UN ESTUDIO SOBRE LA NOCIÓN DE DIMENSIÓN EN LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Garbin, Sabrina[1] y Mireles, Miriam[2]
[1] Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas. Universidad Simón Bolívar, Venezuela.
[2] CEINEM-NT. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Venezuela.
sabrinagarbin@gmail.com
miriam.mireles@gmail.com

Resumen. En este artículo presentamos un estudio sobre la noción de dimensión, realizado a partir de tres acercamientos, histórico-epistemológico, del discurso escolar y cognitivo. Se pretende identificar, describir y explicitar elementos de interés didáctico, sobre la problemática de la enseñanza y aprendizaje de este concepto. Se hace notar que el ínfimo tratamiento de la dimensión en la escuela no tiene base epistemológica suficiente y que en el nivel de secundaria, su «invisibilidad institucional», es causa de la poca riqueza de ideas y esquemas conceptuales asociados a esta noción de los alumnos. Se identifican y describen requerimientos para su aprendizaje que podrían ser desarrollados a los largo de la escolaridad. Participaron en el estudio 70 estudiantes preuniversitarios.

Palabras clave. Dimensión, dimensión fractal, esquemas conceptuales, historia, didáctica de la matemática.

A study of the process of teaching and learning the notion of dimension in mathematics

Summary. This article studies the issues that arise when teaching of the notion of dimension in school, from the perspective of three different approaches: historic-epistemological, school-discourse and cognitive. Elements of didactical interest about the learning and teaching of dimension are explicitly identified and described. The study, in which 70 high-school students participated, finds that the concept is scarcely treated in school due to an insufficient epistemological basis; in particular, in high-school there is an «institutional invisibility» of sorts due to a shortage of ideas and concept images available to the students. To promote the learning of the notion of dimension, appropriate requirements to be developed during the school years are determined and studied.

Keywords. Dimension, fractal dimension, concept image, history, educational studies.

INTRODUCCIÓN

En los últimos años, se han elaborado propuestas de innovación y experiencias didácticas para introducir al estudiante de educación secundaria en el conocimiento *fractal* (Mandelbrot, 1984). Hemos constatado que aún son escasas las investigaciones rigurosas de tipo cognitivo, que exploren las percepciones e ideas intuitivas de los alumnos al conocer los fractales, y que justifiquen el qué, el cómo y el para qué de una posible integración de estos objetos matemáticos en el currículo o como herramienta o estrategia para otros tipos de aprendizajes (Garbin y Mireles, 2005).

Iniciamos una investigación con el interés, en su primera fase, de explorar e intentar aproximarnos a las ideas y percepciones de estudiantes preuniversitarios sobre los fractales. Los perciben y caracterizan principalmente como procesos infinitos o sucesiones infinitas con ciertas características; su dimensión no es evocada (Garbin y Mireles, 2005).

La dimensión fractal define al objeto y es un elemento clave para acercarse a su complejidad. Se fundamenta, al igual que la topológica, en la euclídea. Esto nos lleva a preguntarnos sobre la capacidad del estudiante de percibir y entender la dimensión euclídea. ¿Cuáles son las ideas y concepciones de los estudiantes preuniversitarios asociados a esta noción? ¿Qué requerimientos conceptuales son fundamentales para la comprensión de la dimensión? Los esquemas conceptuales de los alumnos ¿son lo suficientemente ricos para comprender la dimensión topológica y fractal? La necesidad de tener un marco para responder a estas preguntas y analizar las producciones de los sujetos que participan en la investigación nos induce a plantearnos un estudio histórico epistemológico de la dimensión y de la situación escolar a través del análisis de libros de texto.

El artículo contempla la fundamentación teórica y los antecedentes, metodología general y específicas. El análisis y los resultados son presentados a través de tres acercamientos: histórico-epistemológico, análisis de textos e ideas y esquemas conceptuales de estudiantes universitarios.

Este trabajo, con carácter exploratorio, permite dar datos sobre la problemática, y señalar aspectos de interés desde el punto de vista didáctico de la enseñanza y aprendizaje de la noción de dimensión en el sistema escolar venezolano.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA Y ANTECEDENTES

Las etapas de la escolaridad están en estrecha relación con el desarrollo cognitivo de los estudiantes, y es importante ubicar la etapa cognitiva en que se encuentran. Nos situamos en este estudio en la etapa cognitiva de transición del pensamiento matemático elemental (PME) al pensamiento matemático avanzado (PMA). «David Tall y Tommy Dreyfus han elaborado una teoría cognitiva con relación al desarrollo y crecimiento del pensamiento matemático avanzado (PMA), que muestra cuáles son las condiciones para ir de un PME a un PMA, pero es el mismo Tall quien afirma que el lugar donde el PME se convierte en avanzado no se ha definido con precisión» (Garbin, 2005, p.171). Sin embargo, se han podido hacer comparaciones entre el PME y el PMA, desde la característica de su enseñanza y evaluación (Aline y Schwarzenberger, 1990; Calvo, 2001), o desde la reconstrucción cognitiva que requiere esta transición, el paso del «describir» al «definir», y por otro, el paso del «convencer» al «demostrar» (Tall, 1995). «Se podría decir que los alumnos que se encuentran en la franja de 15-20 años aproximadamente son los que están en esta etapa de transición» (Garbin, 2005, p.172).

Los estudiantes que participan en nuestro estudio se encuentran en esta franja de edad, en la que hay que favorecer la construcción y reconstrucción de los conceptos matemáticos, y en el caso que nos ocupa, probablemente también de la noción de dimensión si se quiere introducir la topológica y fractal, por ser éstas nociones propias del PMA por su complejidad matemática.

De la teoría cognitiva mencionada, el concepto que en particular nos interesa es el de *concept image*[1] (Tall y Vinner, 1981). Entendido el esquema conceptual como el conjunto de todas las imágenes mentales del estudiante asociadas al concepto, juntamente con todas las propiedades y los procesos que le caracterizan.

Los constructos teóricos que proporciona esta teoría no son suficientes para abordar en su totalidad las preguntas de investigación. El marco que proporciona el análisis histórico epistemológico y el de los libros de texto son de especial importancia en nuestro trabajo.

Algunos autores han escrito sobre la relevancia de estos análisis en la investigación didáctica. Artigue (1990, 1992) afirma que el análisis epistemológico puede proveer al investigador de herramientas de intencionalidad didáctica, con la finalidad de resolver y enriquecer su práctica educativa; son conocidas las ventajas de los aportes y relaciones que ofrece el análisis epistemológico al análisis didáctico. En esa dirección, Berge y Sessa (2003) plantean que el análisis epistemológico le permite al investigador recuperar la complejidad del objeto estudiado y ampliar las fronteras de sus concepciones epistemológicas; le provee, además, de insumos significativos para la problematización de una propuesta didáctica. Farfán (1997) afirma que el análisis epistemológico permite al didacta tomar distancia y controlar las representaciones epistemológicas de las matemáticas inducidas por la enseñanza. Dicho análisis provee de historicidad a los conceptos matemáticos que la enseñanza usual presenta como objetos universales, así como a las nociones metamatemáticas y protomatemáticas. Además, posibilita la observación de las disparidades entre el saber científico y el enseñado.

El acercamiento a la historia y epistemología de la noción de dimensión tiene utilidad en nuestro estudio, ya que permite dar luz de cómo han evolucionado las distintas concepciones e ideas relacionadas con este concepto, e ilumina los resultados de la revisión de libros de texto.

En la educación matemática se ha puesto de manifiesto la importancia del estudio de los libros de texto como reflejo de la actividad que se realiza en el aula (Sierra, González y López, 1999) y en donde fundamentalmente se refleja la transformación de la matemática en el contenido escolar (Chevallard, 1997). Hemos querido explorar los textos de matemáticas más utilizados en el sistema didáctico venezolano para conocer el lugar que se le da al concepto de dimensión y cómo se presenta en la secundaria (13-17 años). Esta información, con la proporcionada por el acercamiento histórico-epistemológico, facilita el marco para el análisis de las producciones de los estudiantes encuestados.

Sobre el objeto matemático de estudio, conocemos muy pocas investigaciones, de corte cognitivo o didáctico, realizadas sobre esta noción, y no conocemos investigaciones pilares de este tipo en Iberoamérica. Las investigaciones cercanas y de interés para nuestro trabajo son las de Bitsas, Koleza y Skordoulis (1997), Thompson (2000) y Bitsas y Koleza (2000).

Bitsas, Koleza y Skordoulis (1997) presentan el desarrollo histórico del concepto de dimensión desde los *Elementos* de Euclides hasta la geometría fractal. Estudio que tendremos en cuenta muy de cerca en el nuestro.

Thompson (2000) aporta sobre algunos de los requerimientos para entender la dimensión fractal. Parte del hecho de que la dimensión fractal está basada sobre la idea de dimensión euclídea y explora con niños el nivel de conceptualización de esta dimensión. Constata que la concepción de éstos del objeto cuadrado no es dimensionado, es simplemente un objeto. A través de entrevistas a estudiantes de quinto grado, muestra que no conectan conceptualmente las fórmulas del área y volumen con el área y el volumen del objeto, lo que ilustra que los niños necesitan primero conceptuar las unidades de medida como objetos dimensionados, en orden a entender las ideas de área y volumen como unos «atributos dimensionados» de los objetos. Suponiendo que los estudiantes hayan desarrollado la concepción de los atributos dimensionales del área y del volumen, agrega que el segundo paso es que extiendan la noción de dimensionalidad como una relación invariante entre la réplica y la similitud. Afirma que, para entender la idea de dimensión fractal, es abslutamente esencial comprenderla como una extensión de la dimensión euclídea y de la idea de autosimilitud.

Bitsas y Koleza (2000) presentan una investigación donde muestran que en el sistema escolar griego, el problema fundamental de la enseñanza de la dimensión radica en que su formulación es pobre y que tomando como base las tres maneras de acercamiento didáctico del concepto de dimensión, geométrico, paramétrico y topológico, afirman que: el acercamiento geométrico viene a ser en el High School el resultado de 6 años de actividad de geometría; que los estudiantes, aunque pasan más de 6 años calculando áreas y volúmenes no conectan dimensión y volumen, con lo cual la fórmula no es profundamente entendida; la ausencia de representación geométrica de un sistema de soluciones cuando éstas son infinitas crea una diferencia entre la dimensión paramétrica y la geométrica (el círculo de la forma $(x, \sqrt{4-x^2})$ puede ser visto como un objeto unidimensional, mientras que geométricamente puede ser visto como un objeto de dos dimensiones); el énfasis en el uso de un sistema de coordenadas puede ser una antítesis del desarrollo del componente topológico del concepto de dimensión.

METODOLOGÍA

Como hemos afirmado en la introducción, la necesidad de tener un marco para responder a las preguntas de investigación induce a plantearnos un acercamiento histórico epistemológico de la dimensión y de la situación escolar a través del análisis de libros de texto.

El presente trabajo se sitúa en el sistema escolar venezolano y tiene tres focos de estudio que se influyen mutuamente: a) histórico-epistemológico; b) Al discurso escolar venezolano: a partir de los libros de texto; c) cognitivo: esquemas conceptuales de estudiantes preuniversitarios.

