

UN MODELO COGNITIVO PARA INTERPRETAR EL DESARROLLO PROFESIONAL DE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS. EJEMPLIFICACIÓN EN UN ENTORNO COLABORATIVO

CARRILLO, JOSÉ, CLIMENT, NURIA¹, CONTRERAS, LUIS C. y MUÑOZ-CATALÁN, M. CINTA

Universidad de Huelva

climent@uhu.es

Resumen. A partir del trabajo de Sfard en relación con las fases de interiorización, condensación y cosificación para explicar los procesos cognitivos referidos al aprendizaje de las matemáticas, realizamos una propuesta de modelo interpretativo del desarrollo profesional. A continuación, analizamos sus características aplicándolo al caso de una maestra participante en un entorno colaborativo de desarrollo profesional, evidenciando de este modo las potencialidades del modelo.

Palabras clave. Desarrollo profesional de los profesores de matemáticas, procesos cognitivos, entornos colaborativos, reflexión.

A cognitive model to interpret mathematics teachers' professional development. A case study within a collaborative environment

Summary. Based on Sfard's stages of interiorisation, condensation and reification, which she applies to explain the cognitive processes in relation to the mathematical learning, we propose an interpretative model of professional development. We analyse its features and then the model is applied to the case study of a primary teacher participating in a collaborative project for professional development. This way we show the model's potentialities.

Keywords. Mathematics teachers' professional development, cognitive processes, collaborative environments, reflection.

CONSTRUYENDO UN MODELO INTERPRETATIVO DEL DESARROLLO PROFESIONAL

Los diversos modos en que se ha considerado al profesor en los distintos estudios sobre el desarrollo profesional reflejan las tres líneas de investigación sobre formación de profesores que consideran Brown y Borko (1992): aprender a enseñar, socialización del profesor y desarrollo del profesor. En relación con esta última línea, estos autores indican que se basa en una «visión del profesor

como un aprendiz adulto cuyo desarrollo es el resultado de cambios en estructuras cognitivas; se asume que estas estructuras cognitivas son los modelos de pensamiento por los cuales una persona se relaciona con el entorno» (p. 227). Orientaremos nuestro interés hacia el proceso de generación de conocimiento que nos sitúa ante la perspectiva del profesor como aprendiz.

En este sentido, entendemos que el profesor aprende y se desarrolla en contacto y consenso con sus pares, partiendo de sus propios esquemas conceptuales y de sus creencias y motivaciones, donde el lenguaje y la comunicación desempeñan un papel primordial, lo que coincide con las consideraciones ontológicas, epistemológicas y sobre la teoría del aprendizaje características del constructivismo social (Ernest, 1996). El aprendizaje del profesor y su desarrollo profesional, por tanto, son fruto de un proceso progresivo de socialización, maduración y complejización, en el que destacamos la importancia del contexto donde se producen los aprendizajes, constituyéndose las actividades de ese contexto en contenido propio de dichos aprendizajes, desde una perspectiva situada (Wenger, 1998).

En este artículo nos interesa discutir un modelo que dé cuenta de los procesos cognitivos que implementa el profesor cuando se está desarrollando profesionalmente. Es claro que el profesor, al desarrollarse profesionalmente, también pasa por otras experiencias vitales (relaciones con sus compañeros, entre otras), a las que van asociados, en particular, sus correspondientes procesos cognitivos, experiencias de las que no nos haremos eco por restricciones analíticas. Para analizar estos procesos acudimos a Sfard (1991). Sfard sostiene que las nociones abstractas (número o función, por ejemplo) pueden concebirse de dos formas fundamentalmente diferentes: *estructuralmente* –como objetos– y *operativamente* –como procesos. Estas dos concepciones se entremezclan en los procesos de aprendizaje y resolución de problemas de las mismas nociones. Por ejemplo, una concepción estructural de la noción de función podría ser «conjunto de pares ordenados», mientras que una concepción operativa sería «un proceso de cómputo» o «un método bien definido de pasar de un sistema a otro» (Skemp, 1971).

Sfard afirma que la adquisición de nociones matemáticas nuevas se inicia habitualmente por la concepción operativa, y que la transición desde las operaciones de cómputo hasta los objetos abstractos es un proceso difícil que se culmina en tres pasos: interiorización², condensación³ y cosificación (*reification*)⁴.

Es preciso aclarar que Sfard emplea el término concepción al referirse a las representaciones internas y asociaciones («el universo del saber humano», p. 3) que evoca un concepto, dejando este último término (sinónimo de noción) para una idea matemática expresada en su forma convenida («el universo formal del conocimiento ideal», p. 3).

Aunque no podemos identificar la naturaleza del conocimiento matemático con la del conocimiento profesional, ni podemos identificar el proceso de abstracción desde la concepción operativa a la concepción estructural de una noción matemática con el proceso de adquisición de conocimiento profesional o con el proceso de desarrollo profesional, ¿podremos encontrar alguna aplicación a las fases de interiorización, condensación y cosificación?, ¿será posible encontrar en el proceso de desarrollo profesional algún paralelismo con el proceso de abstracción que lleva del trabajo de bajo nivel (interiorización) hasta el de alto nivel (cosificación)?

Llinares (2002) introduce la noción de cosificación para explicar la construcción de significados por parte de estudiantes para profesor en el marco de un proceso de negociación de significados con sus pares, resaltando asimismo la importancia de la participación desde la perspectiva del aprendizaje situado, acudiendo a Wenger (1998). Y afirma: «El proceso de cosificación significa que los estudiantes para profesor convierten algunos aspectos de la práctica de la enseñanza de las matemáticas en un problema» (Llinares, 2002, p. 198).

Convertir en un problema es, de algún modo, conceptualizarlo y decidir abordarlo. Nuestro propósito, sin embargo, es aplicar las nociones de interiorización, condensación y cosificación de Sfard (1991), de modo diferenciado, al caso del desarrollo profesional de profesores, lo que luego particularizaremos en entornos colaborativos (Feldman, 1993).

Nos interesa, por tanto, la comprensión por parte del profesor de aspectos referidos al fenómeno de enseñanza-aprendizaje de la matemática, aspectos que permiten interpretar dicho fenómeno, en los que será un referente fundamental su conocimiento didáctico del contenido⁵. Cuando el profesor está realizando una actividad con los alumnos o cuando la está diseñando, pone en juego una serie de conocimientos y competencias con los que se encuentra más o menos familiarizado. Con vistas a su desarrollo profesional, el profesor necesita estar familiarizado con sus tareas cotidianas, efectuar una especie de clasificación de dichas tareas y luego conceptualizarlas para poder reflexionar sobre ellas. Por ejemplo, el profesor ha de familiarizarse con el diseño de ejercicios de sumas de fracciones, resolución de ecuaciones de primer grado, etc., luego necesita considerar que esos ejercicios cubren unos determinados objetivos de aprendizaje dependiendo de su forma y contenido, y finalmente habrá de abstraerse de los ejercicios concretos y razonar sobre tipos de ejercicios en relación con los objetivos⁶. De este modo, las discusiones con el profesor no se centrarán en los ejercicios concretos relacionados con un contenido específico y con unos determinados objetivos, sino en la coherencia y relación entre actividades, contenido y objetivos. Posteriormente, estas relaciones se convertirán en objeto de conocimiento y el profesor podrá operar sobre ellas, iniciando un nuevo proceso de interiorización, condensación y cosificación. Cada proceso supone un nivel mayor de abstracción y exige más implicación cognitiva.

