ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
Revista de investigación y experiencias didácticas

Núm. 30.3 (2012): 237-256
ISSN: 0212-4521

EL ROL DEL TIEMPO EN UN PROCESO DE MODELACIÓN UTILIZANDO VÍDEOS DE EXPERIMENTOS FÍSICOS

THE ROLE OF TIME IN A MODELING PROCESS THAT USES VIDEOS OF PHYSICS EXPERIMENTS

Astrid Morales[1,3], Jaime Mena[1,3,4], FranciscoVera[2,3,5] y Rodrigo Rivera[2,3,5]
[1] Instituto de Matemática. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
[2] Instituto de Física. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
[3] Proyecto Fondef TE10I012
[4] Proyecto Fondecyt 1110988
[5] Proyecto Fondecyt 1110713

RESUMEN: En este trabajo se investiga el rol que cumple el tiempo en un proceso de modelación que busca favorecer la construcción de conocimiento matemático en alumnos universitarios. En ese proceso se evidencia la funcionalidad de las gráficas para describir un fenómeno físico, usando la técnica *track moving objects*. La investigación utiliza una perspectiva socioepistemológica para analizar las prácticas de modelación-graficación de alumnos de primer año de la carrera de Matemáticas de una universidad chilena enfrentados al estudio del movimiento de proyectiles.

PALABRAS CLAVE: conocimiento funcional, resignificación, modelación, graficación, socioepistemología.

ABSTRACT: This paper investigates the role of time in a modeling process that aims to favour the construction of mathematical knowledge in university students. That process shows the functionality of graphics to describe a physical phenomenon by using the *track moving objects* technology. This research uses a socioepistemological approach to analyze the practices of modeling-graphing by Mathematics majoring freshmen facing the study of projectile's motion in a Chilean university.

KEY WORDS: functional knowledge, redefining, modeling, graphing, socioepistemology

Fecha de recepción: mayo 2011 • Aceptado: diciembre 2011

Para citar: Morales, A., Mena, J., Vera, F. y Rivera, R. (2012). El rol del tiempo en un proceso de modelación utilizando videos de experimentos físicos. Enseñanza de las Ciencias, 30 (3), pp 237-256

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Antecedentes

La socioepistemología postula que la *modelación* genera conocimiento matemático, ya sea esta pensada como una práctica (Arrieta, 2003) o como la categoría graficación-modelación (Cordero, 2010; Suárez, 2008). En el caso que presentaremos, existen elementos que juegan un rol importante, como son las gráficas y el tiempo.

Para Blomhoj (2004) y otros autores, la "modelización matemática" puede ser vista como una práctica de enseñanza que explicita la relación entre el mundo real y la matemática en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Esto último es relevante para cualquier nivel de enseñanza, ya que las actividades de modelización pueden motivar el proceso de aprendizaje y además ayudar al alumno a establecer raíces cognitivas sobre las cuales construir matemática.

Esta investigación surge como parte del diálogo entre físicos y matemáticos en torno al *Proyecto Galileo* (ver apéndice. *Cf.* además Vera, 2009; Vera y Rivera, 2011). Este proyecto contiene una galería de experimentos de física registrados en vídeo y disponibles en una página web de libre acceso, y su propósito es que los estudiantes formulen modelos físicos que les ayuden a comprender de mejor manera ciertos contenidos de la física. En su propuesta metodológica, el Proyecto usa la tecnología de seguimiento de objetos en movimiento que permite –desde las imágenes grabadas y con un simple "*clic* del ratón"– obtener datos (coordenadas) y, con ellos, generar gráficas que se pueden utilizar para interpretar y analizar el fenómeno físico en cuestión.

La metodología utilizada en el Proyecto podría tener el problema habitual que surge cuando se usa tecnología (por ejemplo, sensores) para obtener coordenadas relativas a un fenómeno de movimiento: primero se producen imágenes, luego estas proporcionan datos con los cuales el software construye gráficas que ayudarían a entender el fenómeno físico planteado apoyándose en algún modelo explícito. Se observa que existe una discontinuidad entre la imagen que registra el aparato electrónico y la graficación apropiada de los resultados obtenidos; en esta investigación abordamos esta discontinuidad.