Estos tres abordajes permiten: dar datos sobre la problemática, y señalar elementos de interés desde el punto de vista didáctico, de la enseñanza de la noción de dimensión en el sistema escolar; explorar el cómo aparece la dimensión en los libros de texto que se utilizan en el sistema escolar venezolano y si se podría considerar a la dimensión como un objeto matemático «invisible institucionalmente» (Ruiz, 2001; Chamorro, 2003a) y, por tanto, necesitado de actividades explícitas o conexiones con ciertas nociones para salvar la posible ausencia; y por último, explorar los esquemas conceptuales asociados a la noción de dimensión que presentan estudiantes preuniversitarios.

La investigación se enmarca en un estudio de tipo cualitativo, cuyo foco de investigación tiene un carácter descriptivo, interpretativo y exploratorio, y la metodología adoptada recurre a diversos tipos de análisis cualitativos. Se asume en este trabajo lo expresado por Rodríguez, Gil y García (1999; p. 40): «La naturaleza de las cuestiones de investigación guía y orienta el proceso de indagación, y por tanto, la elección de unos métodos u otros. Luego, los métodos surgen bajo las concepciones y necesidades de los investigadores que trabajan desde una disciplina del saber, la cual determina en cierta medida, a su vez, la utilización de los métodos concretos y las posibles cuestiones a tratar».

El estudio se realiza con 70 estudiantes de secundaria con edades comprendidas entre 15 y 17 años. En el momento de la aplicación de los cuestionarios no tenían conocimientos formales de cálculo (infinitesimal, diferencial, integral), ni de álgebra lineal, salvo el conocimiento sobre vectores en el plano, vectores libres, espacio V_2. El rendimiento de los alumnos es variado.

Aproximación histórico-epistemológica: nos apoyamos en libros y artículos, tanto de historia como de fundamentos de la matemática, textos originales de matemáticos y el trabajo realizado por Bitsas, Koleza y Skordoulis (1997). La estrategia de recogida de información es el análisis de los materiales escritos, llegando a ser considerados como instrumentos cuasi-observables que en cierto modo reemplazan al observador y al entrevistador en situaciones inaccesibles (Woods, 1987).

Aproximación al discurso escolar venezolano a partir de los libros de texto: se realiza siguiendo distintas etapas que se circunscriben a una metodología de análisis de contenido cualitativo (Gómez, 2000) adecuada a nuestra situación de estudio. El análisis es iluminado por el trabajo histórico.

El criterio de selección de los libros sometidos a estudio es el de solicitar a veintidós docentes de educación media[2] (secundaria) de trece escuelas públicas venezolanas, que indiquen qué libros de texto son más usados por los profesores en sus respectivos centros educativos y en cada curso. De la lista resultante se escogen aquellos libros más representativos, por su frecuencia (Tabla 1). Los libros cumplen los requisitos establecidos por el Currículo Básico Nacional.

Tabla 1
Muestra de libros estudiados.

Autor (es)	Año de publicación	Curso	Edades de los estudiantes
Giménez	1973	Ciclo Diversificado 2º año	16-17 años
Sarabia y Barragán	1976	Ciclo Diversificado 2º año	16-17 años
Gid	1998	Ciclo Diversificado 2º año	16-17 años
Brett	2003	Ciclo Diversificado 2º año	16-17 años
Jiménez	1973	Ciclo Diversificado 1º año	15-16 años
Mendiola	1998	Ciclo Diversificado 1º año	15-16 años
Figuera	1998	Ciclo Básico 9º grado	14-15 años
Mendiola	1998	Ciclo Básico 8º grado	13-14 años
Suárez y Durán	2002	Ciclo Básico 7º grado	12-13 años
Figuera	1994	Ciclo Básico 7º grado	12-13 años

Realizamos un análisis previo organizando los distintos textos por niveles educativos y procedimos a varias lecturas de éstos, haciendo familiar la exposición de los temas, organización, contenido, etc. Seguimos con el análisis de contenido cualitativo. Verificamos la presencia o no del tema «dimensión», de la palabra «dimensión» y/o de este concepto. Una vez identificada la palabra o el concepto, pasamos a la etapa de trascripción, como herramienta de análisis claro, completo y significativo (Gómez, 2000), y con ayuda del procesador de textos. Terminamos con el análisis conceptual, que se refiere a cómo se define y se organiza el concepto de dimensión a lo largo del texto (si éste aparece) y asociada a qué conceptos o temáticas aparece la palabra dimensión.

Aproximación cognitiva. Esquemas conceptuales de estudiantes preuniversitarios: aplicamos dos cuestionarios, el primero con la intencionalidad de acercarnos a las ideas de fractal y con el segundo deseamos obtener una primera aproximación de los esquemas conceptuales asociados a la noción de dimensión que presentan los estudiantes. Este último es el que se presenta en este estudio. Las preguntas pretenden que los alumnos justifiquen que el cubo y la recta tienen dimensión 3 y 1 respectivamente, y escriban una frase que explique el significado de «dimensión» (Tabla 2).

Tabla 2
Preguntas de cuestionario.

1	En Matemática se dice que la dimensión de un cubo es 3. ¿Podrías explicarnos el porqué de esa afirmación?
2	¿Cuál es la dimensión de una recta? ¿Podrías explicarnos el porqué de tu respuesta?
3	Escribe una frase que explique el significado de «dimensión».

En la metodología específica de análisis se utilizan las redes sistémicas (Bliss, Monk y Ogborn, 1983) como sistema de representación de los datos cualitativos obtenidos a partir de las respuestas dadas por los alumnos en el cuestionario. A partir de estas redes se establecen categorías y subcategorías (según las posibilidades de las respuestas). Esto nos ayuda a organizar, clasificar las respuestas y hacer un análisis interpretativo.

Al ser la cuestión de investigación de proceso, a partir de los análisis específicos histórico-epistemológico y de los libro de texto, se realiza el análisis de las producciones de los estudiantes, y se formalizan las consideraciones finales a modo de conclusión, aportando no sólo respuestas a las cuestiones de investigación, sino dando aportaciones, con carácter exploratorio, sobre la problemática de enseñanza y aprendizaje de la noción de dimensión.

ANÁLISIS Y HALLAZGOS

1. Acercamiento histórico epistemológico de la noción de dimensión

Pretendemos en esta primera parte aportar, a grandes rasgos, información sobre la evolución de la noción de dimensión en distintos momentos históricos, deteniéndonos en aquellos más significativos a los que ha estado ligada en el curso de su evolución.

Consideraciones iniciales
El concepto dimensión ha evolucionado en los últimos cien años, al principio sólo se conocía la denominada euclidiana, hoy se trabaja además con la topológica y la fractal. En la época de Platón (427 ac- 347 ac), la dimensión fue concebida como el mínimo número de parámetros que se requieren para describir un objeto (Bitsas, Koleza y Skordoulis, 1997). Esa concepción se mantuvo hasta el siglo XIX.

La noción de dimensión conocida como euclidiana, viene dada por las propiedades largo y ancho (bidimensional) para objetos «planos» o bien por largo, ancho y profundo (tridimensional) para objetos «sólidos». Todavía en 1888 esa noción se mantenía pero Giuseppe Peano[3] la define[4] formalmente (O'Connor y Robertson, 1996). Actualmente, una de las nociones de la dimensión, posiblemente «la más natural», está relacionada con la capacidad de los objetos para ocupar el espacio euclidiano en el que se encuentran sumergidos. En consonancia con esta noción, cuantificar fractales sería definir por algún procedimiento la proporción del espació físico en el que se inscriben y que es llenado por ellos.

Dimensión desde la geometría euclidiana: alto-ancho-profundo, lo intuitivo y observable

La idea de los griegos era que todo objeto en el mundo se podía representar como una figura geométrica trazada en papel, «dibujada»[5], la cual ocupaba un lugar en el plano o en el espacio. A estas figuras geométricas, a ese «lugar» que ocupan, la geometría elemental le asigna magnitudes como el de longitudes, áreas y volúmenes, y es común encontrar asociadas a estas magnitudes al término de dimensión. El término volumen es usado indistintamente por la palabra dimensión; significa algo más que las unidades de medida que se les pueden asignar a las figuras geométricas, estos son atributos dimensionados como bien lo afirma Thompson (2000), y la dimensionalidad es una relación invariante entre las figuras que son similares que no depende de las unidades de medida que describen (miden) la figura geométrica. Estas ideas aparecen en el trabajo de Euclides.

Euclides (325 ac-265 ac) planteó en su libro *Elementos* (Euclides, 1991/1482,1994/1482,1996/1482) los términos primarios que contribuyeron a darle consistencia al sistema axiomático que allí construyó. Los últimos capítulos están referidos a la geometría de los sólidos y al uso de procesos en la resolución de problemas de áreas y volúmenes. En su libro XI, definió los términos que ya había planteado en el libro I; éstos fueron: «un punto es lo que no tiene partes; una línea es una longitud sin anchura; una superficie es lo que sólo tiene longitud y anchura» (Euclides, 1991/1482: 189,191); «un sólido es lo que tiene longitud, anchura y profundidad» (Euclides, 1996/1482: 199).

La geometría desarrollada por los griegos es considerada como descripción ideal de hechos simples, de relaciones espaciales del mundo en que vivimos, del mundo físico (Blumenthal, 1965), por ejemplo, Tolomeo relató en su teoría visual el problema de la dimensión del espacio (Neugebauer, 1975). En esta dirección de la representación de los objetos reales, físicos o abstractos y en aportaciones a las reformas que ayudaron al desarrollo del álgebra, Newman (1968) afirma que los franceses Nicole Oresme (1323-1382) y Francois Viete (1540-1603) hicieron un trabajo predecesor a Descartes; el primero lo hizo en el sistema de «latitudes y longitudes», definido aproximadamente como «el uso de coordenadas en la representación gráfica de funciones arbitrarias» y el segundo, realizó su aportación en lo relativo a la simbología. Estos avances contribuyeron a la algebrización de la geometría, y por ende, al andamiaje de la noción de concepto de dimensión y de hecho, en la fundación de la geometría analítica por René Descartes (1596-1650) y Pierre de Fermat (1601-1665).

Para esta primera etapa, resaltamos dos ideas asociadas a la noción de dimensión. Por un lado, la idea que ha predominado desde los griegos, concebida desde la intuición y lo observable: alto, ancho, largo; dichas características fueron planteadas desde Platón y como términos primarios por Euclides en su libro *Elementos*. La caracterización de Euclides hace que una recta, un cuadrado y un cubo dejen de ser un simple objeto para pasar a ser objetos dimensionados; la longitud, el área y el volumen son concebidos como «atributos dimensionados» de la recta, el cuadrado y el cubo respectivamente. Por otro lado, la ubicación y representación de objetos físicos o matemáticos, a partir de un sistema de «latitudes y longitudes» (probablemente introducidos desde el desarrollo en la astronomía) y por lo concebido posteriormente en la geometría analítica, constituye un primer acercamiento a la idea de asociar la dimensión a los sistemas de coordenadas.