No cabe aquí la diferenciación entre la concepción de la noción (en este caso la problemática profesional concreta) como proceso y como objeto, a la que las definiciones de Sfard hacen referencia. Ampliando las definiciones anteriores al caso del desarrollo profesional, la clave del paso de una fase a otra vendría dada por la madurez (entendida como complejización de la interpretación del fenómeno educativo, con incorporación de elementos que enriquecen el conocimiento profesional) con la que se comprende la problemática en cuestión. Así, como veremos en el ejemplo del apartado tres, la fase de interiorización se caracterizaría por la familiarización con la problemática, previsiblemente a partir del análisis de situaciones cercanas. Es cuando empiezan a movilizarse las ideas sobre algo que no parece funcionar o que puede ser mejorable.

Puede que vaya acompañado de algunas soluciones concretas (a esas situaciones particulares, sin que se dé una generalización a la problemática general ni se perciban las dimensiones de la problemática), llevadas a la práctica o no. La fase de condensación implica desligarse de las situaciones particulares y percibir esa problemática como algo general, lo que supone introducir una nueva variable en la comprensión de situaciones de la práctica. Esto se puede manifestar no sólo cuando se piensa sobre la práctica previamente (durante su planificación) o *a posteriori*, sino también durante su gestión y en la toma de decisiones en la acción. La fase de cosificación añadiría a lo anterior comprender la problemática con su complejidad (en el nivel relativo en que se encuentre el profesor, no cabe pensar en una comprensión «absoluta»), con sus relaciones y sus derivaciones.

Podemos imaginar, por tanto, al profesor moviéndose en una especie de hélice de desarrollo profesional. De este modo, en los contextos formativos, el papel del formador es proporcionar al profesor entornos de aprendizaje que le ayuden a progresar en esa hélice. El contenido de dicha hélice ha sido muy estudiado y en él se sitúan desde las actividades cotidianas del profesor hasta el conocimiento profesional, donde podemos incluir el conocimiento de la materia (desde la perspectiva de la enseñanza), el conocimiento didáctico del contenido, el conocimiento del currículo matemático, el conocimiento psicopedagógico general y el conocimiento del contexto escolar. También podemos situar en él las concepciones, actitudes y capacidades.

Simplificando, podríamos afirmar que el contenido de la hélice es el conocimiento profesional en sus diversas manifestaciones (entendido de manera amplia como la comprensión de la práctica profesional –también entendida la práctica de manera extensa, incluyendo, además de lo que acontece en el aula, la manera de pensar la profesión y la enseñanza de la materia; por ejemplo, qué debo hacer y saber como profesional). Este conocimiento profesional se manifiesta en parte y se despliega en las situaciones relacionadas directamente con el aula (incluyendo las propias situaciones de aula y su planificación y memorización). La hélice posee también una orientación, que está definida por las tres fases de interiorización, condensación y cosificación. Finalmente, la hélice tiene una determinada forma, que viene dada por la reflexión. La reflexión sería a la vez contenido y generatriz de la hélice. Contenido en cuanto la incluimos en el conocimiento profesional, tomando como referente la práctica reflexiva; generatriz en cuanto es el medio a través del cual se crea la hélice. Si comparamos la hélice con un tejido, la reflexión ocuparía el papel de su urdimbre, o estructura, que posibilita su creación al servir de sustento a la trama (los hilos que entrelazados con la urdimbre forman una tela). La reflexión permite avanzar en las tres fases referidas y a su vez queda como poso en el contenido del conocimiento profesional.

Nuestra conjetura es que el modelo helicoidal continuo conjuga el contenido del desarrollo profesional, su determinante vinculación con la reflexión y su proceso. Esto permite orientar (no determinar) los procesos formativos independientemente de las «parcelas» de conocimiento profesional que se estén abordando en cada momento.

Esto es coherente con la caracterización de desarrollo profesional de Climent y Carrillo (2003) y Climent (2005), que se fundamenta en las ideas de práctica reflexiva y adaptativa de Cooney (1998), práctica reflexiva de Jaworski (1998) y comprensión de la práctica de Krainer (1994): «De ahí que nuestro punto de partida respecto del desarrollo profesional del maestro [...] tome como referente la comprensión de la práctica. Asociamos este desarrollo a una toma en consideración progresiva de la complejidad de dicha práctica y del aprendizaje de los alumnos, y el análisis de dicha práctica y la actuación considerando cada vez más elementos y adaptándola al aprendizaje de los alumnos concretos. Sería para nosotros un proceso de aprendizaje continuo como profesional reflexivo y crítico de su práctica» (pp. 119, 120).

Obsérvese que se trata de un modelo que permite analizar el desarrollo profesional desde un punto de vista cognitivo. Es este punto de vista lo que relaciona este modelo con los de Artzt y Armour-Thomas (1999) y Schoenfeld (2000). El modelo de Artzt y Armour-Thomas incluye fases (iniciación, desarrollo y cierre) y dimensiones (tareas, entorno de aprendizaje y discurso) de la lección. Este modelo pretende servir para analizar la práctica instruccional de los profesores y ser una guía que les permita reflexionar sobre su práctica y sobre sus cogniciones subyacentes de un modo amplio y estructurado. El análisis de fases y dimensiones se realiza desde la concepción de la enseñanza orientada a la comprensión porque, entre otras razones, una de las metas de la instrucción es promover un aprendizaje del alumno con comprensión (Artzt y Armour-Thomas, 1999, p. 213).

El modelo de Schoenfeld (2000), por su parte, permite caracterizar la práctica del profesor en función de sus decisiones y acciones. Posibilita el análisis detallado de, por un lado, creencias, objetivos y conocimientos activados en la enseñanza, y por otro lado, de las acciones implementadas por el profesor, en relación con la activación prioritaria de las cogniciones mencionadas. Este análisis se efectúa tomando como base la división de la lección en episodios y subepisodios que se corresponden con la activación de algún objetivo.

Sin embargo, aunque compartiendo la orientación cognitiva, el modelo que presentamos no está centrado en el análisis de la instrucción, sino que dicho análisis puede ser una herramienta más a tener en cuenta. Sí comparte el foco de la reflexión, pero, mientras el modelo de Artzt y Armour-Thomas pretende servir para que el profesor reflexione, en nuestro modelo la reflexión forma parte de su contenido.