Sin duda, el uso de las gráficas genera un tema de discusión. Por ejemplo, desde el punto de vista de la física, la gráfica cumple un papel fundamental y no comprender su vinculación con los modelos físicos provoca dificultades (L. C. McDermott *et al.*, 1987). En el discurso matemático escolar[1] DME, la gráfica es concebida como una simple ilustración –a nivel de visualización– que ayuda a una explicación, pero que en sí no es un objeto matemático (contenido, conceptos, etc.) que nos sirva para argumentar matemáticamente. En otras palabras, para los profesores de matemáticas la argumentación gráfica y las gráficas no son válidas en un proceso, por ejemplo, de evaluación de contenidos. Esto es coincidente con la mirada semiótica que hace Duval en relación con las gráficas de funciones, por ejemplo.

Problemática

Desde la mirada socioepistemológica, la *modelación* construye conocimiento matemático (Cordero, 2010; Suárez, 2008) y, pensado así, nuestra investigación está estructurada a la manera del *modus ponens*[2]. De esta forma, nuestra problemática se centra en el proceso de modelación, en el que inter-

1. El discurso matemático escolar es la manifestación del conocimiento matemático normado por creencias de los actores del sistema didáctico de lo que es la enseñanza y lo que es la matemática.

2. *Modus ponens* en el sentido de que las ciencias aparentemente tratan de causa y efecto, pero en realidad es preferible hablar de antecedentes y consecuentes. En lenguaje matemático simple $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$. Lo que hemos dicho es que consideramos válida $(p \Rightarrow q)$, y tenemos que dar evidencia de p (ie., si se tiene evidencia del antecedente se tiene del consecuente).

vienen elementos que se articulan y ayudan a construir conocimiento: las *gráficas*, que adquieren un estatus que difiere de lo que comúnmente se trata en el DME; la *variación*, que permite la conexión de un modelo matemático (variacional parabólico) con un modelo físico (de la cinemática), y el *rol del tiempo*, que ayuda a la funcionalidad de las gráficas, entendiendo esta última como un conocimiento incorporado orgánicamente en el humano que lo transforma y que le transforma su realidad.

El tiempo cumple distintos roles en el proceso de modelación, y facilita el tránsito desde el análisis inicial de la situación experimental hacia la creación de un modelo matemático propiamente tal. La graficación inmediata que proveen muchos softwares no ayuda a identificar el rol del tiempo en esa gráfica, perdiéndose la oportunidad de ubicar el tiempo en una órbita y así entender el concepto variacional implícito en el modelo.

Desde el análisis del uso de la tecnología en la enseñanza, el Proyecto Galileo es un ejemplo en el cual se puede perder una oportunidad de que los estudiantes manejen los datos para apropiarse de un modelo. Estos pueden, por ejemplo, obtener el modelo cuadrático que les proporciona una planilla Excel sin mayor justificación. Dejando al estudiante sin este recurso (Excel, gráficas que ajustan los datos) y aprovechando el impulso de querer graficar, se lo obliga a un entendimiento tal de la gráfica que le permite comprender el fenómeno bajo estudio vía la ubicación del tiempo en el sistema de coordenadas. La comprensión cabal de las gráficas le permite conectar el conocimiento cotidiano de la cinemática con las expresiones matemáticas del fenómeno, dándole significado a esta última.

Lo anterior es muy congruente con el planteamiento socioepistemológico de que a través de las gráficas es posible argumentar y predecir (*cf.* Cordero, 2006) ciertos comportamientos que luego el estudiante debe relacionar con los conocimientos propios de la física y eventualmente con un modelo matemático.

A continuación abordaremos los tres aspectos que consideramos los ejes centrales en nuestra problemática.

La argumentación gráfica

La argumentación gráfica es una componente explícita y relevante para el Proyecto Galileo, y es de importancia para nuestra investigación. En el ámbito de la física, el rol que cobra la gráfica es preponderante para entender, construir o profundizar en esa disciplina, ya que la argumentación gráfica permite entender el fenómeno bajo estudio y crear un modelo físico. Por ejemplo, L. C. McDermott, M. L. Rosenquist y E. H. van Zee (1987: 513) afirman que la habilidad para dibujar e interpretar una gráfica es una de las más importantes que desarrollar en el estudio de la física y que, para poder utilizarla en la ciencia, los estudiantes deben saber interpretarlas correctamente.

La argumentación gráfica se ubica en un estatus privilegiado en el aprendizaje de la física, y se considera como una herramienta muy útil que permite poner los conocimientos en juego en un nivel funcional, estatus al que se da poca importancia o que no se reconoce en el DME. Dicho en términos generales: en la física (y en muchas otras áreas del conocimiento) la argumentación gráfica es recurrente (*cf.* por ejemplo, en la perspectiva socioepistemológica, Lara, 2007; Cordero y Flores, 2007); sin embargo, los profesores de matemática, en general no promueven, y menos validan, la argumentación gráfica, ya que para ellos las gráficas suelen ser solo una representación de objetos matemáticos (Cordero *et al.*, 2010; Suárez, 2008; Morales, 2009).