Dimensión desde la geometría y el álgebra: lugares geométricos y posiciones de los objetos

A Descartes se le atribuye la dimensionalidad de la geometría plana (Turnbull, 1968). Sin embargo, fijar la posición de un punto en el plano asignándole dos números (coordenadas), que expresaran su distancia a dos líneas perpendiculares entre sí, no sólo fue un aporte de Descartes sino también de Fermat. Con sus ideas permitieron enlazar la geometría y el álgebra; asimismo, ayudaron a afianzar la percepción intuitiva y gráfica de los objetos debido a una inclinación eminentemente visual y espacial de concebir sus formas. La noción de dimensión quedó asociada a los sistemas de coordenadas y su posibilidad de expresar las curvas mediante ecuaciones y viceversa.

a) La dimensión en la geometría analítica

Los trabajos de Descartes y Fermat se constituyeron en el fundamento de la geometría analítica y contribuyeron al avance de las matemáticas en términos geométricos y algebraicos (Coolidge, 1947).

Básicamente, el primer paso para la evolución del concepto de la dimensión fue la coordinación del espacio que introdujo René Descartes en su obra *La Geometría* (Descartes, 1947/1637); pero mucho antes Apolonio (262 ac-190 ac) fijó el nombre a dos términos íntimamente relacionados con el concepto de coordenadas: abscisa y ordenada. De modo similar, el trabajo de Oresme estableció la analogía con la longitud y la latitud para los puntos de la tierra y la correspondencia entre las posiciones de los puntos de las figuras geométricas con líneas fijas (Newman, 1968; Boyer, 1999). Esta analogía podría servirle al docente para introducir el concepto de coordenadas de un punto.

Descartes en *La Geometría* intentó explicar los movimientos planetarios a partir de una teoría de vorticidades, que a su vez formaba parte de su amplio programa filosófico (Turnbull, 1968). Simultáneamente, «Fermat escribió el siguiente principio que lo guió: Cuando en una ecuación dos cantidades desconocidas se encuentran, tendremos un lugar geométrico, y la altura de una describirá una línea, recta o curva» (Turnbull, 1968: 61). Particularmente, Cantoral y Farfán (2004: 74-75) señalan algunos detalles sobre el trabajo desarrollado por Fermat y Descartes:

> «Para ambos, las dos cantidades desconocidas de una ecuación son segmentos de línea más que números. Una de éstas era medida a la derecha del punto de referencia en un eje horizontal y la segunda colocada como una ordenada vertical en el punto final de la primera. La idea central de la geometría analítica es la correspondencia entre una ecuación $f(x,y) = 0$ y el lugar geométrico, generalmente una curva, que consiste en todos los puntos cuyas coordenadas (x, y) relativas a dos ejes fijos perpendiculares satisfacen dicha ecuación. En realidad ni Descartes ni Fermat usaron de manera sistemática dos ejes de coordenadas»

Descartes (1947/1637) en su libro segundo describe la aplicación de su método de las curvas trazadas sobre una superficie plana en un espacio que tiene tres dimensiones, hecho que constituye la idea primaria de la geometría analítica del espacio. En su libro tercero, estudia los problemas de los sólidos o supersólidos, que lo lleva a la resolución de ecuaciones y a la problemática de las raíces y relaciones entre los coeficientes. Muestra que una ecuación puede tener tantas raíces como dimensiones tiene el grado. Por otra parte, Girard Desargues (1591-1661) planteó un teorema donde una parte de su demostración contempla el hecho de que los triángulos no se encuentren en el mismo plano. Turnbull (1968: 61) afirma que «Desargues inició el método de desenredar figuras planas, alzándolas del plano a tres dimensiones».

La transición a los espacios de cuatro coordenadas hoy en día es un procedimiento teórico. El resultado de esta evolución se inició con un trabajo[6] desarrollado por Hermann Grassmann (1809-1877). La metodología para conocer la forma de las figuras en los espacios de la dimensión mayor que tres se basó, sobre todo, en el concepto de la proyección del objeto en un espacio de una dimensión menor (Bitsas, Koleza y Skordoulis, 1997).

Otra aportación de Descartes fue contribuir a la algebrización de la geometría; en este proceso se encuentra el origen de la conocida dimensión paramétrica, a la luz de la solución de ecuaciones con infinitas soluciones. En su libro tercero, establece las relaciones entre las raíces y las dimensiones del grado de las ecuaciones. Es importante resaltar el hecho de que se utilizaba el término dimensión asociado a los potencias (exponentes enteros) de expresiones como éstas: x^2, x^3, x^4, etc.

A partir del desarrollo planteado por Descartes y Fermat podemos mencionar algunos hechos significativos con relación al desarrollo histórico de la noción de dimensión. Por una parte, se extiende la noción de dimensión relacionada con la solución de ecuaciones y la representación de curvas en el plano o en el espacio, y donde surgen aspectos como: complejización del lenguaje simbólico, su representación, la del plano, del espacio cartesiano (ejes cartesianos: x, y, z) y del lugar que ocupan los objetos en dicho plano y espacio; las representaciones cartesianas y paramétricas y su correspondiente articulación. Por otra, se evidencia la fuerte vinculación y el paso de la representación en términos geométricos a términos algebraicos. Por la ausencia de representación geométrica de los sistemas de soluciones infinitos se crea una diferencia entre la dimensión paramétrica y geométrica.

La geometría analítica permitió extender la dimensionalidad que venía de la época griega a espacios que superan el de tres dimensiones. Se extiende la noción de dimensión asociada a lo observable y tangible y que expresa cualidades físicas (alto-ancho-profundo); surgen aspectos o problemas intramatemáticos y se realiza un acercamiento paramétrico a la dimensión (marcando la diferencia entre dimensión geométrica y paramétrica). Es importante señalar que la geometría analítica permitió estudiar la estructura y propiedades de espacios n-dimensionales, trabajo que se emprendió a mediados del siglo XIX.

b) La dimensión relacionada con otras geometrías (las no euclidianas): se mantiene lo intuitivo y lo observable.
Los avances experimentados y el desarrollo de las ideas alrededor de los estudios de la independencia de los postulados de la geometría euclidiana generaron nuevos modelos para representar y estudiar el mundo mediante las geometrías no-euclidianas (espacios curvos n-dimensionales).

En esa dirección, Albert Einstein (1879-1955) aprovecha los desarrollos de Nicolai Lobachevski (1792-1856) y de Georg Riemann (1826-1866), quien define un espacio curvo con cualquier número de dimensiones, para formular la Teoría de la Relatividad General. La teoría de Einstein puede ser mejor estudiada basándose en lo que se conoce como el espacio-tiempo de Hermann Minkowski (1864-1909) y sobre el cual se dice que es curvo. Debemos acotar que la descripción espacio-temporal de Minkowski puede ser visualizada con facilidad como un espacio plano (el típico plano de la geometría euclidiana), donde la dimensión tiempo es perpendicular al plano (Bitsas, Koleza y Skordoulis, 1997; Hacyan, 1998; Rañada (2003); Von Helmholtz, 1968).

En 1887, Henri Poincaré (1854-1912) describe un modelo concreto de una geometría no-euclidiana en dos dimensiones, el plano hiperbólico; además, trabajó con un método para visualizar la cuarta dimensión a base de entrenar la intuición mediante proyecciones sucesivas de objetos tridimensionales sobre tres o dos dimensiones (Rodríguez, 2005).

La revisión de las estructuras conceptuales en las matemáticas propuestas generó y obligó a una relectura y revisión de la noción de dimensión dentro de la fundamentación de las matemáticas. El espacio-tiempo de cuatro dimensiones y los espacios curvos de Riemann n-dimensionales revolucionan la noción de dimensión a partir de lo intuitivo, lo gráfico y lo observable en la geometría euclidiana. Sin embargo, esa caracterización tiene vigencia y se conserva para esa época.

c) La dimensión en el álgebra lineal: una noción abstracta.
Las nociones de dimensión conjugadas por los cambios impulsados por Fermat y Descartes se enriquecieron al considerar la dimensión superior a tres y al conceptualizarla como un número a partir de las discusiones de Giuseppe Peano (1858-1932). En el capítulo IX de su libro[7] establece y define la axiomática de un sistema lineal

como un sistema de objetos que satisfacen cuatro condiciones[8]. Además, establece la definición de dependencia de objetos e independencia de objetos y la de dimensión como es conocida hoy día en el álgebra lineal (O' Connor y Robertson, 1996). La dimensión representa una propiedad abstracta de un espacio vectorial y está ligada al espacio n-dimensional.

La dimensión para esta época se desarrolla en un mundo más formalizado y menos intuitivo, inmerso en un lenguaje especializado: el del álgebra lineal. Frente a la preponderancia del lenguaje algebraico-geométrico más formal y simbólico, el trazado de los objetos geométricos para observar o estudiar propiedades, y entre ellas las relacionadas con la dimensión, comienza a rezagarse. La dimensión se presenta como un número y está asociado a la representación o definición de objetos a partir de combinaciones de otros (vectores y escalares). La noción de dimensión es abstracta por cuanto está asociada a conceptos abstractos como los llamados espacios vectoriales.

Dimensión desde el análisis y la topología: una nueva orientación

Hacia finales del siglo XIX, se abordó el problema de la dimensión, que había sido intuido por Cantor en la construcción de una aplicación 1-1 entre la recta y el plano y por una curva construida por Peano. Poincaré inicia el estudio de los problemas de la geometría n-dimensional y junto a Gottfried Leibniz (1646-1716) y otros matemáticos señalaron la necesidad de una definición de dimensión que pudiera ser aplicada a los espacios abstractos a la vez que las usuales: recta y plano. Estas necesidades contribuyeron a profundizar los estudios en geometría basados en los métodos del análisis matemático, con resultados generalizados, formalizados y de rigor matemático contrarios a la intuición desarrollada por los griegos.

Por una parte, se realizan extensos estudios no ya intuitivos sino formales sobre ciertas clases de puntos (por ejemplo, de formas que no pueden describirse mediante ninguna ecuación algebraica) y por la otra, empezó a examinarse la noción de dimensionalidad.

Al respecto, Kasner y Newman (1976, p. 329) afirman que se trató de determinar si un número, llamado una medida, podía asignarse de manera única a cada figura en el plano de modo que se satisficieran ciertas condiciones. Más aún, se demostró que se le podía asignar una única medida. Felix Hausdorff (1868-1942) demostró que este problema extendido a superficies[9] es irresoluble y los métodos utilizados para dar solución al problema planteado anteriormente resultaron inadecuados para determinar una medida única.

La axiomatización de la matemática que se desarrolló para esta época influyó en la formalización de sus objetos, conceptos, demostraciones. La dimensión no escapa a ello y uno de los conceptos, la medida, asociados desde los griegos a ella, tampoco. Así como la medida del área del plano es única, cabe preguntarse si la dimensión es única.

a) El espacio es tridimensional

El filósofo Inmanuel Kant (1724-1804) suponía el espacio euclídeo como un concepto *a priori* del pensamiento, previo a la experiencia (Kant, 1978/1781). En este sentido, el tema del espacio era considerado como un problema filosófico y como un problema matemático; Karl Menger (1902-1985) y Pavel Urysohn (1898-1924) demostraron, en 1922, que el espacio es tridimensional. Se define de una manera puramente lógica lo que se intenta decir con «dimensionalidad» y además de lo relativo a lo unidimensional, bidimensional y tridimensional de una figura geométrica o «conjunto de puntos» (Hahn, 1976).