Una vez presentado el modelo de desarrollo profesional, en la siguiente sección nos disponemos a presentar el contexto en el que vamos a aplicarlo. Se trata de un contexto colaborativo, similar al que propone Tzur (2001), en cuanto a la existencia del grupo, a la participación de los componentes y a la reflexión sobre cuestiones o actividades de interés para éstos. No obstante, Tzur expone esto en relación con un contexto distinto al nuestro: su modelo de cuatro focos de formación del profesor, donde distingue Aprender matemáticas, Aprender a enseñar matemáticas, Aprender a formar a profesores y Aprender a asesorar a

formadores. En este modelo el desarrollo consiste en hacer que las actividades de un nivel inferior se conviertan en el foco de la reflexión. Veremos reflejados algunos de estos focos en el triángulo de desarrollo profesional del siguiente epígrafe. También nuestro modelo presenta semejanzas con el de Zaslavsky y Leikin (1999) en tanto el grupo está constituido por profesores y formadores, pero, a diferencia de su modelo, el nuestro no se orienta a la formación de formadores. Más aún, la participación de los formadores en nuestro contexto resalta sobre todo su faceta de investigadores, no la de formadores de los profesores participantes. Compartimos con Zaslavsky y Leikin el interés por convertir los problemas de la enseñanza propios de los profesores de matemáticas en asuntos de interés de todos los miembros del grupo, tomándolos, de este modo, como objeto de la reflexión individual y colectiva.

novel. Se realizan reuniones quincenales y en la semana intermedia se efectúan tareas acordadas (como lecturas o reflexiones individuales). En sus sesiones se discuten documentos y sesiones de aula de las propias maestras (previamente presenciadas por todos los miembros del grupo y grabadas en vídeo), se elaboran diseños para el aula y se analiza material educativo, entre otras actividades.

Haremos uso del triángulo educativo para describir la actividad de este entorno, basándonos en Sztajn y Nipper (2005).

El triángulo educativo está determinado por tres vértices: profesor, alumnos y contenido (Fig. 1).

DESCRIPCIÓN DEL ENTORNO COLABORATIVO DE DESARROLLO PROFESIONAL

En el estudio y promoción del desarrollo profesional los entornos colaborativos (profesores e investigadores) se han mostrado especialmente adecuados. Climent (2005), y Climent y Carrillo (2003) ponen de manifiesto, desde la perspectiva de los investigadores, la posibilidad de analizar el desarrollo profesional (en torno a la reflexión sobre la práctica) de maestras participantes en un proyecto de investigación colaborativa (PIC); y desde la perspectiva de la formación, cómo dicho entorno favorece la reflexión del profesor sobre su práctica.

El PIC se viene desarrollando desde el año 1999 y está integrado por dos maestras expertas, una maestra novel (Julia), dos investigadores expertos y una investigadora

Este triángulo, que cabe considerar como caso particular de uno en el que los vértices son organizador, participantes y contenido, posee diversas expansiones, de tal modo que podemos diseñar triángulos que representen el contexto de desarrollo profesional. Comencemos presentando la extensión del triángulo educativo al desarrollo profesional asociado al PIC (Fig. 2).

Figura 1
TE: triángulo educativo

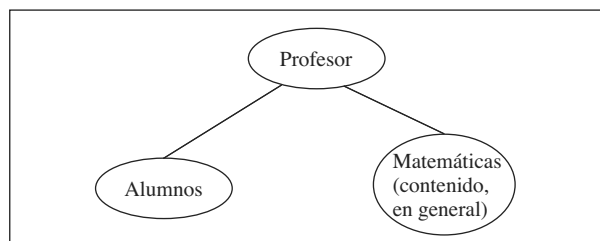
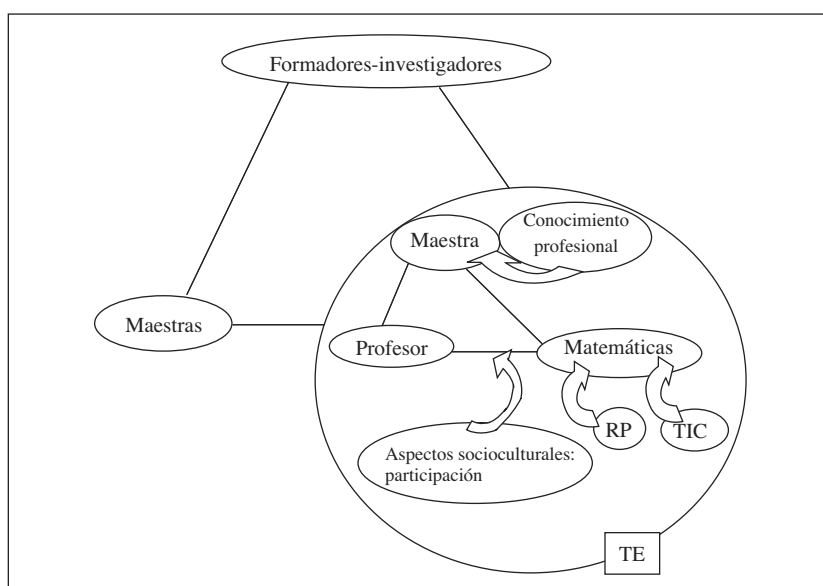


Figura 2
TDP (PIC)



Dentro de este triángulo se desarrolla la actividad del PIC, donde se presta especial atención a la toma de conciencia y reflexión sobre las concepciones de los participantes (las maestras), sobre su conocimiento didáctico del contenido referido a distintos contenidos matemáticos escolares, su visión sobre la resolución de problemas como dinamizador del aprendizaje de sus alumnos, el empleo reflexivo de las tecnologías de la información y la comunicación como herramientas de enseñanza y el fomento equitativo de la participación de los alumnos en las tareas matemáticas, entre otros aspectos del conocimiento profesional. Todo esto se organiza en un ambiente de colaboración donde el debate y la reflexión ocupan un papel destacado.

La tabla 1 ejemplifica las diferentes preguntas que proceden de centrar la atención en un vértice determinado del triángulo educativo anterior, tomando como referencia a nuestra maestra Julia, con el fin de poner de relieve cómo el contexto del PIC ha favorecido su desarrollo. Hemos de matizar que son igualmente válidas para cualquiera de las maestras, pues no debemos olvidar que se trata de un contexto colaborativo en el que existen objetivos comunes, como es la formación de las maestras y, en este sentido, todos somos y nos sentimos responsables aunque asumamos diversos roles en el grupo.

La cuestión ahora es si el desarrollo profesional que se ha propiciado en el PIC puede interpretarse desde el modelo helicoidal continuo presentado (y esquematizado en la figura del anexo).

EL DESARROLLO PROFESIONAL DE JULIA SEGÚN EL MODELO HELICOIDAL CONTINUO: EL APRENDIZAJE COMO REFERENTE DE LA ENSEÑANZA

En la actualidad estamos desarrollando un estudio en el que pretendemos mejorar nuestra comprensión sobre cómo se produce el desarrollo profesional (respecto de la enseñanza de las matemáticas) de la maestra novel, Julia, participante en el PIC. Ésta mostró mucho interés por formar parte del proyecto, considerando que se trataba de una oportunidad para seguir formándose con otros profesionales. Hemos recogido información durante los cursos 2002/2003 y 2003/2004, en los que Julia ejerció por primera vez como tutora de un grupo de alumnos (primero de primaria, en ambos casos). Puesto que abordamos un tema de gran complejidad, hemos utilizado una gran variedad de técnicas de recogida de información en los dos contextos donde Julia se desarrolla: su clase y el PIC. Entre estos instrumentos podemos destacar los diarios de clase, las entrevistas, las grabaciones de aula y las grabaciones de las sesiones del PIC.

En coherencia con un enfoque interpretativo y adoptando un diseño de investigación basado en el estudio de caso (Stake, 1998) nos hemos enfrentado al análisis de la información, combinando las técnicas de análisis de contenido (Bardin, 1986) con el método de comparación constante de la Grounded Theory (Strauss y Corbin, 1998).

