia que uno tiene respecto a la misma y cómo debe desarrollarse su práctica.* Si por un lado el sujeto tiene una concepción difusa de los componentes del proceso demostrativo, como las nociones de necesidad y suficiencia, validación, proceso deductivo, etc., se desencadenan dificultades y obstáculos que vivenciados, a menudo, generan actitudes o sentimientos de inseguridad u otros de carácter negativo. Si por otro lado, el sujeto tiene una percepción clara de los componentes y valores del proceso demostrativo, sus esquemas de demostración serán más elaborados que en aquellos casos en los que la concepción es difusa y la toma de decisiones, para superar obstáculos cognitivos, suele ser más acertada, que durante el desarrollo de la demostración.

2) Verificamos también que *los cambios de las actitudes ante situaciones de demostración se asocian al dominio que el estudiante tenía del proceso demostrativo y de las reglas de deducción que a su vez se relacionan con sus concepciones.* También constatamos la importancia de la creación de un ambiente favorable a la reflexión y al debate matemático y profesional. La discusión sobre valores y emociones ante la geometría y su aprendizaje favorecieron la apertura para la comprensión del proceso demostrativo en muchos de los casos observados.

3) A partir de los datos obtenidos en la experiencia realizada, se refuerza la idea de que *la confianza que uno tiene ante sí mismo del desarrollo de demostraciones activa comportamientos y sentimientos, que pueden ser positivos o negativos dependiendo de las experiencias que el sujeto vivencia.*

Si el sujeto logra superar obstáculos cognitivos y lingüísticos, su autoestima sube y su capacidad de enfrentamiento a las demostraciones le resulta más exitosa; sin embargo si los fracasos ocurren a menudo, la autoestima del estudiante queda comprometida y consecuentemente su reacción ante el enfrentamiento a las demostraciones es menos exitosa. El abatimiento es una de las reacciones negativas que a menudo suelen aparecer en estos casos y que lleva el estudiante a desistir de luchar ante las situaciones adversas. Sin embargo, hemos detectado que si hay una intervención del profesor a través de un proceso de educación emocional y si se crean en el estudiante sentimientos relacionados con esperanza, la posibilidad de que él siga adelante, ante todos los desafíos que se le imponen, es mayor que en el caso de que esto no ocurra.

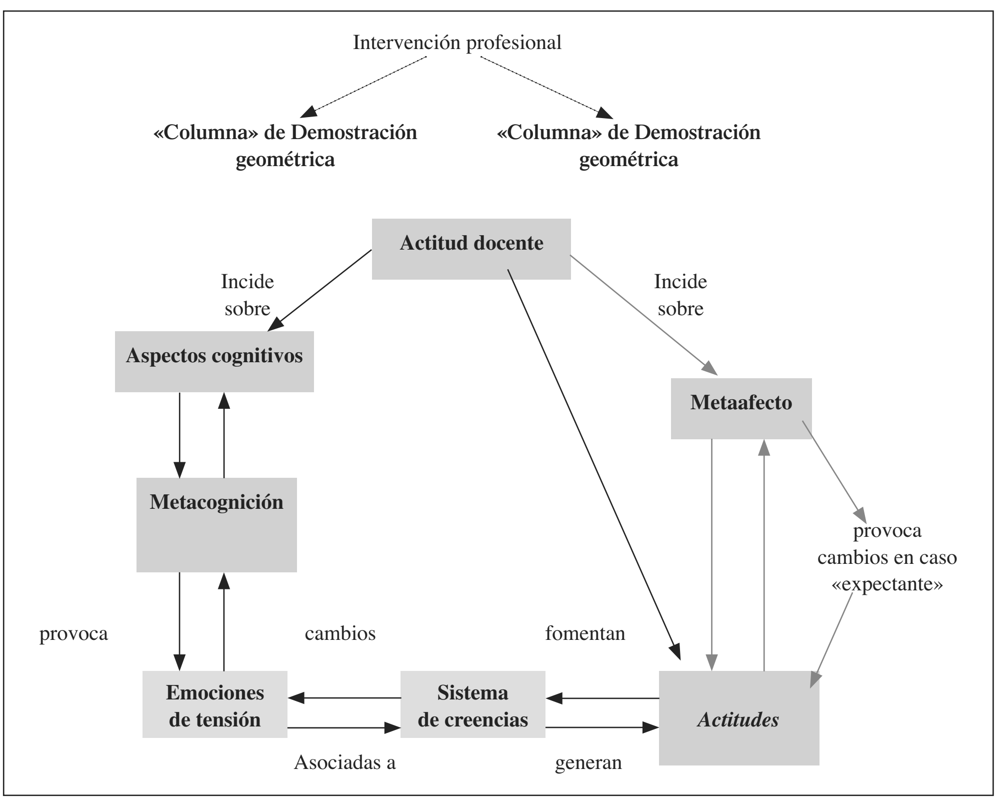
4) Los resultados encontrados permiten conjeturar un ***mapa de implicación*** entre lo afectivo y el desarrollo de la demostración geométrica. En dicho mapa (Figura 10), evidenciamos cómo la actitud docente tiene un papel importante en el proceso de desarrollo de la demostración pues provoca una reflexión por parte del alumno sobre la demostración y los afectos locales y globales que se movilizan. A partir de esta concienciación y de la necesidad de proponer una solución al problema de demostración, se generan emociones de tensión que están asociadas a un sistema de creencias que provoca ciertas actitudes sobre las cuales el docente interfiere fomentando cambios en las emociones iniciales, las cuales se reflejan en la forma como el estudiante concibe la demostración, así como también en la respuesta del problema.