En esta investigación hemos asumido una perspectiva socioepistemológica por dos motivos. Uno es de tipo pragmático: esta propone que el conocimiento no preexiste, sino que se va construyendo, y en este caso la argumentación gráfica ayuda a esa construcción. El otro es que esta teoría reconoce a la modelación-graficación como práctica que genera conocimiento, en la cual la argumentación gráfica permite resignificar ese conocimiento matemático. *Resignificar* quiere decir la construcción del conocimiento mismo en la organización del grupo humano, normado por lo institucional; es decir, será el uso del conocimiento en la situación donde se debate entre su funcionamiento y forma acorde con lo que organizan los participantes (Cordero, 2006*b*).

La argumentación gráfica tiene dos focos relevantes en el proceso de modelación, uno alude a la representación de una variación, como lo manifiesta el trabajo de Oresme, y el otro es que desde una gráfica se visualiza la variación, como en el caso de Newton.

Oresme, en su *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*, en 1379, propuso representar a través de figuras geométricas el modo en que las cosas varían, y además la idea de la *cantidad continua*, como se ve en la figuras.

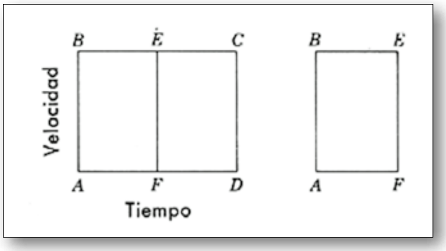


Fig. 1a. Variación uniformemente uniforme.

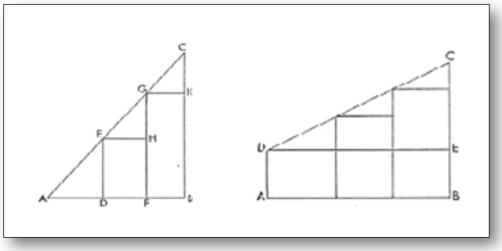


Fig. 1b. Variación uniformemente deforme.

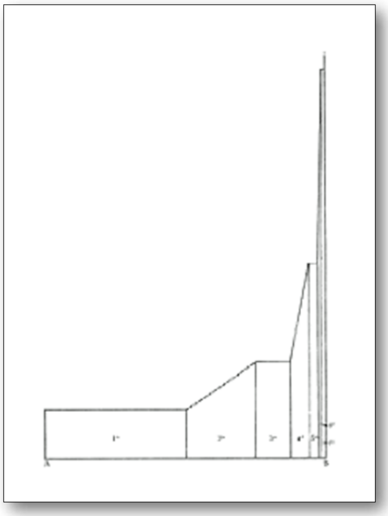


Fig. 1c. Variación deformante deforma.

Posteriormente, Newton hace uso de su método de las fluxiones (derivadas) para encontrar las tangentes a diferentes tipos de gráficos. Reflexiona sobre la *velocidad del cambio* o fluxión de magnitudes que fluyen continuamente. Él denominó "mi método" a la asociación del manejo de las series infinitas con el estudio de las velocidades de cambio, obteniendo de esta manera lo que conocemos hoy como el teorema fundamental del cálculo (Morales, 2009). Los trabajos de Newton son esenciales para señalar que el estudio de la variación local describe el desarrollo posterior del fenómeno de evolución (práctica de la predicción).

Sobre la base de los datos históricos relacionados con el desarrollo del análisis gráfico de funciones de estos grandes pensadores, se confeccionó la situación planteada a los estudiantes y se contextualizó para que ellos pudieran intentar explicar el movimiento de objetos. Esperábamos, por ejemplo, ver la relación de las fluxiones de Newton (Newton, 1786: 46) con las curvas que se generan a partir de puntos en el desplazamiento.

La modelación

a) Modelación matemática

Es evidente que las ciencias en general han apoyado su desarrollo en el uso de modelos, creando con ellos nuevos conocimientos y nuevas "realidades" que les han permitido avanzar, así como realizar nuevas preguntas de investigación y responder a estas (González *et al.*, 2011). Esto se ha hecho con distintas concepciones de lo que es un modelo. Para explicitar esta idea recurriremos a algunos autores que se han referido al tema.