Aparece consolidada la noción de dimensión (no negativa) desde el punto de vista topológico[10], donde se introduce la métrica, unos axiomas y se abordan aspectos globales de las formas usando objetos matemáticos en conjuntos de puntos, cuya noción de cercanía alcanza las vecindades, fronteras, dominios, entornos. La dimensión topológica de un conjunto se establece a partir de la dimensión de su frontera.

Evoluciona la noción de dimensión; sin embargo, la euclídea y la cartesiana permanecen invariables en las nuevas concepciones. Una de las interpretaciones de la dimensión, posiblemente «la más natural», está relacionada con la capacidad de los objetos para ocupar el espacio euclidiano en el que se encuentran sumergidos. Dicho de otra forma, la dimensión ayudará en la determinación del contenido o medida. Una propiedad interesante en topología es la conservación del valor de la dimensión cuando se realiza una transformación homotópica. Expresado de otra manera: si deformamos un objeto, sin romperlo, perforarlo o soldarlo, conservará su dimensión (Sierra, 2000).

La geometría, el álgebra y el análisis confluyeron en el interés científico de los matemáticos de la época para continuar con la sistematización, la abstracción y el desarrollo del método axiomático en las matemáticas, no desde un punto de vista intuitivo sino más bien lógico y abstracto. Esta evolución marcó el rumbo de sus objetos, conceptos, definiciones, teoremas; e inmersa en ese desarrollo, la noción de dimensión exhibe su nueva orientación topológica.

Desde la física: grado de libertad del movimiento

Otra idea de dimensión se refiere al grado de libertad del movimiento en el espacio. Entendemos esta libertad como el número de direcciones ortogonales diferentes que podamos tomar. En el espacio que conocemos contamos con tres direcciones: izquierda-derecha, atrás-delante y arriba-abajo (Sierra, 2000).

A principios del siglo pasado, en la física se evidencia la necesidad de suponer más de tres dimensiones para ubicar la materia y además, al estudiar lo que ocurre en las situaciones más extremas, hubo que desarrollar sorprendentes modelos matemáticos para poder modelar las observaciones experimentales. Por ejemplo, Einstein dispuso que para trabajar en la Teoría General de la Relatividad, además de hacerlo con tres dimensiones, debía considerarse el tiempo como la cuarta dimensión. Cuando formulaba su teoría se dio cuenta de que, para incluir la gravitación en ésta, era necesario admitir que el espacio-tiempo es un espacio de Riemann.

Asimismo, la física de supercuerdas, al plantear un universo de once dimensiones (una temporal y diez espaciales), introdujo nuevas e interesantes variantes en los modelos para estudiar la relatividad y la mecánica cuántica (Rodríguez, 2005).

La dimensión fractal: una dimensión que puede ser fraccionaria

Muchas formas encontradas en la naturaleza, como los perfiles de las montañas, de las costas, de los ríos, nubes, hojas, árboles, vegetales, copos de nieve y otras estructuras no pueden ser descritas por la geometría euclidiana (Mandelbrot, 1993). Estas formas de la naturaleza pueden ser modeladas por los «monstruos matemáticos» o funciones «patológicas» que surgieron a principios del siglo XX, funciones continuas en un intervalo sin derivada en ningún punto (Weierstrass, curvas de von Koch, curvas de Peano y otras que «llenan» un cuadrado, etc.). Mandelbrot (1993) propone reconsiderar en el estudio arcaico de la geometría griega las relaciones entre las figuras (idealizaciones matemáticas) y los objetos (datos de la realidad) para designar ciertas realidades matemáticas con propiedades contrarias a la intuición y antagónicas a las de los objetos geométricos estándar. A estos objetos especiales Mandelbrot los llamó fractales.

Por otra parte, es necesario definir la dimensión de una manera más sofisticada, conservando el concepto euclidiano. Se puede tomar como base para el área de los fractales el trabajo realizado por Hausdorff en 1919 y modificado en 1935 por Abram Besicovitch (1891-1970), quien definió un nuevo concepto de dimensión que es llamado dimensión de Hausdorff-Besicovitch[11]. La dimensión de los fractales que en algunos casos no es un número entero pudiera ser fraccionaria. Por ejemplo, la curva de Kock tiene dimensión fractal igual a 1,2628 y la de Cantor 0,6309.

La noción de dimensión fractal, provee una manera de medir qué rugosa es una curva; una curva rugosa que recorre una superficie puede ser tan rugosa que casi llene la superficie en la que se encuentra. Superficies como el follaje de un árbol o el interior de un pulmón pueden efectivamente ser tridimensionales. Se puede, entonces, pensar de la rugosidad como un incremento en la dimensión: una curva rugosa tiene una dimensión entre 1 y 2, y una superficie rugosa la tiene entre 2 y 3. Para calcular la dimensión de un fractal se usan los conceptos de límite, logaritmos, escalas y medidas. En el cálculo de la dimensión de fractales muy complejos como el conjunto fractal de Mandelbrot se usa computadoras, pero para fractales más simples se usan fórmulas matemáticas.

La dimensión ayuda en la determinación del contenido o medida de un conjunto, en particular de los conjuntos fractales. Con la noción de dimensión fractal se intenta expresar cualitativamente, y de una «mejor» manera que con la dimensión euclidiana, algunas características de los objetos, tales como: irregularidad, porosidad, fragmentación, rugosidad.

La dimensión fractal y su geometría ofrece una matemática moderna y relacionada con la naturaleza con una mejor aproximación que la dimensión euclídea y su geometría. Se produce un salto epistémico importante, la dimensión puede ser fraccionaria.

Consideraciones finales

Los antecedentes y el acercamiento histórico-epistemológico de la evolución de la noción de dimensión vislumbran «requerimientos» para su aprendizaje, que podrían ser desarrollados a lo largo de la escolaridad, y que permitirían introducir la de Hausdorff y fractal. Favorecerían no sólo esquemas conceptuales ricos asociados a esta noción, sino también poder comprender el salto epistémico que se produce en el paso de la dimensión euclídea a la fractal. Los enumeramos a continuación:

a) Concebir los objetos geométricos o reales como objetos dimensionados y no como simples objetos.

b) Entender las ideas de medida, tales como longitud, área y volumen, como unos atributos dimensionados de los objetos.

c) En orden al punto anterior, conceptualizar estas magnitudes dimensionadas como producto de medidas (dos o tres) en el caso del área o del volumen, o como unidimensionales en el caso de la longitud. Algebraicamente, esta dimensionalidad desde la estructura multiplicativa, estaría reflejada en el exponente: m, m^2 o m^3, siendo m la medida (metros, centímetros, etc.).

d) Comprender la dimensión como un atributo invariante de los objetos semejantes y como atributo del plano y del espacio.

e) Relacionar la dimensión con la capacidad de los objetos para ocupar el espacio euclidiano en que se encuentran sumergidos.

f) Pasar de la noción de dimensión asociada a lo observable y tangible, y que expresa cualidades físicas, a una dimensión asociada a conjuntos de puntos, a través de representaciones cartesianas o a través de la representación paramétrica.

g) Conceptualizar la dimensión como descriptora de los objetos, como mínimo número de parámetros para describirlos. Aún más, para ciertos conjuntos llegar a conceptualizar la dimensión como una noción abstracta asociada a conceptos abstractos, tales como los espacios vectoriales.

h) Comprender que si bien la dimensión es una relación invariante entre objetos semejantes, desde un acercamiento paramétrico, la dimensión de un mismo objeto matemático puede ser vista de manera distinta que desde la dimensión euclídea (la ausencia de representación geométrica de un sistema de soluciones cuando éstas son infinitas crea esta «diferencia»[12]).

i) Reconocer la dimensión de un conjunto a partir de la dimensión de su frontera. Los objetos geométricos pueden ser detallados (vistos) a partir de su frontera, que podrían ser curvas o superficies, o como el caso del cubo que articula su frontera que es la superficie (caras del cubo) con la frontera de cada superficie (aristas).

j) Reconocer y tomar conciencia de la unicidad de la dimensión, y que se conserva, si deformamos un objeto, sin romperlo, perforarlo o soldarlo.

k) Conocer que la dimensión no está circunscrita sólo al campo de la matemática; la idea de dimensión está también asociada al movimiento y a la física (la materia y nuevas teorías físicas se desarrollan suponiendo más de tres dimensiones).

l) Tomar conciencia de que la noción de dimensión que manejamos, desde un acercamiento geométrico, cartesiano, paramétrico o topológico y que es una cantidad entera, no es suficiente para describir algunas situaciones de los objetos reales. El hilo, el suelo, una caja, una nube, etc., al ser representadas por cuadrados, líneas, cubos, círculos, etc., desprecian características como irregularidad, porosidad, fragmentación y rugosidad. ¿Podría existir una dimensión entre 2 y 3?, o ¿1 y 2?

Estos requerimientos apuntan hacia la necesidad de una transposición didáctica nueva, y a estudios que permitan conocer cuáles podrían considerarse como primordiales y fundamentales en el sistema escolar, y para la incorporación y/o comprensión de los objetos fractales.

2. Acercamiento al discurso escolar: La dimensión en los libros de texto

Pasamos a describir los resultados más destacables del análisis conceptual. Iniciamos con los libros del curso en que se encuentran los estudiantes que participan en el estudio y seguimos en forma decreciente. El objetivo de este análisis no es estudiar la evolución del concepto de dimensión a lo largo de la escolaridad, sino explorar cuándo y cómo aparece la dimensión en los libros de texto que se utilizan en el sistema escolar venezolano y si se podría considerar la dimensión como un objeto matemático «invisible institucionalmente».

En Giménez (1973) y Sarabia y Barragán (1976), dos libros de texto para 2° año del Ciclo Diversificado (16-17 años), se presenta el concepto de dimensión desde el contenido correspondiente a espacio vectorial y con un enfoque único desde el álgebra lineal. «Dimensión de un espacio vectorial. Se llama dimensión de un espacio vectorial al máximo número de vectores que puede tener un conjunto de vectores linealmente independiente» (Giménez, 1973, p. 242).

Sarabia y Barragán (1976) sólo trabajan con R^3. Aunque recuerdan la formulación del plano R^2, no hacen ninguna referencia previa al concepto de dimensión hasta llegar a la definición particular. «Llamaremos dimensión de R^3, al número de elementos de una de sus bases. Por lo tanto, la dimensión de R^3 es tres, y diremos que R^3 es dimensión finita.» (p. 49).

Los autores de estos libros no expresan reflexión alguna sobre el significado de dimensión que supere la aparente cardinalidad de un conjunto, tampoco muestran ni hacen explícita la conexión entre dimensión, números de coordenadas y ubicación en la línea, plano o espacio. El cálculo de la dimensión pasa a ser un asunto algorítmico sin significado.

En Gid (1998) y Brett (2003), más actualizados y de reciente data, no aparece ni se define el término dimensión.