5) Al término de la investigación, se mostró el valor positivo de establecer elementos de educación emocional en el desarrollo profesional docente. Además, los estudiantes valoraron positivamente la introducción de la valoración de las emociones en sesiones de demostración en la clase y también valoraron positivamente el propio hecho de comentar su desarrollo emocional de forma individualizada. Fue motivador y sirvió para que algunos reconocieran una vertiente educativa en la que nunca se habían fijado y les iba a servir en su futuro profesional. Con ello se ha mostrado que *la actitud docente puede también incidir directamente en el metaafecto del estudiante* que se encuentra en una situación de expectación, a partir de la cual, puede tomar conciencia de sus propias emociones y de cómo éstas afectan su proceso de demostración. La concienciación del estudiante para profesor puede provocar cambios en sus actitudes que se reflejarán en su autoconcepto y en su respuesta al problema de demostración.

El mapa no pretende ser una reducción del complejo proceso que involucra el desarrollo demostrativo, ya que sabemos que hay muchos otros factores que influyen directamente en dicho proceso. Lo consideramos, realmente, una tentativa de sintetizar de modo esquemático el proceso cognoafectivo de las relaciones que constatamos en el desarrollo de las situaciones de prueba de nuestro estudio.

Figura 10

Mapa de implicaciones afecto-cognición en demostraciones con futuros docentes.



Con esta investigación reconocemos, como pretendíamos, algunas de las relaciones entre la dimensión afectiva y cognitiva del proceso de enseñanza y aprendizaje de la demostración geométrica en la formación docente de profesores de matemáticas. Sin embargo, pensamos que éstas solamente serán efectivas si se pueden orientar mejor en la puesta en práctica de los programas para aprender a desarrollar educación emocional en cursos de formación inicial de profesores de matemáticas asociados a los programas de intervención que tengan en cuenta el análisis de prácticas en el contenido geométrico, estratégico-didáctico y afectivo del futuro profesor. De todos modos, reconocemos que es preciso analizar con detalle los procesos afectivos en situaciones colaborativas de aprendizaje, viendo lo que ocurre en las interacciones entre colegas. Y también es importante identificar los efectos del uso de medios tecnológicos que ayuden a la construcción de conjeturas como es el uso de tutores artificiales y editores como *Theorema* (Buchberger, 2001), que no hemos utilizado.

NOTAS

[1] En países como Brasil, la falta de profesores especializados hace que el Estado admita en las escuelas a docentes sin titulación (como ocurría en España hace cuarenta años). Algunos reciben ayudas para formarse oficialmente, en períodos de tarde-noche en las universidades.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDERSON, L.W. y KRATHWOHL D.R. (eds.). (2001). *A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing: A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives.* Nueva York: Longman.

ARAUJO, J. (2004). «Afectividad y demostración geométrica en la formación inicial de profesores de matemáticas». Tesis doctoral. Universidad de Barcelona.

ARSAC, G. (1988). Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomenes de validation en France. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(3), pp. 247-280.

ATHERTON, J.S. (2005). Learning and Teaching: Bloom's taxonomy [On-line] UK: Disponible en <http://www.learningandteaching.info/learning/bloomtax.htm>. Consultado el 16 de abril de 2006.

BAIRRAL, M.A. (2002). «Desarrollo profesional docente en geometría: análisis de un proceso de formación a distancia». Tesis doctoral. Universidad de Barcelona.

BALACHEFF, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. Una empresa docente*. Bogotá. Colombia: Universidad de los Andes.

BATES, K.F. (1996). Investigating notions of proof: a study of students' proof activities within the context of a fallibilist and social theory. South Bank University. Disponible en <http://www.ongar.org/phd/phd.pdf>. Consultado el 3 de abril de 2002.