Por ejemplo, el biomatemático Bassanezi (2002) afirma que "un modelo matemático es una aproximación conveniente de la realidad analizada y, por lo tanto, no encierra una verdad definitiva y está sujeta a cambios. Este proceso dinámico de buscar un modelo adecuado como prototipo de determinadas entidades es llamado modelación matemática". Giordano (Giordano *et al.*, 1997: 34), quien tiene una concepción similar a la de Bassanezi, considera, además, gráficas, símbolos, simulaciones y construcciones experimentales como parte del modelo, es decir, no se restringe solo a objetos matemáticos.

Biembengut (1997: 89, citado por Leal, 1999) asume una perspectiva más extrema y considera que un modelo matemático es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen, de alguna forma, un fenómeno en cuestión o un problema de situación real.

b) Modelación física

En la física la modelación forma parte natural de la construcción del conocimiento por expertos que utilizan el método científico iniciado con los trabajos de Galileo. En el estudio de un fenómeno de la naturaleza, el físico profesional busca una aproximación al fenómeno a través de una selección de sus aspectos más relevantes y la construcción –sobre la base de hipótesis– de un modelo matemático que describa dichos aspectos. El modelo así construido es de naturaleza hipotético-predictiva (Lawson, 2003) y realiza predicciones que son falsificables (en el sentido de Popper, 1999).

c) Modelación en el aula

La modelación en el aula juega también un rol preponderante en la metodología constructivista para la generación de aprendizajes, en la medida en que sus métodos de enseñanza se centran en el uso y/o construcción de modelos sencillos (Hestenes, 1987).

El Proyecto sitúa la modelación matemática en el aula como una forma de metodología de enseñanza constructivista de la física. En particular, para la elaboración del material curricular, utiliza lo que se conoce en la literatura como *elicit-confront-resolve*. En esta última, el diseño de los materiales se enfoca explícitamente en las dificultades conceptuales que se han reportado como más frecuentes y arraigadas en los estudiantes de física básica, e involucra a los estudiantes activamente en la construcción del conocimiento. Para esto se distinguen tres etapas que describimos a continuación.

En la primera se enfrenta al estudiante a una situación novedosa, en la que sus preconceptos se deberían manifestar; se le pide entonces que analice cualitativamente dicha situación y que explicite su razonamiento haciendo una predicción concreta sobre el comportamiento del sistema (*elicit*). En la segunda etapa se provoca un conflicto cognitivo (*confront*), lo que en el caso del Proyecto Galileo se logra en el laboratorio, al permitir al estudiante participar en la construcción y manipulación de la situación propuesta en la primera etapa, con el objeto de verificar si su predicción del fenómeno es correcta o no lo es. Finalmente, la tercera etapa (*resolve*) consiste en ayudar al estudiante en su propia construcción de los modelos que conduzcan a la resolución del conflicto cognitivo y a la posible aplicación de dicha construcción a nuevas situaciones.

En este último punto (modelación) hay otros trabajos clásicos que han abordado la temática (como por ejemplo Blum *et al.*, 2002); todos ellos presentan la modelación como una forma de lograr aprendizajes constructivistas. Ahora bien, desde esta perspectiva, la matemática puede cumplir dos roles totalmente distintos: uno como herramienta que ayuda a construir y a entender el modelo y el otro como generador de conocimiento matemático. En relación con lo anterior, la socioepistemología considera que la modelación norma la construcción del conocimiento y es una práctica social que genera conocimiento matemático (Cantoral, 2006; Cordero, 2010), y por lo tanto esta debe ser parte del sistema didáctico, incluida en forma intencional en el rediseño del discurso matemático escolar.

En suma, queremos destacar que la modelación debe ser utilizada para generar nuevos conocimientos de alguna área o ciencia y también debe cumplir este mismo rol en el aula para la enseñanza de la matemática.

Rol del tiempo

Muchos fenómenos se asocian a trayectorias que ocultan la variable tiempo, por ejemplo, las trayectorias de los planetas generalmente se dibujan como elipses; estos dibujos contienen de manera implícita el tiempo. Al graficar trayectorias en dos dimensiones, las coordenadas cartesianas están relacionadas con coordenadas de posición y no de tiempo. Para comprender mejor el movimiento es necesario explicitar de alguna forma el tiempo. Por ejemplo, al usar animaciones para mostrar la trayectoria y el cómo se mueve un planeta en torno al sol es necesario generar gráficas apropiadas que evidencien explícitamente el tiempo (aumentando la velocidad cuando corresponda).