Tabla 1
Preguntas asociadas a cada centro de atención del triángulo educativo del PIC.

<p>Centro de atención: formadores-investigadores</p>	<p>¿Qué estrategias se podrían utilizar para favorecer que las maestras reflexionaran sobre su práctica y pudieran tener otros elementos de valoración y juicios diferentes? (Particularizado en Julia) Los formadores-investigadores proponen favorecer la reflexión de Julia a través de la observación y análisis de su propia práctica y de la práctica de las otras maestras. Debido al carácter colaborativo del entorno formativo, las maestras participan en el diseño y desarrollo de las actividades correspondientes. Para tal fin, se graba una sesión de Julia y, después del visionado, se expresan los aspectos más llamativos y se formulan preguntas encaminadas a que Julia reflexione sobre las motivaciones de ciertas decisiones.</p>
<p>Centro de atención: las maestras</p>	<p>¿Qué papel y/o acciones demandan las maestras a los formadores-investigadores al objeto de mejorar su capacidad para resolver problemas del aula (inmersos en el TE)? (Particularizado en Julia) Las maestras, y en particular Julia, esperan que los formadores-investigadores les aporten explicaciones bien fundamentadas de la complejidad de los fenómenos del aula. Debido al carácter colaborativo del grupo, fue posible que una de las maestras actuara, respecto a Julia, al mismo nivel que los formadores-investigadores. Durante las reuniones del grupo observamos que Julia desarrolló una relación especial con esta maestra experta: Inés. Durante las primeras reuniones, Julia comenzó a valorar muy positivamente sus opiniones y esto le permitió, posteriormente, recibir con agrado las críticas y sugerencias que Inés realizaba sobre su práctica porque estaban justificadas y reflejaban una perspectiva de la enseñanza que ella compartía.</p>
<p>Centro de atención: el triángulo educativo (TE)</p>	<p>¿Cómo podríamos abordar en el PIC los problemas de comprensión de los alumnos sobre el contenido de la descomposición de números? Una preocupación común de los miembros del PIC es la mejora de los procesos de E/A, en general, y del aprendizaje por parte de los alumnos de la descomposición de números, en particular. Se trata de un contenido en el que las maestras necesitaban profundizar, porque lo consideraban fundamental dado que se trabaja desde el primer curso de primaria. Para tal fin, cada miembro diseñó actividades, que fueron sometidas a un análisis didáctico. Finalmente, se seleccionaron cuatro de ellas en una propuesta didáctica específica acompañada de unas orientaciones para la maestra.</p>

Debido al carácter complejo y general de todo desarrollo, nos centraremos en un aspecto de su práctica (la planificación) y describiremos cómo evoluciona, debido en gran parte a la reflexión individual y a la grupal en el contexto del PIC, poniendo de manifiesto la función principal que ha tenido la reflexión como moldeadora de su desarrollo profesional. Lo que aquí presentaremos es una interpretación de los resultados del análisis de los datos, desde el punto de vista del modelo teórico antes descrito. Este modelo surge principalmente de la teoría, concretándose y mostrando sus posibilidades al aplicarlo para explicar el desarrollo profesional estudiado en Julia.

Nos pareció muy significativo cómo, en un principio, Julia concebía la planificación diaria como una selección de actividades previas y complementarias orientadas a ofrecer unas instrucciones claras y precisas para que los alumnos resolvieran correctamente las actividades de las fichas. El referente eran, pues, las actividades del libro de texto y no el aprendizaje del alumno. Posteriormente, mediante la reflexión conjunta en una sesión del PIC en la que se analiza uno de sus vídeos, Julia comienza a tomar conciencia de cuál es su postura hacia el libro de texto y a reconocer la importancia de considerar los objetivos y contenidos como auténticos referentes de la planificación. Este reconocimiento le lleva, en un segundo momento, a realizar una propuesta de enseñanza más coherente con una perspectiva que prioriza el aprendizaje del alumno, plasmada tanto en una planificación que recoge las sugerencias e informaciones vertidas en el PIC, como en su capacidad para controlar en qué medida los alumnos van realizando una asimilación comprensiva del contenido implicado. Teniendo en cuenta este proceso, prevemos el posible avance en su desarrollo profesional, considerando las características y limitaciones personales y contextuales. Un avance definido por un incremento de autonomía respecto del libro de texto y de responsabilidad hacia el aprendizaje del alumno y apoyado en un análisis didáctico de las actividades y en un mayor conocimiento profesional que se va enriqueciendo gracias a su reflexión individual y grupal en el PIC. Describamos, pues, este proceso a través del cual Julia comienza a concebir la planificación como una respuesta concreta y adaptada a los objetivos y contenidos pretendidos, que prioriza el aprendizaje de los alumnos como principal referente.

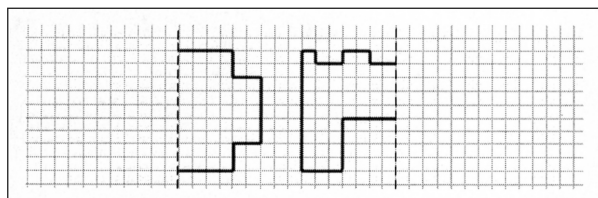
Interiorización

Antes de pasar al ejemplo concreto, caracterizaremos la enseñanza de Julia para facilitar la comprensión del proceso que pretendemos mostrar. Desde el principio, Julia adoptó el libro de texto como instrumento básico de su enseñanza: «*Yo lo que normalmente hago es el libro*» [S8: la octava sesión del PIC, donde se analiza la primera sesión de la segunda unidad didáctica grabada (29/01/03)], que era el mismo que adoptó durante el periodo de prácticas de su carrera. Julia realiza un seguimiento muy literal de este manual, debido en gran medida a su percepción de la presión de los padres sobre la necesidad de terminarlo durante el curso (como declara en S8).

Este hecho condiciona la planificación de su enseñanza, su implementación y su reflexión posterior en los diarios del profesor (Muñoz-Catalán, Carrillo y Climent, en prensa). En el caso de la planificación, su referente son las fichas del libro y las actividades de éstas. Su preocupación principal es ver cómo va a trabajar cada ficha y qué actividades de la guía del profesor (previas, de la página y complementarias) son más adecuadas para que los alumnos resuelvan correctamente y sin dificultades las actividades. Julia no parece plantearse objetivos y contenidos de aprendizaje o qué actividades son más potentes para el aprendizaje de un determinado contenido, ni tampoco la posibilidad de diseñar otras actividades diferentes que complementen el enfoque del libro de texto y superen sus limitaciones.

Todas estas características se ponen de manifiesto en una de las observaciones de aula [la primera sesión de la segunda unidad didáctica grabada (18/11/02)], donde el trabajo se realiza en torno a una ficha de geometría. Aparecen dos actividades; en la primera, orientada hacia los conceptos de *entero* y *mitad*, los alumnos han de rodear los alimentos que aparecen dibujados enteros y completar los otros con la mitad que les falta. En la segunda actividad, se plantea el concepto de *figura simétrica* mediante dos figuras dibujadas sobre cuadrícula que hay que completar con su mitad simétrica, como se ilustra en el ejemplo siguiente:

Figura 3
Actividad de figuras simétricas sobre cuadrícula.