BEATTY, S.E., KAHLE, L.R. y HOMER, P. (1991). Personal values and gift-giving behaviors: a study across cultures. *Journal of Business Research,* 22, pp. 149-157.

BISQUERRA, R. (2000). *Educación emocional y bienestar*. Barcelona: Cisspraxis.

BUCHBERGER, B. (2001). Mathematical Knowledge Management Using Theorema, en Buchberger, B. y Caprotti, O. (eds.). *Proceedings of the First International Workshop on Mathematical Knowledge Management: MKM'2001* RISC, A. Schloss Hagenberg, septiembre, pp. 24-26.

BUXTON, L. (1981). *Do you panic about maths? Coping with maths anxiety.* Londres, UK: Heinemann Educational Books.

COE, R. y RUTHVEN, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British Educational Research Journal*, 20(1), pp. 41-53.

DAMASIO, A. (2001). *El error de Descartes. La razón de las emociones.* Barcelona: Planeta.

DIAS, O.M.C. (2001). «A formação as práticas e as atuitudes de professores em matemática bem sucedidos». Tesis de maestría. Rio Grande del Sur.

DUVAL, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view, en Mammana, C. y Villani, V. (eds.). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Boston / Dordrecht: Kluwer Academic publishers.

DUVAL, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Santiago de Cali. Colombia: Universidad del Valle.

ERNEST, P. (1989b). The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: a model. *Journal of Education for Teaching,* 15(1), pp. 13-33.

EVANS, J. (2001). «Review of: Creole genesis, attitudes and discourse», en John, R. Rickford y Suzanne Romaine (eds.). *Notes on Sociolinguistics,* 6, pp. 77-84.

EVANS, J. y WEDGE, T. (2004). «People's motivation and resistance to learn mathematics in a lifelong perspective'». Comunicación presentada en ICME-10, Copenhage, Dinamarca, Topic Study Group 6; <http://www.icme-10.dk/>. Consultado el 4 de abril de 2005.

EVANS, J. (2005). Affective conditions of the mathematics learning process Strobl Conference, 2.2, 5.05 Disponible en <http://www.didaktik-der-mathematik.jku.at/didaktik-mathe/abstracts/Abstract_Evans.pdf>. Consultado el 3 de octubre de 2005.

FORTUNY, J.Mª. y GIMÉNEZ, J. (2001). Razonamientos geométricos de alto nivel y actividades predemostrativas con alumnos y alumnas de 12-16 años. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 28, pp. 20-38.

DORFLER, W. (2003). Observación y diseño en pruebas matemáticas. (Traducción del inglés: Alagia, H.). <http: //www.lettredelapreuve.it/Newsletter/03Printemps/ObservationCastillano.pdf>.

GÓMEZ-CHACÓN, I.Mª. (1997). «Procesos de aprendizaje en matemáticas con poblaciones de fracaso escolar en contextos de exclusión social. Las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas». Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid.

GÓMEZ-CHACÓN, I.Mª. (1998). Una metodología cualitativa para el estudio de las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 16(3), pp. 431-450.

GÓMEZ-CHACÓN, I.Mª. (2000). Affective influences in the knowledge of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, An International Journal*, 43(2), pp.149-168.

GÓMEZ-CHACÓN , I.Mª. (2001). The emotional dimension in mathematics Education: A bibliography. *Statistical Education Research Newsletter-Journal*, 2(2), May. pp. 20-35. Estados Unidos.

GOMEZ-CHACÓN, I.Mª. (2003). La tarea intelectual en matemáticas. Afecto, meta-afecto y sistemas de creencias. *Boletín Asociación Venezolana*. Edición Especial Educación Matemática. Monográfico Educación Matemática. Caracas. Venezuela: 10(2), pp. 225-249.

HALL, S. (1997). *Representations: Cultural Representations and Signifying Practices*. Londres: Sage Pub.

HANNA, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics,* 15(3), pp. 42-49.

HAREL, G. y SOWDER, L. (1998). *Students' proof schemes*. Purdue San Diego State University.

IBAÑES, M.J. y ORTEGA, T. (2001). Un estudio sobre los esquemas de prueba en el alumnado de primer curso de bachillerato. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 28, pp. 39-59.

KNAPP, M. (1978). *Nonverbal Communication in Human Interaction.* Nueva York: Holt Rinehart Winston.

KRATWOHL, D.R., BLOOM, B.S. y MASIA, B.B. (1964). *Taxonomy of educational objectives, the classification of educational goals*. Nueva York. Handbook II. Affective Domain: McKay.