En nuestra vida cotidiana también encontramos ejemplos en los cuales el tiempo no aparece de manera explícita; el velocímetro de un coche es uno de ellos: nos informa sobre la rapidez con la que se mueve el coche pero se encuentra oculto el principio de funcionamiento que necesita medir el tiempo.

Cuando el estudiante analiza gráficas provenientes de datos obtenidos del movimiento de objetos, debe tener claro el rol del tiempo, y es justamente en ello donde detectamos que nuestros alumnos presentaban problemas. En general, el tiempo es una variable que en los experimentos trabajados con tecnología (sensores de movimiento por ejemplo) se soslaya. Existen varios trabajos que dan cuenta de la importancia de que el estudiante sitúe el tiempo; por ejemplo, Buendía y Cordero (2005), Cordero (2006), Morales (2009) y otros, en una situación de predicción, utilizan la variable tiempo como elemento gravitante para generar conocimiento. En particular en el diseño de situación del trabajo de Buendía, se obtiene la información de que para poder predecir los estudiantes recurren a una unidad de análisis donde el tiempo es una variable fundamental.

En nuestro caso los estudiantes –al igual que lo hiciera Galileo en su tiempo– obtienen datos para las coordenadas de posición y tiempo desde experimentos. Galileo se enfrentó a la problemática de situar el tiempo en las trayectorias. Esto le permitió determinar las variaciones en la posición de un objeto en un determinado intervalo de tiempo. Con una adecuada utilización de estas nuevas variables logró describir el fenómeno. Utilizó péndulos para medir el tiempo. En los experimentos del Proyecto, los estudiantes hacen *clic* sobre el objeto que quieren estudiar. Con este procedimiento es posible obtener por ejemplo la ley de aceleración uniforme para cuerpos en caída libre.

MARCO TEÓRICO

La aproximación que sustenta nuestra investigación, desde un punto de vista didáctico, es la socioepistemología. Esta es una aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple. Incorpora al estudio las interacciones entre la epistemología del conocimiento y su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza.

La socioepistemología atiende a la construcción del conocimiento matemático y aborda esta construcción con una mirada crítica al DME, resaltando el hecho de que este se centra en los conceptos y no en las prácticas sociales que contribuyen a generar conocimiento matemático. De esta manera, el DME deja la matemática en un nivel utilitario, entendiendo este como aquel que responde a ciertas necesidades "inmutables" de la vida cotidiana (no las transforma), y no en un nivel funcional (Cordero *et al.*, 2010).

A modo de ejemplo: respecto de la caída libre de objetos, el DME tenderá a centrarse en lo que entiende el matemático por parábola; más aún, partiría de ese concepto y la gráfica de posición versus tiempo (obtenida del experimento de caída libre); así, esta sería solamente una representación en la que está presente este objeto matemático.

Importancia de lo funcional

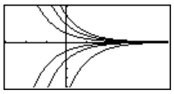
Una manera de lograr que la matemática funcional surja y predomine sobre el carácter utilitario es considerar, desde un punto de vista socioepistemológico, dos aspectos relevantes:

El primero tiene que ver con las prácticas sociales, en el sentido que menciona Buendía (2004) de que "los grupos humanos construyen conocimiento a través de las prácticas socialmente compartidas en las que se involucran" o, como dice Cordero (2001), se deben articular dos grandes componentes, el social y el epistemológico, en los que el humano y su actividad se convierten en elementos primarios en las teorizaciones de la didáctica. De esta forma, la socioepistemología plantea la necesidad de realizar un rediseño del DME basando en las prácticas. En particular se debe considerar la práctica de modelación o, como dice Blomhoj (2004), la variación.

El segundo aspecto tiene que ver con la funcionalidad de la matemática. Por ejemplo, en el cálculo diferencial e integral, estudios socioepistemológicos muestran que lo importante de él es entender la derivada asociada a la variación (variación instantánea), la segunda derivada (variación de la variación) y, en la integral, la acumulación. Entendiendo lo anterior como la construcción de la derivada y de la integral a través de la situación variación.

La siguiente tabla es una forma esquemática de concretar lo que hemos llamado socioepistemología del cálculo (Cordero, 2003), en donde se muestran las ideas antes mencionadas.