En el análisis de la sesión, observamos que Julia aborda esta segunda actividad enfatizando los aspectos procedimentales frente a los conceptuales. En la unidad didáctica anterior realizaron una actividad sobre cuadrícula («la actividad del castillo», en la que se trabajaban los conceptos de *derecha/izquierda/arriba/abajo*) que presentó grandes dificultades para los alumnos. En la actividad de la figura 3, anticipando estas dificultades, Julia pone mucho empeño en que estén atentos mientras explica qué es una figura simétrica. En esta explicación enfatiza que las dos mitades han de ser iguales (sin hacer referencia a que son mitades simétricas) debido, en gran medida, a que en la primera actividad de la misma ficha los alumnos tenían la tendencia a completar la otra mitad de los alimentos con un tamaño muy inferior al que venía dado (se trataba pues de resaltar la igualdad en el tamaño de ambas mitades):

«Una figura simétrica es una figura que tiene dos mitades y que las dos mitades son iguales [...] Figura simétrica quiere decir que si se dobla por la mitad coinciden; queda en una mitad una parte y en la otra mitad

la otra y las dos partes son exactamente iguales [...]. Entonces una figura simétrica es la que tiene dos partes iguales, tiene dos mitades iguales» [Gb7: primera sesión de la segunda unidad didáctica grabada (18/11/02)].

A continuación se dirige a la pizarra y, mediante un ejemplo similar al del libro, explica cómo se hacen figuras simétricas, cómo deben contar los cuadrados, poniendo especial hincapié en el cambio de sentido:

Julia: Tenemos aquí una figura hecha y una línea roja. La línea roja quiere decir que aquí está la mitad. Tenemos que hacer al otro ladito una mitad exactamente igual. [...] Voy a explicar cómo lo tenéis que hacer para que lo hagáis bien. Pues yo cuento, aquí está puesto a la derecha: uno, dos, tres, cuatro y cinco cuadritos, pues entonces tendré que hacer para la izquierda cuántos cuadritos. [...] Os tenéis que imaginar que podéis doblar la pizarra en dos y tienen que coincidir. Entonces, si aquí está hacia fuera de la raya roja, aquí lo tengo que hacer hacia fuera de la raya roja, hacia la izquierda. Si aquí está hacia la derecha aquí lo tengo que hacer hacia la izquierda. [Una vez que termina de hacer el ejemplo] Y ya he terminado una figura simétrica. Cuando yo esto, si yo lo pudiera doblar [...] en dos partes se quedarían las dos partes exactamente iguales [Gb7].

Aunque en una ocasión Julia indica que al doblar esta figura por el eje de simetría ambas mitades coinciden, su intervención subraya la igualdad de ambas mitades, hecho que puede llevar a los alumnos a una construcción errónea del concepto.

En su diario de esta sesión no existe ninguna referencia a aspectos relacionados con los conceptos puestos en juego. Su reflexión posterior gira en torno a una actividad que se originó al principio de la sesión cuando preguntó qué era un rectángulo e intentó que proporcionaran una definición matemática (en realidad recrea una actividad llevada a cabo en una asignatura de su carrera cuyo objetivo era reconstruir el concepto de *rectángulo*). Parece que Julia se encuentra satisfecha por cómo se ha desarrollado el trabajo de la ficha, al no haber destacado dificultades concretas, y con la asimilación de los conceptos por parte de los alumnos.

La reflexión grupal que se realizó en una de las reuniones del PIC (S8), en torno al visionado y posterior análisis del vídeo de esa sesión, aportó a Julia nuevos elementos sobre los que reflexionar. En esa reunión, cada uno destacaba aquellos aspectos que le habían sugerido algún tipo de duda o que le habían llamado la atención para compartirlo con Julia y poder comprender las razones de sus decisiones en el contexto de la clase.

Julia consideró que los conceptos de *entero*, *mitad* y *figura simétrica* habían quedado claros, gracias a la definición que ella les proporcionó: «*explico lo que tiene una figura simétrica, las dos partes iguales y con esta raya y lo que está a este lado ahora se pone en el otro y creo que eso lo tienen los niños claro*» [S8 (29/01/03)], aunque reconoce la dificultad que ha supuesto la segunda actividad: «*ahora, que lo de hacerlo en cuadrícula, no quedó muy claro del todo*». Cuando se le preguntó si era consciente de si los objetivos y contenidos que ella se planteaba podían abordarse con las actividades seleccionadas,

su respuesta fue un tanto vaga e hizo referencia a que sus alumnos la habían resuelto mejor que alumnos de años anteriores y que ya ella era consciente de las dificultades que podían surgir, según el modo en que se desarrolló la actividad del castillo, descrita anteriormente: «*Hay otras actividades, como una que hicimos de un castillo, cercana a ésta, y fue un fracaso*» [Gb7]. Cuando uno de los investigadores le preguntó para qué se hacía la segunda actividad, reconoció abiertamente que «*lo de los cuadritos es por terminar el libro*» [Gb7].

Julia trabaja todas las actividades del libro, pues está convencida de que siempre se aprende algo. Aunque no suele plantearse si tiene sentido centrarse en una determinada actividad, cuando identifica fichas que no son relevantes opta por realizarlas más rápidamente puesto que cree que sus contenidos se vuelven a abordar a lo largo del curso:

Investigador 2 (I2): ¿Tú nunca dejas cosas sin hacer? ¿Nada, nada?

Julia: No, no [...] lo que sí intento, en lo que creo que va a ser menos productivo, pues dedico menos tiempo, menos o prácticamente nada. [...] Es que es una cosa que la vamos a seguir dando, por eso tampoco digo: ¡uff! Como esto no lo hagan bien o no sepan hacer lo de la cuadrícula [...] Que a mí, en ese sentido, no me entra esa responsabilidad y ese agobio de decir: depende de este momento, de esta planificación en concreto, que el niño se entere, o se atasque o se deprima [S8].

A raíz de ello se debate en el grupo acerca de si, en otra ocasión, los objetivos de aprendizaje deben fundamentarse en la realización de la actividad –como hace Julia–, o en el aprendizaje del alumno. Esta última opción conllevaría el cuestionamiento constante de la propuesta del libro de texto.

Por otro lado, hay que hacer referencia a la asociación incorrecta entre mitad y simetría, que Julia favorece en sus intervenciones. Se le sugiere que sería adecuado proponer diversos ejemplos de mitades que no sean simétricas para evitar que asocien ambos conceptos. Además, una de las maestras expertas, Inés, añade que para los alumnos de estas edades resulta fundamental trabajar estos conceptos de manera intuitiva y expone una actividad que considera útil para este fin (usando la copia de una figura hecha con pintura en la otra mitad de un papel doblado).

Hemos denominado a esta fase de interiorización, porque en ella, la intervención directa de los miembros del grupo (en el contexto del PIC) en el análisis de una sesión de aula de Julia le ha ayudado a reflexionar sobre cuestiones y decisiones de su práctica que hasta ahora no había considerado. Le ha permitido tomar conciencia del papel tan relevante que tiene el libro de texto en la planificación de su enseñanza y de cómo en ésta pone un mayor énfasis en la comprensión y realización de las actividades que en el aprendizaje del contenido. En este sentido, mediante los ejemplos que se propusieron en el PIC, Julia advirtió que entre la diversidad de actividades posibles existen algunas que son especialmente potentes para el aprendizaje porque favorecen que los alumnos asimilen el contenido de una manera intuitiva, lo que les ayudará a seguir construyendo correctamente en el futuro.