En Gid (1998), en el tema «vectores en el espacio» sólo se hace mención de «mejorar la sensación de tridimensionalidad» (p. 655), a objeto de intentar un mejor aspecto visual. Brett (2003), que presenta un libro para docentes que laboran en este año escolar, plantea el tema de espacio vectorial, discute sobre independencia lineal de vectores, sistema de generadores y define coordenadas de un vector, llega incluso a definir base. Presenta estas dos definiciones importantes, pero no se define ni se menciona el concepto de dimensión. Tampoco se relaciona en ningún momento el número de vectores de la base con la dimensión del espacio R^3; ni siquiera cuando se menciona lo referente a sus coordenadas. En este libro se relacionan los sistemas de ecuaciones con el tema de matrices, pero no se establecen ciertas correspondencias ni con los espacios vectoriales ni con el concepto de dimensión.

En el primer año del Ciclo Diversificado (15-16 años), la situación no es muy diferente a la descrita anteriormente. Jiménez (1973) presenta una sección dedicada al plano real. Usa el símbolo R^2 para indicar el conjunto de pares ordenados, habiéndolos definido previamente. Presenta el sistema de coordenadas perpendiculares hasta llegar al plano real. Hace referencia al matemático René Descartes para llamar al sistema de ejes coordenados, sistema de ejes cartesianos. En este contexto no aparece referencia a la dimensión ni al hecho que el plano es bidimencional. Mendiola (1998a) presenta los vectores en el plano real, tampoco relaciona al par ordenado con la situación de bidimensionalidad del plano. Sin embargo, aunque no se ha estudiado aún la estructura de espacio vectorial, la cual se hace en el siguiente año como hemos visto en los párrafos anteriores, dedica una sección al vector libre, dotándolo de ocho propiedades: «Debido a las ocho propiedades que posee el conjunto V_2, se dice que tiene estructura de *ESPACIO VECTORIAL* sobre el conjunto R» (p. 38).

Termina la sección hablando de la base y dimensión de este conjunto. «Al conjunto de dos vectores linealmente independientes en el plano se le llama *BASE*» (p. 43). «En el plano, toda base está conformada por dos vectores. Por eso se dice que el conjunto de vectores libres del plano es de *DIMENSIÓN 2*, y se simboliza V_2» (p. 44).

Se profundiza en el estudio del plano real en 9° grado (14-15 años), en el sistema de coordenadas cartesianas, y de ecuaciones con dos incógnitas. No se menciona en este nivel la palabra dimensión, ni bidimensionalidad. No hay conexión con la ubicación de un punto en el plano, con la necesidad de dos coordenadas y por ende dos dimensiones. «1) A cada punto P del plano real le corresponde un par ordenado. 2) Dado un par ordenado (a,b) en el plano real, existe sólo un punto con esas coordenadas» (Figuera, 1998, p. 116).

El sistema de ecuaciones con dos incógnitas se expresa de manera tradicional y también con el método gráfico. No se trabaja con la ecuación paramétrica de las curvas involucradas, las cuales podrían dejar en evidencia la unidimensionalidad de la recta.

En 8º grado (13-14 años), tampoco se hace referencia a la noción de dimensión, a pesar de las posibilidades que dan los temas tratados. En Mendiola (1998b), se abordan las coordenadas rectangulares (transformaciones) y las componentes de un vector fijo. El tratamiento es inductivo y la representación gráfica se utiliza como un recurso asociativo. En Suárez y Durán (2002b), se abordan los temas: proyecciones y sistemas de coordenadas cartesianas, y vectores en el plano. En «curiosidades matemáticas» (secciones puntuales dentro de los capítulos del libro) se hace mención a los vectores y al movimiento de fluidos como aplicación de los vectores.

Para 7º grado (12-13 años), Suárez y Durán (2002a) presentan un libro como guía didáctica para docentes que imparten clase en este nivel. En la unidad dedicada a área y volumen, se le recomienda al docente hacer un acercamiento intuitivo tanto para el cálculo de área (trabajar con cuadrícula) como la de volumen (número de unidades cúbicas que contiene). Se plantea la obtención del área de un rectángulo a partir del producto de base por altura; y la del volumen de un prisma recto a partir del producto del área de la base por altura, y más precisamente: «De manera general, si la base es un rectángulo de dimensiones a por b y altura c entonces, volumen de un prisma = a. b. c» (p. 194).

La dimensión es utilizada en este libro como medida, más no como dimensión del prisma. No se hace mención de las propiedades que tiene un sólido cualquiera como son: ancho, alto y profundo.

En Figuera (1994), se abordan medidas de volumen. Se establece de manera diferenciada que: las figuras en el plano tienen sólo dos dimensiones y las figuras en el espacio poseen tres dimensiones. Se destaca que el rectángulo posee dos dimensiones: base y altura; y el paralelepípedo posee tres: base, altura y profundidad. Específicamente: «el volumen de un paralelepípedo es producto de sus tres dimensiones: v = a. b. h» (p. 240). Se aborda el cálculo de área a través del trabajo con cuadrículas y el del volumen con las unidades cúbicas que contiene el sólido.

En lo que afirma Figuera (1994) vemos reflejado el uso de la palabra dimensión. La referencia no es que un plano tiene dimensión 2 (por tener base y altura), o es un espacio bidimensional, sino que tiene dos dimensiones base y altura. Pero qué pasa si la figura de un plano es un círculo, ¿tiene sólo dos dimensiones?, ¿cuáles?

Ante los hallazgos anteriores nos hemos preguntado en qué momento, matemáticamente, nuestros alumnos se inician en la noción de dimensionalidad de los objetos. En matemáticas de 6° grado (11-12 años), último de nuestra escuela primaria, abordan el cálculo de áreas y volumen; sin embargo, no se asocia que el producto de medidas (dos o tres) da la bidimensionalidad o tridimensionalidad del objeto, independientemente de las dimensiones específicas del objeto geométrico involucrado.

Curiosamente hemos encontrado en un libro de 6° grado, en el área de Educación Estética, en la lección correspondiente a «El arte como medio de expresión y comunicación» (elementos de expresión de las artes plásticas), que se hace mención al aspecto dimensión. «(...) El volumen representa el lugar que ocupa un cuerpo sólido en un espacio, su carácter tridimensional permite observar el ancho, la altura y la profundidad del objeto» (Simón et al., 2003, p. 398).

En este nivel, o en 7°, sería propicio presentar la superficie como magnitud bidimensional y el volumen como tridimensional como iniciación a la dimensión. Las magnitudes superficie y volumen pueden ser tratadas de dos formas:

a) «Como unidimensionales. En este caso, la aplicación medida μ, que hace corresponder a una cantidad de magnitud un número real positivo, es una medida producto de tipo directo, lo que significa que a efectos de medida, una longitud se compara con una longitud patrón, una superficie con una superficie patrón, una masa con una masa patrón, etc., obteniéndose la medida mediante un *proceso aditivo* que incluye el conteo del número de veces que se ha utilizado el patrón con el que hemos comparado. En este caso (…), usamos una superficie como unidad para pavimentar una superficie, un volumen para rellenar otro volumen.

b) Como producto de medidas; en este caso, para encontrar la superficie de, por ejemplo, un rectángulo, *multiplicamos* la medida de sus lados (de ahí el nombre de producto de dos medidas y por tanto, bidimensional), para hallar el volumen de un paralelepípedo multiplicamos las medidas de sus tres dimensiones (de ahí el nombre de tridimensional)» (Chamorro, 2003b, p. 246).

2.1. Algunas consideraciones finales

En la etapa escolar entre 13-17 años, la noción de dimensión no aparece de modo explícito, salvo en algunos libros en el último año de la escuela secundaria, desde un único punto de vista del álgebra lineal, como cardinal del conjunto de vectores de una base de un espacio vectorial y donde el cálculo de la dimensión pasa a ser un asunto algorítmico sin significado. Esto último sólo aparece en libros de vieja data; sin embargo, en los más recientes y actualizados al contenido del Currículo Básico Nacional, se mantienen las definiciones básicas de base y generadores pero no aparece la palabra dimensión. Mirándolo desde esta última afirmación, podemos decir que una parte del discurso escolar matemático venezolano, explorado en los libros de texto, en la etapa 13-17 años, ha «desaparecido» el término dimensión y su tratamiento explícito, aunque según las temáticas tratadas habría la posibilidad de abordar esta noción. Está ausente, en el currículo oficial de esta etapa, cualquier referencia a la noción de dimensión, lo cual no favorece el desarrollo de los requerimientos mencionados en la sec. 1.7.

Aparentemente es en la escuela primaria donde se introduce la dimensionalidad, la cual está asociada a la dimensión euclídea. El conocimiento asociado a la «dimensión» parece ser considerado como uno de aquellos conocimientos que podrían ser aprendidos socialmente por lo menos en su concepción más intuitiva y espacial, ya que nos movemos y vivimos en tres dimensiones, y escribimos y dibujamos en un plano de dos dimensiones; la escuela parece haber abandonado parte de su enseñanza.

Con algunos conceptos, la escuela parte del convencimiento de que el alumno acaba aprendiendo desde sus experiencias, sociales, familiares o particulares. Por tanto, convierte «en objetos didácticamente invisibles saberes y conocimientos que el alumno tendrá después necesidad de utilizar, bien para adquirir nuevos conocimientos, bien para su vida personal» (Chamorro, 2003a, p. 222).

En el caso particular que estamos tratando, de la noción de dimensión, ¿es posible comprender social o particularmente el significado de la dimensión 0, 1, 2 y 3?, ¿de la 4, la 5… y la noción topológica? ¿Se llega a concebir los objetos no como simples objetos sino dimensionados? ¿Se llega a entender la idea de medida como atributo dimensionado de los objetos? ¿Se pueden apreciar otras dimensiones, como la Fractal, sin comprender el impacto matemático y contraintuitivo de considerar que existen dimensiones no enteras? En otras palabras, ¿se puede desarrollar socialmente la noción de dimensión con el nivel de comprensión explicitados en la sec. 1.7 de este artículo? Podemos agregar a la afirmación de Chamorro (2003a, p. 222), que hay conocimientos que no sólo se precisan para adquirir nuevos conocimientos necesarios para la vida personal o profesional, también para acercarse al saber matemático de otra manera, a través de una matemática distinta, más cercana a lo real y a la naturaleza, como sería a través de la geometría fractal. Por tanto, el convertir en objetos didácticamente invisibles ciertos saberes y conocimientos tiene también su consecuencia en este sentido.

Encontrarse y trabajar la noción de dimensión en este nivel de la escuela obligatoria (13-17 años) no sólo fundamenta la construcción de nuevos conocimientos, asociados a las matemáticas, física e ingenierías en el nivel universitario, sino que será entonces una noción que el estudiante tendrá que utilizar. Permitiría introducir y comprender el importante salto epistémico de la matemática, al pasar de la dimensión entera a la existencia de una dimensión fraccionaria, propia de los objetos fractales.

Antes de poder introducir la dimensión fractal, parece que se hace necesario hacer «visible» didácticamente la dimensión en la escolaridad. Esta noción está necesitada de actividades explícitas y/o conexiones con ciertas nociones para salvar esta «ausencia».