Tabla 1.
Socioepistemología del cálculo

Construcciones en las prácticas	*Situación de variación*	*Situación de transformación*	*Situación de aproximación*
Significados	Flujo Movimiento Acumulación Estado permanente	Patrones de comportamiento gráfico y analítico Comportamiento tendencial de la función	Límite Derivación Integración Convergencia
Procedimientos	Comparación de dos estados $f(x+h)-f(x)=\alpha h$ $\alpha = f'(x)$	Variación de parámetros $\alpha = f'(x)$ $y = Af(Bx+C)+D$	Límite de un cociente $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$
Proceso-objeto	Cantidad de variación continua	Instrucción que organiza comportamientos	Función
Argumentación	Predicción E_0+variación = E_f	Graficación – Modelación 	Analiticidad de las funciones $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)h^2}{2!}+\ldots$

La *socioepistemología del cálculo* es el producto de varios trabajos de investigación que permitieron, en particular, establecer lo que se muestra en la tabla 1 y que pasamos a explicar.

La cuarta columna, situación de aproximación, es un resumen de lo que es el DME, es decir, nos muestra la forma tradicional de tratar los temas del cálculo provenientes de las ideas de Cauchy. En oposición a ella, la segunda columna, situación de variación, alude a la práctica de predecir (modelar) vía un pensamiento variacional que construye conocimiento matemático; de esta manera emerge una matemática funcional. Esta situación de variación no está presente en el DME, pero sin duda esta columna está basada en la epistemología de los conceptos de la cuarta columna. Estudios epistemológicos dan cuenta de que las clases tradicionales de cálculo se han distanciado del planteamiento de Newton para centrarse exclusivamente en el discurso de Cauchy (Morales, 2009; Cantoral y Farfán, 2000).

Donde realmente se trastoca lo que es la tradición de la enseñanza de la matemática (DME), es en la tercera columna, situación de transformación, la que cobra cada vez más fuerza con la introducción de la tecnología en las aulas, ya que permite –de forma fácil– obtener muchas gráficas o gráficas dinámicas (variación de parámetros).

La matemática –al ser enseñada– no considera las gráficas como elemento argumentativo; sin embargo, en sistemas dinámicos por ejemplo, la graficación es argumentativa. En el DME la gráfica es solo una representación de un objeto matemático, es decir, no es el objeto. Sin embargo, las gráficas han sido sistemáticamente utilizadas para comprender y desarrollar las distintas ideas de las ciencias (ecología, crecimiento de poblaciones, economía y matemática).

El rol de la modelación-graficación

La socioepistemología, en sus investigaciones –con base epistemológica–, ha evolucionado desde postular que la predicción es una práctica (Cantoral, 2001; Buendía y Cordero, 2005) a que la modelación

(Cordero *et al.*, 2010; Cordero, 2006; Arrieta, 2003) también lo es. Las últimas investigaciones están evidenciando que el binomio modelación-graficación es una práctica institucional (Cordero *et al.*, 2010; Suárez, 2008; Morales, 2009) y debe ser reconocido e introducido en el DME.

Acerca de la modelación-graficación

El binomio *graficación-modelación* ha logrado un estatus relevante para el rediseño del DME, ya que se reconoce como una práctica institucional en una situación específica (Suárez, 2008). Esto está basado, por un lado, en estudios de cómo surgió el conocimiento, como se puede apreciar en la obra de Oresme ya mencionada, y, por otro se evidencia en los trabajos de Suárez (2008) y Morales (2009), donde la graficación-modelación ayuda a construir conocimiento en una situación de modelación del movimiento.

Suárez (2008) evidencia que la graficación-modelación resignifica la variación y que esta es una categoría que está conformada por tres elementos:

a) los datos epistemológicos de la modelación del movimiento;
b) los elementos propios de la modelación-graficación (realizaciones múltiples, identificación de parámetros, realización de ajustes, desarrollo del razonamiento), y
c) las argumentaciones conformadas por significados, procedimientos y procesos (ver tabla 1).

Es importante hacer notar que, desde la matemática, la modelación es simplemente una aplicación. Sin embargo, desde la socioepistemología la modelación-graficación es una práctica que genera conocimiento. Cuando hacemos referencia a la modelación y no al modelo, no nos referimos a que el centro sea encontrar explícitamente el modelo que dé cuenta de algún fenómeno, sino más bien al proceso de modelación, el cual es relevante porque es allí donde los elementos adquieren significados y se articulan para generar conocimiento, llevando de esta forma la matemática a un nivel funcional.

Acerca de elementos que potencian el binomio modelación-graficación

Al emplear por separado las partes que componen este binomio se dificulta la generación de nuevo conocimiento matemático en los alumnos, pero al usar un escenario en el cual una situación de modelación del movimiento cuente con tecnología, se robustece la dupla graficación-modelación, lo que nos permite focalizarnos en otros aspectos del problema.