Condensación

En el curso siguiente, Julia continúa con el mismo libro de texto y trabaja de nuevo la ficha de geometría descrita en el apartado anterior. En la entrevista que realizamos a modo de imagen previa de la lección (26/11/03), percibimos cómo Julia mostraba una mayor preocupación hacia el contenido matemático que se ponía en juego. De hecho, en la descripción de la dinámica de trabajo que planteaba llevar a cabo ni siquiera se detenía en la actividad sobre las figuras simétricas, ni utilizaba palabras específicas para referirse a ella (como por ejemplo, la cuadrícula sobre la que están impresas las figuras como hizo el año anterior):

Julia: Para lo de simetría, con una de las dos mitades volver a doblar por la mitad, y repasar con una cera por el doblez y hacer lo de la pintura [se ríe]. [...] Cogier pintura, pintar en una mitad solamente, pegar y ver que sale igual, a la misma distancia derecha e izquierda, que coinciden y eso, para que puedan luego rellenar eso. [En5: Entrevista previa a la grabación de aula]

Por el contrario, ahora hace referencias constantes a la actividad previa que va a plantear, destacando el potencial que tiene para ayudar a los alumnos a superar la dificultad habitual que presentan con este contenido y asimilar el concepto.

«Eso ha pasado otra vez, que algunas veces el concepto de *simetría* lo dejan en que tienen que ser igual, pero no saben que tiene que equidistar del eje de simetría, ese paso ya es más complicado [...] yo espero que con el dibujo lo vean un poco más claro cuando lo hagan» [En5].

Esta preocupación también se pone de manifiesto cuando se le pregunta por los objetivos mínimos; Julia manifiesta sentirse satisfecha si al final los alumnos han aprendido perfectamente los conceptos de *entero* y *mitad*, pero considera que es suficiente con que se familiaricen con el de figura simétrica: «*que conozcan entero y mitad y lo de simetría un poco; que se aproximen un poquito al concepto solamente*» [En5].

Tanto la actividad previa a la que Julia se refiere, como las dificultades de los alumnos son aspectos que surgieron durante el análisis conjunto del vídeo de Julia, en el contexto del PIC. Podría argüirse que Julia se ha limitado a recuperar aquella información que reconoció como clave y la ha expresado en sus manifestaciones durante la entrevista, aunque con ciertos matices. Sin embargo, la importancia que ella le otorga al aprendizaje de los alumnos frente a la mera realización de la actividad no sólo se manifiesta en la fase previa de planificación, sino también en las decisiones que toma durante la clase, como describimos a continuación.

En la observación de la sesión correspondiente (26/11/03) se percibe que la dinámica de trabajo es mucho más pausada, no pone tanto énfasis en que presten atención y se recrea durante más tiempo en cada fase y respuesta de los alumnos. De hecho, la sesión tiene una duración de una hora y media, frente a la media hora del curso anterior, pues, como ella misma afirma, se trataba de completar la ficha como fuera:

«El año pasado fue distinto porque recuerdo que después de haber explicado lo del rectángulo y eso y ya estaban cansados; estaban cansados ellos, estaba cansada yo y entonces ya era por terminar» [En6: entrevista posterior a la grabación de aula].

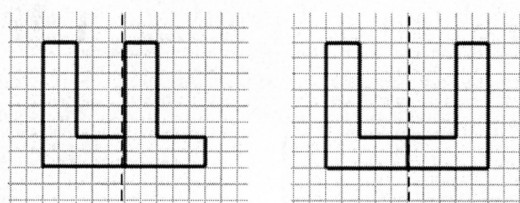
La sesión transcurre con la secuencia que había descrito. Una vez que los alumnos realizan la actividad previa con la pintura de mano, Julia hace un resumen de lo que ha ocurrido poniendo especial hincapié en la coincidencia entre ambas figuras o mitades simétricas, como el ejemplo de una de sus alumnas, con el que ella realiza la explicación:

«Hemos dibujado una mitad del folio, hemos pegado, hemos hecho coincidir esta mitad [...] con la mitad que estaba en blanco, hemos estrujado y ahora al abrir nos salen dos dibujos iguales. Mirad, si vamos abriendo despacito, despacito [...], mirad aquí ahora, veo que coincide perfectamente este poquito de pintura con este poquito, aquí hay un trozo hacia abajo, pues un trozo hacia abajo; un trozo más gordito, un trozo más gordito; ¿veis? [...] La puerta con la puerta y la ventana con la ventana. Hacedlo cada uno con el vuestro y mirad que al abrir coincide» [Gb27: observación de aula del 26/11/03].

Una vez que Julia define figura simétrica y eje de simetría, les dice que realicen la segunda actividad del libro (la de la cuadrícula) sin ninguna explicación previa, confiando en que la asimilación intuitiva de los conceptos les lleve fácilmente a la obtención de figuras simétricas sobre cuadrícula; no obstante, cuando pasa por las mesas y observa las grandes dificultades de los alumnos, detiene la actividad. Como Julia afirma en la entrevista posterior, algunos no realizaron correctamente el cómputo de cuadros, y la mayoría confundió «*simetría con mitad, entonces empezaban a hacer la mitad exactamente igual*» [En6].

Julia improvisa dos ejemplos en la pizarra, cada uno con una finalidad diferente. El primero era similar a los del libro y pretendía servir de modelo sobre cómo realizar la simetría sobre cuadrícula; el segundo fue mucho más significativo, porque pretendía establecer una diferencia clara entre figuras iguales y simétricas:

Figura 4
Ejemplos de figuras iguales y simétricas.



Este segundo ejemplo fue improvisado al observar que los alumnos no prestaban atención al primero y comprendía que esta figura iba a ser más clarificadora. En la entrevista previa, Julia no hizo referencia alguna a la posibilidad de ofrecer ejemplos de este tipo, puesto que pensaba que si perduraban las dificultades acudirían a los trabajos realizados durante la actividad anterior de la pintura.

«Si hay alguna dificultad pues volver a mirar los dibujos, hacerles caer en la cuenta de que [...] no es que sean iguales sino [...] que tiene que haber la misma distancia del eje hacia fuera del eje. Algo así» [En5: Entrevista previa a la grabación de aula].

En este sentido creemos que este episodio puede ser considerado como representativo de la fase de condensación, porque es la dificultad de los alumnos con el concepto de *figura simétrica* la que le impulsa a detener la actividad y proponer un contraejemplo más significativo. No interesa sólo hacer la actividad, sino la actividad como medio de construir el concepto (tanto en la fase de planificación, como durante la puesta en práctica de la ficha).

Cosificación

En el periodo de dos cursos académicos en el que recogimos la información, no tenemos evidencias de que Julia llegara a la cosificación del aspecto de la enseñanza que estamos describiendo (la consideración del aprendizaje de los alumnos como referente principal de la enseñanza). Nos preguntamos, entonces, cómo podría caracterizarse el avance hacia el último nivel de este ciclo de desarrollo profesional. Podríamos esperar que la creciente preocupación que había mostrado por el aprendizaje de los alumnos influyera en su planificación de forma que, en ésta, Julia tomara como referente los objetivos de aprendizaje y no las actividades que plantea el libro de texto. Este cambio de referente le llevaría a una postura más crítica hacia el libro de texto, el cual se convertiría en un recurso o apoyo didáctico más del que extraer actividades adecuadas para los objetivos pretendidos. No obstante, hay que tener en cuenta que el cambio no puede considerarse en sentido abstracto, sino desde las características de Julia, su ritmo de desarrollo y sus principios y consideraciones, así como desde las restricciones del contexto.