3. Esquemas conceptuales asociados a la noción de dimensión

Según Tall y Vinner (1981, p. 151) el esquema conceptual que tiene un sujeto de un concepto matemático es la expresión que permite referirse «*a la estructura cognitiva de un individuo asociada a un concepto matemático y que incluye todas las imágenes mentales (imágenes asociadas al concepto en su mente, incluyendo cualquier representación del concepto: gráfica, numérica, simbólica,…), las propiedades y los procesos asociados al concepto*». Para aproximarnos y categorizar los esquemas conceptuales de los estudiantes, a partir de las respuestas de éstos, nos interesa conocer las ideas que asocia el alumno al concepto, los procedimientos que implementa al usar la noción y las propiedades, y las representaciones e imágenes que el estudiante evoca y asocia al concepto.

Como explicitamos en el apartado de la metodología, las redes sistémicas nos ayudaron para organizar, clasificar las respuestas de los estudiantes al cuestionario (Tabla 2) y hacer el análisis interpretativo, obteniéndose los siguientes resultados y categorías fundamentadas en la caracterización anterior. En cada categoría escribimos en cursiva las palabras y expresiones usadas textualmente por los alumnos. Escribimos algunas respuestas representativas de cada categoría a modo de ejemplo; están identificadas con A_n que quiere decir: Alumno con cuestionario número n.

3.1. Dimensión del cubo

a) La dimensión del cubo está asociada a la concepción euclídea.
Para 51 alumnos (73%) la dimensión del cubo es 3, por tener *largo, ancho y profundidad*. Pocos ofrecen algún matiz distinto en su interpretación. Ocho estudiantes no nombran el largo, ancho y profundidad, justifican la afirmación que el cubo tiene dimensión 3 por poseer *tres dimensiones*.

b) La dimensión del cubo está asociada al espacio que ocupa.
Un solo alumno (1,4%) afirma que la dimensión del cubo es 3 porque *ocupa un mayor espacio*.

c) La dimensión del cubo está asociada a la ubicación de los puntos del cubo en el espacio tridimensional.
Tres alumnos (4,2%) nombran las coordenadas o el espacio R^3. Afirma A_{11}: *el cubo posee los puntos en las tres coordenadas;* y A_{13}: *al dibujar un cubo se puede apreciar en los ejes cartesianos, x, y, z.*

d) Quince alumnos no contestan (21,4%).

3.2. Dimensión de la recta

Para 10 alumnos (14,2%) la dimensión de la recta es 2, y para 40 estudiantes (57,1%) es 1. El resto de estudiantes formulan la dimensión, con el ancho, o largo o dan otras explicaciones.

a) La recta es una figura en un plano y, por ello, es de dimensión 2.
Diez alumnos (14,2%) afirmaron que la recta tiene dos dimensiones; estos alumnos conciben el punto con dimensión, con lo cual la suma de puntos que forma la recta produce un segmento que tiene largo y ancho.

A_1: *Dos dimensiones serían ancho y largo, ya que por mínimo que sea hay altura.*

A_{30}: *Una recta es simplemente un conjunto de puntos unidos, por lo tanto, y volviendo a la afirmación anterior, una recta tiene una dimensión, que es el largo; pero si nos pusiéramos a analizar la recta, notaríamos que la dimensión de los puntos (ancho) unidos, forma un largo y esto provocaría que concluyésemos que una recta tiene 2 dimensiones.*

b) La recta posee sólo el largo, no tiene profundidad ni altura y por ello tiene dimensión 1.
Para 13 estudiantes (18,5%), la recta tiene una dimensión. Se parte de un objeto en el espacio que no tiene ancho y altura, o es una figura que posee largo, pero no profundidad y altura.

A_6: *Tiene una dimensión debido a que no puede tener profundidad ni altura.*

A_{14}: *Ya que la recta sólo posee largo, mas no posee las otras dos, ni ancho ni profundo.*

A_{31}: *La única dimensión que podemos medir y observar sería la longitud, el largo de esa recta.*

c) La recta tiene una dimensión puesto que es una sucesión de puntos.
Para 10 alumnos (14,2%), la recta tiene una dimensión por ser un conjunto de puntos infinitos. De estos estudiantes 5 afirman además que los puntos de esta sucesión tiene dimensión 1.

A_2: *Ya que la recta es un conjunto de puntos infinitos.*

A_{10}: *Una recta posee una sola dimensión, porque la recta es una sucesión de puntos, y los puntos poseen una sola dimensión.*

17 estudiantes (24,2%) afirman que la recta tiene dimensión 1, pero no justifican su respuesta o su respuesta no da ningún dato claro.

d) La dimensión de la recta es asociada al largo de ésta, o con su largo y ancho.
Para 6 alumnos (8,5%) la dimensión está relacionada con la medida de su longitud, o con lo que llaman los estudiantes el largo:

A_{39}: *Es el largo, porque no posee altura, ni anchura, y cuando se habla de una recta se asocia con largo y no con ancho.*

A_{41}: *La longitud, porque no posee ninguna de las otras dimensiones, es decir, no puede tener profundidad porque no se ha determinado el volumen de una recta y tampoco la altura.*

A_{54}: *Una recta es infinita o puede serlo, la única dimensión que podría yo nombrar, sería el largo de la recta, aunque ya dije puede que sea infinita.*

A_{37}: *La dimensión de una recta puede ser infinita, mientras no esté establecido su longitud o su medida.*

Sin embargo, 8 estudiantes (11,4%) asocian la dimensión de la recta con el largo y ancho.

A_{16}: *Largo porque se extiende hacia sus lados con una medida por ejemplo 3cm y ancho por su grosor.*

A_{53}: *Es largo y ancho, porque sólo éstas pueden ser observadas.*

A_{26}: *La dimensión de la recta es a lo largo y a lo ancho.*

e) Seis estudiantes no contestan la pregunta (8,5%).

3.3. Significado de dimensión
Son pocos los alumnos, de los 70, que han formulado una frase con cierto sentido e interpretable. Frases de este tipo no han podido ser categorizadas:

A_{14}: *Planos en los cuales se ubican diferentes objetos.*

A_{52}: *Son los diferentes planos en que se pueden observar los objetos o cosas.*

(14 estudiantes, 20%, expresaron frases semejantes a las dos anteriores).

A_{19}: *Son los campos que representa un objeto.*

A_{70}: *Se puede definir como las proyecciones en las que se reflejan uno o más objetos, de acuerdo con su profundidad.*

7 estudiantes (10%) relacionan la dimensión con el ancho, largo y alto pero no logran expresar una frase coherente que exprese el significado de dimensión. Otros 7 (10%) relacionan la dimensión con una medida, medida del largo y/o ancho, medida que expresa un volumen, o la medida de un objeto o del espacio. Hay dos categorías de significado evidenciada en el resto de alumnos:

a) Espacio que ocupa un objeto.
10 estudiantes (14,2%) formularon que la dimensión es el espacio que abarca u ocupa un objeto.

b) La manera de cómo se visualiza un objeto.
Nueve estudiantes (12,8%) formulan la dimensión como la forma, la manera de cómo se ve un objeto:

A_8: *Es la manera en cómo se puede ver un objeto, tomando en cuenta el ancho, el largo y la profundidad.*

A_{21}: *Es el punto de vista en el que uno puede observar un objeto. Puede ser en tercera dimensión, que es cuando se le puede observar la profundidad del objeto. En segunda dimensión si se le puede ver en 2 formas o hacia arriba o hacia abajo.*

A_{63}*: Son los distintos puntos de vista en que se puede ver un objeto.*

Como se puede observar, los esquemas conceptuales asociados a la noción de dimensión de los estudiantes son poco ricos. Es decir, las respuestas de los alumnos mostraron de la caracterización del esquema conceptual, las ideas asociadas a la noción de dimensión (prácticamente vinculada a una única concepción), mas no evocaron procedimientos, propiedades, representaciones e imágenes del concepto.

La idea más asociada a la dimensión es la de la concepción euclídea y que aflora con más claridad cuando se piensa en el espacio tridimensional o con un objeto en R^3, como fue el caso del cubo. Alumnos que han dado una explicación a la dimensión del cubo no la han podido dar al hablar de la recta.

La bidimensionalidad de la recta para algunos alumnos se muestra al considerar que está formada por puntos que tienen ancho, lo que le da altura a la recta (concepción aún finitista). Y algunos estudiantes relacionan dimensión con medida, por ejemplo, la dimensión de la recta es la longitud de la misma.

En cuanto al significado de la dimensión, los alumnos que han podido expresar con más coherencia alguna frase relacionada con esta noción está asociada al espacio que ocupa un objeto y a cómo se visualiza, lo que se encuentra estrechamente relacionado con la formulación que se usa en los libros de texto al final de la escuela primaria, como hemos visto en la sección 3.2. En esta misma sección pudimos afirmar que la noción de dimensión, en la etapa entre 13-17 años, no aparece de modo explícito, salvo en algunos libros de texto del último año de la escuela secundaria. Se aborda desde un único punto de vista del álgebra lineal, como cardinalidad de un conjunto y donde el cálculo de la dimensión pasa a ser un asunto algorítmico sin significado. Ésta podría ser la razón, como reflejo de lo que se enseña, del poco significado de dimensión que los estudiantes muestran a través de sus respuestas; manteniendo el significado euclídeo aprendido en la etapa anterior, en la escuela primaria.

Mantener sólo este «significado» primario dificulta el poder hablar de una dimensión mayor que 3, ya que no se puede imaginar o visualizar, ni tampoco se puede hablar del espacio que ocuparía, de la misma forma concreta y finita a la que se alude.

No han aflorado en los estudiantes ideas intuitivas o asociadas al movimiento, aunque en física se aborde la dimensión desde esta perspectiva. Tal vez esto pueda ser debido a la compartimentación del conocimiento. Sólo dos alumnos y sólo en el caso de R^3 han nombrado las coordenadas de un punto. Justifican la dimensión 3 apoyándose en que los puntos del objeto tienen tres coordenadas y pueden ubicarse en el plano tridimensional. En la sec. 3.1, hemos visto que si bien se trabaja en esta etapa de la escolaridad con el plano cartesiano y el espacio tridimensional, así como con los vectores en el plano, no hay conexión con la dimensión de los objetos matemáticos, lo cual justificaría lo anterior.

Tampoco aflora relación alguna del exponente R^2, R^3, m^2, m^3, etc., con la dimensión, lo cual facilitaría el paso de la concepción euclídea a la de Hausdorff. Como hemos visto, en esta etapa no se trabaja con la parametrización de las curvas, con lo cual tampoco puede aflorar este acercamiento a la dimensión. La respuesta que dan algunos estudiantes, al justificar que la recta tiene una dimensión por ser una sucesión de puntos, podría servir de germen para iniciarse en la dimensión topológica, reformulando el germen topológico que había en las formulaciones de Euclides. Una figura es unidimensional si su frontera está compuesta de puntos, lo cual permitiría hablar de la dimensión de la parábola y de las curvas que se estudian en la etapa escolar que estamos estudiando. Una figura es bidimensional si su frontera está compuesta de curvas, y tridimensional, si su frontera está compuesta de superficies.