Otro aspecto que potencia la modelación-graficación es la predicción. Si miramos esta dupla para un modelo que representa el movimiento, la predicción cobra un rol importante; por ejemplo, si estamos frente a una representación gráfica o buscamos un modelo, no basta pensar que existe algo que "sigue", sino que hay que incluir el pensar "cómo sigue"; esto se logra con la práctica de predecir.

Con lo dicho hasta aquí exponemos que la socioepistemología permite estudiar con mayor claridad la propuesta del Proyecto Galileo. La experiencia que estamos reportando contiene elementos importantes para dar inicio a distintas preguntas de investigación que nos aportan ciertos indicadores, permitiendo así articular los elementos necesarios para realizar propuestas que construyan conocimiento.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Desarrollo de la investigación

La investigación tiene su génesis en una experiencia realizada usando la galería de experimentos del Proyecto Galileo (ver apéndice). Para esta investigación, utilizamos el vídeo del experimento generado por el Proyecto, donde se muestra el lanzamiento de un proyectil que sigue una trayectoria parabólica.

Nuestro diseño sitúa al estudiante en el problema declarado anteriormente, ya que lo enfrenta al mismo tipo de obstáculo que tuvo Galileo, esto es, observar una órbita de un móvil y relacionarla con el tiempo. En este caso los estudiantes capturan los datos mediante un *clic* y se les pide que expliquen el fenómeno; ello sin indicarles explícitamente qué procedimiento realizar, con el objeto reanalizar los significados, procedimientos, proceso-objetos y la argumentación en este proceso de modelación.

El DME presenta las gráficas como representación de una función real en R^2; la representación de trayectorias no es abordada en los primeros cursos de cálculo, y por lo tanto el tiempo no es trabajado y se acostumbra a manejar los ejes sin significados. Nuestro diseño busca abordar esta problemática mediante un proceso de modelación donde el estudiante logre dar significado a los ejes mediante la comprensión del rol del tiempo. Para esto, el modelador (el estudiante) deberá plantearse interrogantes tales como: ¿cuál es la columna del tiempo?, ¿dónde está ubicado el tiempo en las gráficas?, ¿cómo se puede ocupar el tiempo en el estudio? Para contestar a este tipo de preguntas, el conflicto entre la trayectoria del objeto en movimiento y la representación de una función se puede canalizar positivamente recurriendo a los patrones gráficos (comportamiento tendencial) con su representación analítica (parábolas) y tratar de organizar estos comportamientos en relación con lo que los alumnos ven (órbitas).

Lo que los alumnos ven en el vídeo es una trayectoria que no explicita el tiempo. Esta trayectoria es parabólica y contrasta con las distintas gráficas que se pueden construir con los datos obtenidos. Los estudiantes pueden graficar dos parábolas que tienen distintos significados y que además están invertidas (en relación con la trayectoria que muestra el vídeo), y también una recta, que es la otra gráfica posible.

El diseño planteado tiene como principal objetivo analizar cómo la variable tiempo es identificada y utilizada por los estudiantes para entender el fenómeno físico observado. En relación con el manejo de datos por parte de ellos, visualizamos dos momentos: uno hace referencia a identificar la variable tiempo; el otro tiene que ver con el proceso de entender el fenómeno mismo, es decir, el proceso de modelación, en donde se establece claramente la relación entre el tiempo y las otras variables, surgiendo en este proceso la argumentación gráfica y la variación.

Con el propósito de observar cómo los estudiantes construyen conocimiento, se les dio libertad para seguir el camino que creyesen conveniente en el proceso de modelación. Por motivos de eficiencia, los investigadores disponían de un set de gráficas y resultados de cálculos numéricos que fueron confeccionados previamente (basados en su análisis *a priori*) para ser entregados de acuerdo con el trabajo que estaban realizando los estudiantes: si estos intentaban graficar algo específico o calcular diferencias, se les proporcionaba dicha información.

Puesta en escena

Unidad de análisis

Se tomaron dos unidades de análisis diferentes: una se basó en dos entrevistas abiertas y la otra fue una situación de aula. Las entrevistas, grabadas y digitadas como evidencia, fueron realizadas a dos grupos, y la situación de aula fue planteada a un curso de novatos (primer semestre) de la carrera de

Pedagogía en Matemáticas, a quienes se les pidió que trabajaran en grupos de no más de tres personas (se formaron 8 grupos[3]).