Como ya indicamos, Julia se siente obligada a completar el libro de texto. Esto condiciona tanto su enseñanza como su propio desarrollo profesional, por lo que no puede pasar inadvertido en una hipotética trayectoria de desarrollo profesional.

Tampoco puede pasar inadvertida su participación en el PIC, que actúa en sentido contrario al anterior, es decir, en lugar de limitar el proceso de desarrollo, lo promueve. La importancia otorgada a los objetivos y contenidos de enseñanza era una constante en cualquier actividad que se emprendía en el PIC, ya fuera reflexionando sobre la práctica de Julia o de las otras maestras, o bien cuando nos enfrentábamos a la realización conjunta de propuestas didácticas concretas. Este hecho favoreció su toma en consideración de la necesidad de centrarse más en el propio aprendizaje de los alumnos.

En este sentido, Julia se debate entre, por un lado, la necesidad de continuar con su libro de texto y la seguridad que éste le ofrece y, por otro, el reconocimiento de la importancia de considerar como referente de su enseñanza el aprendizaje de los alumnos. Utilizamos

el verbo *debatir* porque este cambio supone una mayor responsabilidad de Julia hacia su enseñanza y un mayor conocimiento sobre el propio contenido matemático, sobre el potencial de diversos recursos didácticos y sobre los errores más frecuentes de los alumnos, entre otros. El libro de texto era su apoyo porque confiaba en que la realización de todas sus fichas garantizaría el aprendizaje de todos los objetivos y contenidos de la etapa de primaria; en el ejercicio de esta nueva responsabilidad, Julia encuentra el apoyo necesario para el desarrollo de su enseñanza en el PIC, al disponer de actividades fundamentadas y poder compartir un análisis más profundo del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Con estos antecedentes pensamos que en la fase de cosificación, la planificación de Julia podría caracterizarse por un análisis crítico del libro de texto, en el que se plantearían los objetivos y los contenidos que se ponen en juego en cada actividad, desde los cuales valoraría la adecuación y potencial de las actividades para el aprendizaje de los alumnos, identificaría sus limitaciones, y realizaría propuestas conforme a ello.

Se trataría de una postura más crítica hacia la propuesta del libro de texto, aunque pudiera estar condicionada por él y la planificación se fundamentaría en el análisis didáctico de los contenidos de enseñanza que Julia realizaría personalmente. Desde esta perspectiva, su planificación no estaría tan apoyada en propuestas y sugerencias de otros sino en las propias conclusiones derivadas de su reflexión individual. Esta fase, por tanto, supondría un incremento de responsabilidad y autonomía en su enseñanza. Su progreso consistiría en un incremento de su propia autoridad, frente a una autoridad externa (libro de texto, PIC) (Cooney, 1998).

REFLEXIONES FINALES

En nuestra ejemplificación, cada una de las fases descritas viene definida por un *avance* cognitivo y/o en la actuación de Julia. Así, la fase de interiorización supone que se movilice la idea de que la consecución de los objetivos y contenidos de aprendizaje ha de ser el principal criterio que oriente tanto la planificación como la puesta en práctica de lo diseñado. La de condensación supone considerar el aprendizaje de los alumnos como principal variable para analizar lo que sucede en el aula. Esto se refleja en la toma de decisiones en la acción (por ejemplo, cuando detiene la actividad y propone dos ejemplos con un gran potencial para la asimilación intuitiva del concepto). En este caso el progreso cognitivo no está tan desligado de la acción como en la fase anterior; es un conocimiento en la acción (Schön, 1983 y 1987). En la fase de cosificación, ya desde la planificación se tomaría el referente de los objetivos de aprendizaje respecto del contenido matemático y las dificultades que los alumnos puedan presentar, analizando didácticamente posibles propuestas didácticas establecidas externamente. En este caso también se trataría de una cognición en acción. De ahí la necesidad de pensar en un conocimiento profesional integrado, no sólo declarativo, que también incluye

un conocimiento práctico, que se manifiesta y refiere a la acción profesional. De este modo, una perspectiva más madura de una problemática profesional (lo que supone un progreso respecto de las tres fases consideradas) supone su mayor consideración como un elemento o variable para tomar decisiones en la práctica profesional. Esto es, que ese nuevo modo de comprender la práctica y actuar en ella integren el conocimiento profesional del profesor.

Hemos descrito cómo Julia ha cosificado un aspecto de su práctica (concebir la planificación como una respuesta adaptada al aprendizaje de los alumnos, en función de los objetivos y contenidos de enseñanza y no como un mero seguimiento de una propuesta exterior ya dada). En este proceso, el contexto del PIC ha tenido un papel muy importante, revelándose como un espacio idóneo para compartir con otros compañeros las inquietudes profesionales; un espacio que ha permitido promover y enriquecer la reflexión sobre su práctica, ayudándole a considerar otras variables en la planificación de su enseñanza. De hecho éste es el aspecto que Julia resalta de su participación en el grupo:

«Lo primero que me gustaría destacar es que mi práctica habitual también ha cambiado mucho, creo yo, desde que empezó el curso hasta ahora, debido a las reflexiones que hemos hecho en el grupo y a las que yo he ido haciendo cada día» [Diario de Julia, finales del primer año].

Por otro lado, en el proceso de desarrollo profesional que hemos descrito no sólo se observa un desplazamiento del referente en la planificación desde las actividades del libro de texto al aprendizaje de los alumnos, sino que implica un enriquecimiento de su conocimiento didáctico del contenido a la hora de realizar el análisis didáctico necesario. Dicho enriquecimiento, que se potencia en la participación en un entorno de discusión de problemáticas profesionales como el PIC, resulta imprescindible para que se lleve a cabo la cosificación; o quizás permita llegar a bucles más avanzados de la hélice de desarrollo profesional.

Hemos puesto de relieve cómo el contexto del PIC ha impulsado el desarrollo profesional de Julia mediante la reflexión sobre su propia práctica. Para describir el PIC ha sido útil emplear modelos de triángulos de desarrollo profesional, tomando como vértices los formadores-investigadores, las maestras y el triángulo educativo, en el que cada maestra se encuentra inmersa en su práctica habitual. Cada vértice del triángulo nos ha permitido observar el contexto del proyecto desde ópticas diferentes y evocar un tipo específico de preguntas, cuyas respuestas conducen a una mejor comprensión del papel que tiene cada elemento del triángulo, así como de las preocupaciones individuales de los distintos miembros y las preocupaciones comunes del grupo.