La poca riqueza de ideas y esquemas conceptuales asociados a la noción de dimensión que hemos encontrado parece ser consecuencia de la «invisibilidad institucional» de la que ya hemos hablamos anteriormente.

A MODO DE CONCLUSIÓN

A partir del análisis y los resultados presentados a través de tres acercamientos: histórico-epistemológico, análisis de textos y a las ideas y esquemas conceptuales de estudiantes universitarios, se pudieron señalar aspectos de interés desde el punto de vista didáctico, de la enseñanza y aprendizaje de la noción de dimensión en el sistema escolar venezolano.

Hemos visto que el concepto de dimensión ha venido evolucionando en los últimos cien años. Al principio se conocía la denominada dimensión euclidiana, hoy en día además se trabaja con otras dimensiones como la topológica y la dimensión fractal. Su desarrollo y su epistemología nos revelan ideas, conceptos y teorías cruciales para el desarrollo de la dimensión fractal y para entender aspectos particulares de la dimensión.

La dimensión, que comienza aceptada por los matemáticos desde lo intuitivo y observable, se mantiene (su concepción entera) coherente (invariable) a lo largo del desarrollo de las matemáticas y de las nuevas teorías, llegando a formalizarse, pasando de lo concreto a lo abstracto, de lo visible a lo no observable, de su naturaleza entera a la fraccionaria, de lo intuitivo a lo contraintuitivo. Noción sutil y con interpretación a veces «natural», aparentemente sencilla pero formalmente muy compleja y que termina hasta el punto de «definir» a ciertos conjuntos llamados fractales, que cualitativamente expresan de una «mejor» manera características de los objetos tales como: irregularidad, porosidad, fragmentación y rigurosidad.

A la luz del acercamiento histórico-epistemológico que hemos presentado hemos podido, desde el interés escolar que nos ocupa, vislumbrar «requerimientos» para el aprendizaje de dimensión, que podrían ser desarrollados a lo largo de la escolaridad, y que permitirían introducir la de Hausdorff y fractal. Favorecerían no sólo esquemas conceptuales ricos asociados a esta noción, sino también poder comprender el salto epistémico que se produce en el paso de la dimensión euclídea a la fractal. Estos requerimientos apuntan hacia la necesidad de una transposición didáctica nueva, y a estudios que permitan conocer cuáles podrían considerarse como primordiales y fundamentales en el sistema escolar, y para la incorporación y/o comprensión de los objetos fractales.

Hemos encontrado que la introducción de la noción de dimensión fractal en secundaria tiene que superar primero un obstáculo importante, la ausencia casi total en la actividad escolar (reflejada por los libros de texto que siguen el currículo oficial actual), del término dimensión y referencia a esta noción en sus distintas concepciones. Además, cierto tratamiento ínfimo de la noción de dimensión no tiene base epistemológica suficiente; en primaria la concepción que se presenta es la euclídea. Otro obstáculo que hay que vencer es la concepción de utilidad y algorítmica que impregna el currículo, que no permite una formación matemática más completa y con perspectiva de futuro, y en especial no permite, ante el poco tratamiento, el desarrollo de los conceptos, la introducción y comprensión epistemológica de las nociones que se van tratando.

La consecuencia de la invisibilidad institucional del concepto de dimensión ha sido la causa que hemos inferido de que los esquemas conceptuales asociados a la noción de dimensión de los estudiantes que hemos encuestado sean poco ricos. Las respuestas de los alumnos mostraron, de la caracterización del esquema conceptual, las ideas asociadas a la noción de dimensión (prácticamente vinculada a una única concepción), mas no evocaron procedimientos, propiedades, representaciones e imágenes del concepto.

Los alumnos, en su mayoría, saben justificar la dimensión de un cubo desde lo ancho, largo y profundo; sin embargo, son inconsistentes cuando hablan de la dimensión de una recta, siendo la concepción finitista de punto, con dimensión, ancho y largo, un obstáculo para visualizar la recta con dimensión 1. Una minoría pudo explicitar alguna frase que pudiera definir la dimensión.

Tanto desde el interés del concepto de dimensión como desde el de introducir la dimensión fractal en este nivel podemos afirmar que se necesita hacer «visible» institucionalmente la dimensión, que sea más significativa matemáticamente y vehículo que permita presentar una matemática más moderna. Una posible recontextualización (atendiendo a los «requerimientos» que el desarrollo histórico epistemológico de la noción evidencia) y una transposición didáctica nueva, podrán ser objeto de otras investigaciones.

NOTAS

1. Traducido como «esquema conceptual» por Azcárate (1990).
2. Estos profesores formaban parte de un curso de postgrado, especialización en Didáctica de las Matemáticas para Educación Media de la Universidad Simón Bolívar.
3. En su libro *Calcolo geométrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva.*
4. El número de la dimensión de un sistema lineal es el máximo número de objetos linealmente independientes en dicho sistema.
5. Esta caracterización de estos objetos es utilizada en nuestra educación a nivel «visual» con la finalidad de darle forma, representación a nociones, ideas, conceptos, procesos y establecer las relaciones matemáticas con los objetos matemáticos que ellos representan y este uso concuerda con el empleo que se le da a la visualización, como uno de los procesos que ha caracterizado al conocimiento matemático. Éste se entiende como dar «forma» mental o física a determinados conceptos y procedimientos matemáticos, no necesariamente «figurados» (Guzmán, s/f; Caamaño y Aravena, 2000)
6. *Ausdehnungslehre* (Teoría de la extensión).
7. *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H.Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva.*
8. *1.* (a = b) si y sólo si (b = a), si (a = b) y (b = c) entonces (a = c). *2.* La suma de dos objetos a y b está definida, es decir, el objeto está definido y se denota por a + b, y también pertenece al sistema, el cual satisface: Si (a = b) entonces (a + c = b + c), a + b = b + a, a + (b + c) = (a + b) + c, y el valor común de la última igualdad está denotado por a + b + c. *3.* Si a es un objeto del sistema y m es un entero positivo, entonces entendemos por ma a la suma de m veces el objeto a. Es fácil ver que los objetos denotados por a, b… son del sistema y m, n,... serán los enteros. Si (a = b) entonces (ma = mb), m(a+b) = ma+mb, (m+n)a = ma+na, m(na) = mna, 1a = a. Se puede suponer que para cualquier número real m será tal que la notación ma en las ecuaciones últimas serán válidas. *4.* Existe el objeto 0 en el sistema y 0a = 0. Además, a - b significa a + (-b), a - a = 0 y 0 + a = a. (O' Connor y Robertson, 1996).
9. «Las condiciones para asignar una medida a una superficie son: 1) Se ha de asignar la misma medida a figuras congruentes en un plano. 2) Las sumas de las medidas asignadas a cada una de las dos partes componentes de una superficie ha de ser igual a la medida asignada a la superficie original. 3) Llamando S a toda la superficie de una esfera de radio r, la medida asignada ha de ser $4\Pi r^2$» (Kasner y Newman, 1976: 330).
10. Un objeto tiene dimensión topológica m cuando cualquier recubrimiento de ese objeto tiene como mínimo una dimensión topológica igual a m+1. Aún más formalmente: la definición para conjuntos con dimensión topológica 0 queda como sigue: se dice que un conjunto F tiene dimensión topológica 0, DT (F) = 0 si y sólo si para todo x perteneciente a F y cualquier conjunto abierto U (para la topología relativa de F) que contenga a x, existe un abierto V tal que x pertenece a V que está incluido en U y la frontera de V con la intersección a F es vacía (Hahn, 1976).
11. En los fractales, la dimensión de Hausdorff-Besicovitch es mayor que su dimensión topológica. Es la dimensión de un espacio métrico compacto X, donde d es un número real, tal que si n (ϵ) denota el número mínimo de conjuntos abiertos cuyos diámetros son iguales o menores que ϵ, entonces n (ϵ) es proporcional ϵ^{-D} cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Explícitamente, $d \equiv - \lim (\ln N / \ln \epsilon)$ con $\epsilon \rightarrow 0^+$ (si el límite existe), donde N es el número de elementos que forman un cubrimiento finito del espacio métrico X y ϵ es límite de los diámetros de los conjuntos implicados (Informalmente, ϵ es el tamaño de cada elemento utilizado para cubrir el conjunto, el cual se acerca a cero) (Weisstein, 1999).
12. El círculo de la forma $(x, \sqrt{4-x^2})$ puede ser visto como un objeto unidimensional, mientras que geométricamente puede ser visto como un objeto de dos dimensiones (Bitsas y Koleza, 2000).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALINE, R. y SCHWARZENBERGER, R. (1990). Research in teaching and learning mathematics at an advanced level, en Tall, D. (ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht/ Boston/London: Kluwer Academic Publisher.

ARTIGUE, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 10(2-3), pp. 241-286.

ARTIGUE, M. (1992). The importance and limits of epistemological work in didactics, en Geesling, W., Graham, K. (eds.*). Proceedings of the 16th Annual Meeting of Psychology of Mathematics Education 16*, 3, pp. 195-216.

AZCÁRATE, C. (1990). *La velocidad: introducción al concepto de derivada*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

BERGE, A. y SESSA, C. (2003). Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación Educativa*, 6(3), pp. 163-197.

BITSAS, T. y KOLEZA, E. (2000). Students perception on the concept of dimension, en A. Gagatsis y G. Makrides (eds.). *Proceedings of the 2nd Mediterranean Conference of Mathematics Education*, pp. 108-119. Nicosia (Cyprus), Grecia: Cyprus Pedagogical Institute.

BITSAS, T., KOLEZA, E. y SKORDOULIS, K. (1997). The historical development of the concept of dimension: from Euclid's to fractal geometry, en G. Makrides (ed.). *Proceedings of the 1st Mediterranean Conference of Mathematics: Mathematics: Didactics and Applications,* pp. 237-246. Nicosia (Cyprus), Grecia: Cyprus Pedagogical Institute.

BLISS, J., MONK, M. y OGBORN, J. (1983). *Qualitative data analysis for educational research*. London: Croom Helm.

BLUMENTHAL, L. (1965). *Geometría Axiomática*. Madrid. España: Aguilar.

BOYER, C. (1999). *Historia de la Matemática*. Madrid, España: Alianza Editorial.

BRETT, E. (2003). *Actividades de Matemática*. Caracas, Venezuela: Corporación Marca S.A.

CAAMAÑO, C. y ARAVENA, M. (2000). *Un aporte de la geometría para mejorar la calidad de los aprendizajes de álgebra lineal en ingeniería*. Chile: Instituto de Ciencias Básicas, Universidad Católica del Maule.

CALVO, C. (2001). Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

CANTORAL, R. y FARFÁN, R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo*. México: Thomson Learning International.

CHAMORRO, C. (2003a). El tratamiento escolar de las magnitudes y su medida, en Ma del C. Chamorrro (coord.). *Didáctica de las Matemáticas,* pp. 221-243. España: Pearson/ Prentice Hall.

CHAMORRO, C. (2003b). Las magnitudes multilineales: la superficie y el volumen, en Ma del C. Chamorrro (coord.). *Didáctica de las Matemáticas,* pp. 245-272. España: Pearson/Prentice Hall.