JONES, K. (1997). Student-teachers' conceptions of mathematical proof. *Mathematics Education Review,* 9, pp. 21-32.

JONES, K. (2000a). The student experience of mathematical proof at university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(1), pp. 53-60.

JONES K. (2000b). Teacher Knowledge and Professional Development in Geometry. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 20(3), pp. 109-114.

JONES, K. (2004). Student interpretations of a dynamic geometry environment. <http://www.fmd.uni-osnabruek.de/ebooks/cerme1-proceedings/papers/g2-jonespdf>. Consultado el 16 de julio de 2005.

JONES, K. y FUJITA, T. (2002). *The bridge between practical and deductive geometry: developing the 'geometrical eyes'*. UK: Centre for Research in Mathematics Education, University of Southampton.

KNAPP, M.L. (2001). *La comunicación no verbal: el cuerpo y el entorno*. Barcelona: Paidós.

KRATWOHL, D.R.; BLOOM, B.S. y MASIA, B.B. (1964). *Taxonomy of Educational Objectives, the classification of educational goals*. Nueva York: Handbook II: Affective Domain: McKay.

LAKATOS, I. (1976). *Proofs and refutations. The logic of mathematical discovery*. Londres: University Press. Cambrige.

LLINARES, S. (1991). *La formación de profesores de matemáticas*. Sevilla: Universidad de Sevilla.

MANDLER, G. (1975). *Mind and Emotion.* Nueva York: Wiley.

MANDLER, G. (1989). Affect and learning: Causes and consequences of emotional interactions, en McLeod, D.B. y Adams, V.M. (eds.). *Affect and mathematical problem solving: A new perspective,* pp. 3-19. Nueva York: Springer.

MARTÍNEZ RECIO, Á. (1999). «Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática». Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

McLEOD, D.B. y ADAMS, M. (eds.). (1988). *Affect and Mathematical Problem Solving. A New Perspective,* pp. 3-19. Nueva York: Springer-Verlag.

MCLEOD, D.B. (1989). Beliefs, attitudes, and emotions: new view of affect in mathematics education, en McLeod, D.B. y Adams, V.M. (eds.). *Affect and mathematical problem solving. A new perspective.* Nueva York: Springer-Verlag, pp. 245-258.

MAHER, C. y MARTINO, A. (1996). The Development of the Idea of Mathematical Proof: A 5-year Case Study. *Journal for Research in Mathematics Education,* 27(2), pp. 194-214.

McLEOD, D. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualisation, en Grouws, D.A. (eds.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 575-596. Nueva York: Macmillan.

McLEOD, D.B. (1994). Research on affect and mathematics learning in the JRME: 1970 to the present. *Journal for Research in Mathematics Education,* 25(6), pp. 637-647.

MORENO, M. y AZCÁRATE, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las ciencias,* 21(2), pp. 265-280. Disponible en <http://www.bib.uab.es/pub/ensenanzadelasciencias/02124521v21n2p265.pdf>.Consultado el 2 de mayo de 2004.

MOVSHOVITZ-HADAR, N. y HADAS, R. (1988). Preservice education of math teachers using paradoxes. *Educational Studies in Mathematics* 21(3), pp. 265-287.

NIMIER, J. (1977). Mathématiques et affectivité. *Educational Studies in Mathematics,* 8, pp. 241-250.

NOSS, R. (1994). Structure and ideology in the mathematics curriculum. *For the Learning of Mathematics,* 14(1), pp. 2-10.

RESTIVO, S. (1994). The social life of mathematics, en Ernest, P. (ed*.). Mathematics, Education and Philosophy: an International Perspective*. Basingstoke. UK: Burgess Science Press.

RICHARD, P.R. (1999). «Modelización del comportamiento en situación de validación: diagnóstico de las estrategias de prueba empleadas en geometría por alumnos de nivel secundario». Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

TAYLOR, N. (1989). Let Them Eat Cake: Desire, Cognition and Culture in Mathematics Learning, en Keitel, C., Bishop, A., Damerow, P. y Gerdes, P. (eds.). *Mathematics for All,* pp. 161-163. París: UNESCO.

THURSTON, W.P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 30(2), pp. 161-167. (Este artículo se reimprimió en 1995. *For the learning of mathematics*, 15(1), pp. 29-37).

WALDERKINE, V. (1988). *The Mastery of Reason: Cognitive development and the production of rationality*. Londres, UK: Routledge.

WEIL y TOMPAKOW (2002). *O corpo fala. A lguagem silenciosa da comunicação não verbal.* Brasil. Petrópolis: Artes Médicas.

[Artículo recibido en septiembre de 2005 y aceptado en mayo de 2006]