El modelo helicoidal continuo que hemos presentado nos proporciona una perspectiva desde la cual interpretar y comprender el desarrollo profesional. En concreto, permi-

te conocer cómo va avanzando un determinado profesor respecto de la consideración de distintos aspectos en su interpretación de la enseñanza, con vistas a organizar propuestas formativas coherentes con los principios que fundamentan nuestro modelo y que, por tanto, promuevan un pensamiento reflexivo (Cooney, 2001), y se ajusten a dicho avance. En este modelo, la ubicación del profesor en una determinada fase, ya sea de interiorización, condensación o cosificación, se define en función del propio profesor, es decir, en función de sus características, principios y limitaciones. Es decir, no hacemos referencia a una hipotética trayectoria a seguir, en función de principios generales, porque no pretendemos hablar de profesores en sentido general, sino de profesores particulares, preocupados por su formación, a los que une la reflexión como la herramienta más potente de su desarrollo profesional.

NOTAS

¹ Carrillo y Climent son miembros del proyecto Multiculturalidad y Matemáticas: El profesor como mediador en la construcción de identidades y significados sociales, culturales y matemáticos (MUyMA). SEJ2004-02462/EDU Dir. Gral. de Investigación, Ministerio de Educación y Cultura; y del Grup de Recerca Consolidat de la Dir. Gral. de Recerca, Generalitat de Catalunya, Educació Matemàtica i Context Sociocultural (EMiCS).

² «Proceso llevado a cabo con objetos familiares [...] En la fase de interiorización el aprendiz se familiariza con los procesos que finalmente le llevarán a un nuevo concepto (como contar conduce a los números naturales, restar lleva a los negativos, o las operaciones algebraicas se convierten en funciones)» (p. 18).

³ «La idea de convertir este proceso en una entidad autónoma debería emerger [...] es un periodo de transformar largas secuencias de operaciones en unidades más manejables. En esta fase una persona se vuelve cada vez más capaz de pensar acerca de un proceso dado como un todo, sin sentir la necesidad de irse a los detalles» (p. 18 y 19).

⁴ «Los procesos efectuados sobre objetos abstractos ya aceptados se convierten en todos compactos, o cosificados [...] para devenir en un nuevo tipo de constructos estáticos auto-contenidos» (p. 14). En otras palabras, la cosificación convierte procesos en objetos. Por ejemplo, la función como cómputo acaba convirtiéndose en objeto o noción. Luego será la derivación de una función lo que se convierta en objeto, y así sucesivamente. «La fase de condensación dura mientras una nueva entidad permanezca fuertemente conectada a un determinado proceso. Sólo cuando una persona se hace capaz de concebir la noción como un objeto maduro, diremos que el concepto se ha cosificado. Así, pues, la cosificación se define como un cambio ontológico –una repentina habilidad para ver algo familiar desde un punto de vista totalmente nuevo» (p. 19).

⁵ Algunos ejemplos de estos aspectos abordados en el PIC son: la participación del alumno en el aula de matemáticas, la enseñanza de la matemática desde una perspectiva de resolución de problemas, o la institucionalización de los aprendizajes de los alumnos en el aula de matemáticas (la necesidad de asegurar momentos para dicha institucionalización y vías para hacerlo).

⁶ De forma similar a la construcción de conocimiento profesionalizado del contenido (Blanco y Contreras, 2002).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARTZT, A.F. y ARMOUR-THOMAS, E. (1999). A cognitive model for examining teachers' instructional practice in mathematics: a guide for facilitating teacher reflection. *Educational Studies in Mathematics*, 40, pp. 211-235.
- BARDIN, L. (1986). *El análisis del contenido*. Madrid: Akal.
- BLANCO, L.J. y CONTRERAS, L.C. (2002). Un modelo formativo de maestros de primaria en el área de matemáticas en el ámbito de la geometría, en Contreras, L.C. y Blanco, L.J. (eds.). *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de matemáticas: una mirada a la práctica docente*, pp. 93-124. Cáceres: Universidad de Extremadura.
- BROWN, C.C. y BORKO, H. (1992). Becoming a Mathematics Teacher, en Grouws, D.A. (ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 209-239. Nueva York: McMillan.
- CLIMENT, N. (2005). *El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso*. Michigan: Proquest Michigan University <www.proquest.co.uk>.
- CLIMENT, N. y CARRILLO, J. (2003). El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional. Una experiencia en matemáticas con maestras. *Enseñanza de las Ciencias*, 21(3), pp. 387-404.
- COONEY, T.J. (1998). Conceptualizing the professional development of teachers, en Alsina, C. et al. (eds.). *Selected lectures ICME8*, pp. 101-117. Sevilla: SAEM Thales.
- COONEY, T.J. (2001). Considering the paradoxes, perils and purposes of conceptualizing teacher development, en Fou-Lay Lin y Cooney, T.J. (eds.). *Making Sense of Mathematics Teacher Education*, pp. 9-31. Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.
- ERNEST, P. (1996). Varieties of constructivism: a framework for comparison, en Steffe, L. y Neshet, P. (eds.). *Theories of Mathematical Learning*, pp. 335-350. Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- FELDMAN, A. (1993). Promoting equitable collaboration between university researchers and school teachers. *Qualitative Studies in Education*, 6(4), pp. 341-357.
- JAWORSKI, B. (1998). Mathematics teacher research: process, practice and the development of teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1(1), pp. 3-31.
- KRAINER, K. (1994). PLF-MATHEMATICS: A teacher in-service education course as a contribution to the improvement of professional practice in mathematics instruction. *Proceedings of the 18th PME*, 3, pp. 104-111. Lisboa: Universidad de Lisboa.
- LLINARES, S. (2002). Participation and reification in learning to teach: the role of knowledge and beliefs, en Leder, G.C., Pehkonen, E. y Törner, G. (eds.). *Beliefs: a hidden variable in mathematics education?*, pp. 195-209. Holanda: Kluwer Academic Publishers.
- MUÑOZ, C., CARRILLO, J. y CLIMENT, N. (En prensa). The transition from initial training to the immersion in practice. The case of a mathematics primary teacher, en Bosch, M. et al. (eds.). *Proceedings of the Fourth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Sant Feliu de Guixols, España, pp. 17-21, febrero 2005.
- SCHOENFELD, A.H. (2000). Models of the teaching process. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(3), pp. 243-261.
- SCHÖN, D. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. Nueva York: Basics Books.
- SCHÖN, D. (1987). *Educating the reflective practitioner*. Nueva York: Jossey Bass.
- SFARD, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, pp. 1-36.
- SKEMP, R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*. Harmondsworth, RU: Penguin Books.
- STAKE, R. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.
- STRAUSS, A. y CORBIN, J. (1998). *Basics of qualitative research: techniques and procedures for developing grounded theory*. California: Sage Publications.
- SZTAJN, P. y NIPPER, K. (2005). *Expanding the instructional triangle: professional development and other images for planning instruction* (Documento inédito).
- TZUR, R. (2001). Becoming a mathematics teacher-educator: conceptualizing the terrain through self-reflective analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 4(4), pp. 259-283.
- WENGER, E. (1998). *Communities of practice: learning, meaning and identity*. Nueva York: Cambridge University Press.
- ZASLAVSKY, O. y LEIKIN, R. (1999). Interweaving the training of mathematics teacher-educators and the professional development of mathematics teachers, en Zaslavsky, O. (ed.). *Proceedings of the 23rd Conference of the PME*, 1, pp. 143-158.

[Artículo recibido en febrero de 2006 y aceptado en octubre de 2006]

ANEXO

MODELO HELICOIDAL CONTINUO DE DESARROLLO PROFESIONAL