CHEVALLARD, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del Saber Sabio al Saber Enseñado*. (Gilman, C., Trad.). Buenos Aires, Argentina: AIQUE. (Trabajo original publicado en 1991).

COOLIDGE, J. (1947). *A History of Geometrical Methods,* Oxford: University Press.

DESCARTES, R. (1947). *La Geometría* (Rossell, P., Trad.). Buenos Aires, Argentina: Espasa Calpe Argentina S.A. (Trabajo original publicado 1637).

EUCLIDES (1991). *Elementos I-IV* (Puestas, Mª L., Trad.). Madrid, España: Gredos. (Trabajo original publicado 1482).

EUCLIDES (1994). *Elementos V-IX*. (Puestas, Mª L., Trad.). Madrid, España: Gredos. (Trabajo original publicado 1482).

EUCLIDES (1996). *Elementos X-XIII*. (Puestas, Mª L., Trad.). Madrid, España: Gredos. (Trabajo original publicado 1482).

FARFÁN, R. (1997) *Ingeniería didáctica: un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamericano.

FIGUERA, J. (1994). *Matemática 7. Séptimo grado*. Caracas, Venezuela: CO-BO.

FIGUERA, J. (1998). *Matemática 9. Noveno grado*. Caracas, Venezuela: CO-BO.

FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical. Structures*. Dordrecht: Reidel.

GARBIN, S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8 (2), pp. 169-193.

GARBIN, S. y MIRELES, M. (2005). Fractal: Ideas y Percepciones de Estudiantes entre 15 y 17 años. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* Chiapas, 8, pp. 101-107.

GID, J. (1998). *Selección de temas de MATEMATICA*. Caracas, Venezuela: Publicaciones Monfort.

GIMÉNEZ, R. (1973). *Matemáticas V. 2º año/Ciclo Diversificado*. Caracas, Venezuela: Ediciones ENEVA.

GÓMEZ, M. (2000). Análisis de contenido cualitativo y cuantitativo: Definición, clasificación y metodología. *Revista de Ciencias Humanas*, 20. Recuperado Junio 15, 2006, de http://www.utp.edu.co/~chumanas/revistas/revistas/rev20/gomez.htm

GUZMAN, M. de (2002). The Role of Visualization. In the Teaching and Learning of Mathematical Analysis. *Proceedings of the 2nd International Conference on theTeaching of Mathematics (at the undergraduate level)*. Creta, Grecia. Recuperado de http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/invGuz.htm

HACYAN, S. (1998) *Los hoyos negros y la curvatura del espacio-tiempo y la curvatura del espacio-tiempo*. (2da. Edición). [En línea] Fondo de Cultura Económica. Recuperado el 18 de septiembre de 2005, de http://omega.ilce.edu.mx:3000/sites/ciencia/volumen1/ciencia2/50/html/hoyos.html

HAHN, H. (1976). La crisis de la intuición. En Newman, J. *Sigma El Mundo de las Matemáticas 5*, pp. 342-362. España: Ediciones Grijalbo S.A.

JIMÉNEZ, R. (1973). *Matemática. 1er Año Ciclo Diversificado*. Caracas, Venezuela: Ediciones EVEVA.

KANT, I. (1978). *Crítica de la razón pura* (Ribas, P. Trad.). Madrid, España: Alfaguara. (Trabajo original publicado 1781).

KASNER, E. y NEWMAN, J. (1976). Paradoja perdida y paradoja recuperada. En Newman, J. *Sigma El Mundo de las Matemáticas 5*, pp. 323-342. España: Ediciones Grijalbo S.A.

MANDELBROT, B. (1984). *Los objetos fractales*. Barcelona, España: Metatemas *13*.

MANDELBROT, B. (1993). *La geometría fractal de la naturaleza*. Barcelona. España: Tusquets.

MENDIOLA, E. (1998a). *Matemática 4º Año. 1er Año de Ciencias*. Guarenas, Venezuela: Biosfera C.A.

MENDIOLA, E. (1998b). *Matemática 8º*. Guarenas, Venezuela: Biosfera C.A.

MORENO, L. (1996). La demostración en perspectiva. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*. 1 (1), pp. 123-136. Recuperado de http://www.comie.org.mx/revista/Pdfs/Carpeta1/1invest8.pdf

NEUGEBAUER, O. (1975). *A History of Ancient Mathematical Astronomy,* 3, Berlin–Heidelberg–New York: Springer Verlag.

NEWMAN, J. (1968). Descartes y la geometría analítica. En Newman, J. *Sigma El Mundo de las Matemáticas 1*, pp. 166-178. España: Ediciones Grijalbo S.A.

O'CONNOR, J. y ROBERTSON, E. (1996). *Abstract linear spaces*. (Octubre 02, 2004) de http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Abstract_linear_spaces.html#40

PUIG, L. (1997). Análisis Fenomenológico. En Rico, L. y otros. *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*, pp. 61-94. Barcelona: Editorial Horsori.

RAÑADA, M. (2003). David Hilbert, Hermann Minkowski, la Axiomatización de la Física y el Problema número seis. En *La Gaceta*, 6 (3), pp. 641-664. Recuperado de http://www.rsme.es/gacetadigital/vernumero.php?id=4

RODRÍGUEZ, A. (2005, 4 de julio). *Las muchas dimensiones del mundo físico*. (Diciembre 05, 2005) de *http://www.epsilones.com/paginas/t-historias1.html*

RUIZ, L. (2001). La invisibilidad institucional de los objetos matemáticos. Su incidencia en el aprendizaje de los alumnos, en Chamorro, C. (ed.). *Dificultades del aprendizaje de las matemáticas*, pp. 229-263. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Instituto Superior de Formación del Profesorado.

SARABIA, J. y BARRAGÁN, F. (1976). *Matemática II año*. Caracas, Venezuela: CO-BO.

SIERRA, M., GONZÁLEZ, M. y LÓPEZ, C. (1999). Evolución histórica del concepto de *Límite Funcional* en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria (COU): 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias*, 17 (3), pp. 463-476.

SIERRA, M. (2000, 15 de Marzo). *Dimensiones*. (Septiembre 09, 2002) de http://www.arrakis.es/~sysifus/index.html

SIMÓN, J., GONZÁLEZ, R., CASANOVA, B., GONZÁLEZ, L., PALACIOS, ÁLVAREZ, C. y SOTO, G. (2003), *Retos Multiáreas 6*. Caracas, Venezuela: Excelencia C. A.

SUÁREZ, E. y DURÁN, D. (2002a). *Matemática 7*. Caracas, Venezuela: Santillana.

SUÁREZ, E. y DURÁN, D. (2002b), *Matemática 8*. Caracas, Venezuela: Santillana.

VAGN LUNDSGAARD, H. (s/f). *Geometría Eterna*. Recuperado en (Febrero 12, 2005) de: http://www2.mat.dtu.dk/people/V.L. Hansen/math.html

TALL, D. y VINNER, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular references to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2), pp. 151-169.

TALL, D. (1995). Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. *Actas del PME* 19, 1, pp. 61-75.

THOMPSON, P. (2000). What is required to understand fractal dimension? *The Mathematics Educator*, 10 (2), pp. 33-35. Recuperado de http://jwilson.coe.uga.edu/DEPT/TME/issues/v10n2/2thompson.pdf

TURNBULL, H. (1968). Los grandes matemáticos. En Newman, J. *Sigma El mundo de las Matemáticas 1*, pp. 4-94. España: Ediciones Grijalbo S.A.

VON HELMHOLTZ, H. (1968). Sobre el origen y significación de los axiomas geométricos. En Newman, J. *Sigma El Mundo de las Matemáticas 4* , pp. 242-263. España: Ediciones Grijalbo S.A.

WEISSTEIN, E. (1999). Capacity Dimension. From *MathWorld*. A Wolfram Web Resource. Recuperado en (Septiembre 23, 2004) de: http://mathworld.wolfram.com/CapacityDimension.html

WOODS, P. (1987). *La escuela por dentro. La etnografía en la investigación educativa*. Barcelona: Paidós.

[Artículo recibido en marzo de 2008 y aceptado en octubre de 2008]

A study of the process of teaching and learning the notion of dimension in mathematics

Garbin, Sabrina[1] y Mireles, Miriam[2]
[1] Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas. Universidad Simón Bolívar, Venezuela.
[2] CEINEM-NT. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Venezuela.
sabrinagarbin@gmail.com
miriam.mireles@gmail.com

Abstract

This article presents a study on the notion of dimension from three approaches: historical-epistemological, teaching practice and cognitive approach.

We acknowledge that there is little rigorous cognitive research that explores the perceptions and intuitive ideas of students on fractals and, therefore, it does not justify the what, how and praxis of a possible integration of these mathematical objects in a curriculum as a tool or strategy for other types of learning. Initially, we began our research with the purpose of exploring the ideas and perceptions of pre-college students on fractals. For the most part, they perceive and characterize them as infinite processes or infinite successions with non determined characteristics (Garbin & Mireles, 2005).

The fractal dimension defines the object and is a key in approaching element its complexity. Like the topological dimension, it is based on the Euclidean dimension. This brings us to ask ourselves about the capacity of the student to perceive and understand the Euclidian dimension. What are the ideas and conceptions of the pre-college students on this notion? What are the necessary fundamental conceptual requirements for understanding this dimension? Is the concept image of the students rich enough to understand the topological fractal dimension? The need for a framework to answer these questions and analyze the responses of the subjects participating in this study brings us to propose a historic, epistemological study of the dimension and academic situation through the analysis of text books.

The article includes the theoretical foundation and the precedents, including general and specific methodologies. The analysis and outcomes are presented taking into consideration the three approaches mentioned previously and the cognitive results from university students. This work, wich is explorative in character, makes it possible to provide data on the issue at hand and point out aspects of interest from the perspective of teaching of the notion in the Venezuelan school system.

From the analysis and results, we have seen that the concept of the dimension has been evolving in the last hundred years. Its development and epistemology reveal concepts and theories that are crucial for the development of the fractal dimension and the understanding of particular aspects of the dimension. From the academic point view that we are concerned, we have glimpsed «requirements» for learning this dimension that could be developed along the curriculum and that would allow the introduction of Hausdorff and fractal.

We have found that the introduction of the notion the of fractal dimension in secondary education has to, first, overcome an important obstacle the almost total absence in the teaching of the term dimension and reference to this notion in its different conceptions. The consequence of the «institutional invisibility» of the concept dimension has been the cause we have inferred for the concept image associated to the notion of t dimension not being so rich among the students participating in this study. Students responses showed on understanding of the concept image and the ideas associated with the notion of dimension (practically linked to a single conception), but did not suggest on understanding of procedures, properties, representations and images of the concept.

Both, from the interest of the concept of dimension as well as from the interest of introducing fractal dimension at this level, we can affirm that there is a need to make «visible» the dimension at the institutional level so it becomes more meaningful mathematically and a vehicle for enabling the presentation of more modern mathematics . A possible re-contextualization (attending to the «requirements» of the historical epistemological development of the notion) and a new didactical transposition could be the subjects of other research.