En la primera unidad de análisis, el primer grupo entrevistado (G1) estuvo conformado por dos estudiantes del primer semestre de la carrera de Pedagogía en Matemáticas. El segundo grupo entrevistado (G2) constó de dos estudiantes del quinto semestre de la misma carrera. El tiempo de duración de las entrevistas fue de dos horas aproximadamente. En relación con la situación de aula, esta estuvo planteada en el tiempo que ocupa la clase habitualmente (90 minutos) para enmarcarla como una actividad propia del curso.

Diseño de situación

Actividad 0: *Familiarización con el experimento*

En esta actividad se entrega a los estudiantes un *link* donde pueden realizar el experimento de lanzamiento del proyectil todas las veces que lo requieran.

Actividad 1: *Manejo de datos y explicación del fenómeno*

Una vez familiarizados los alumnos con los datos obtenidos en la actividad anterior, por cuestión de tiempo se les entregaron los datos impresos de una supuesta toma de datos planificada *ad hoc*. El planteamiento de esta actividad, que es el centro del diseño, es el siguiente:

> Considere la siguiente tabla[4]; los datos que aparecen allí representan un determinado fenómeno físico. Responda al siguiente planteamiento: Usando los datos que la tabla proporciona, realice un estudio de manera que nos permita entender el fenómeno físico que está ocurriendo.

En ambos casos se somete al estudiante a cumplir el rol de un investigador, es decir, realizar la experiencia y tomar decisiones con relación a qué hacer con los datos que esta arroja.

En dicho planteamiento no se mencionó explícitamente el tipo de fenómeno físico (caída de cuerpos), ya que, por una parte, la actividad era una situación adidáctica en términos de Brousseau y, por otra, se quería que el estudiante tuviera la oportunidad de utilizar su cotidiano (concepciones de la física) con la manipulación de los datos vía gráficas o cálculos variacionales. Es por esto por lo que vieron el vídeo y tomaron datos para entender cómo estos se generan y así poder configurar una tabla.

Para el desarrollo de esta experiencia planteada se consideraron algunos aspectos *a priori*; estos contienen la presunción de que pueden aparecer obstáculos, uno de ellos de origen epistemológico y el otro de origen didáctico, que pasamos a explicitar.

Basándose en antecedentes epistemológicos, era natural esperar que los alumnos tuvieran dificultades en reconocer la variable tiempo, identificar qué columna la representaba y cómo utilizarla en el proceso de investigación para poder explicar el fenómeno físico que se estaba estudiando.

Creíamos que al momento de entregar la tabla y solicitar que explicaran el fenómeno físico que estaba ocurriendo, los estudiantes se preguntarían naturalmente qué significaba cada una de las columnas; con ello aparece el problema de la variable tiempo, lo que los indujo a volver al experimento y de esta manera tomar datos y entender mejor el significado de cada columna. Esto les permitió asociar los *clics* con el tiempo.

Ahora bien, en relación con el obstáculo de origen didáctico, el marco teórico nos sugiere que los estudiantes usarían las gráficas por dos motivos: para ver que los datos (es decir, los gráficos de los

3. La actividad fue realizada en otros cursos sin intención de registrar datos, y se obtuvieron las mismas conclusiones.
4. La tabla a la que nos referimos se puede ver en la figura 2; fue construida a partir de datos del fenómeno, que fueron modificados para evitar las aproximaciones (esto no se les dijo a los estudiantes).

datos) reconstruyen la trayectoria, y porque habitualmente las tablas son confeccionadas por valores extraídos de funciones que se pueden graficar, lo que está de acuerdo con el DME.

Debido entonces al DME se espera que los estudiantes grafiquen las tablas para identificar los patrones gráficos de estas, de modo que relacionen el tipo de funciones que ellos conocen con sus respectivas representaciones: la alternativa es que comparen los datos entre ellos. Sobre la base de esto se imprimieron el set de gráficas y la tabla de cálculos variacionales antes mencionados.

Por otra parte, al graficar las tablas de datos se puede prever que los alumnos abordarán dos aspectos. Uno de ellos tiene que ver con las gráficas confrontadas con la trayectoria del proyectil: con los datos de la columna 1 y 2 se grafica una recta; ahora bien, con los datos de las columnas 1 y 3, quedará una parábola, de igual manera que si trabajan con los datos de las columnas 2 y 3. Ante estas gráficas resultantes, el problema para el estudiante es discernir qué parábola es la que efectivamente describe el fenómeno físico y por qué le aparece además una recta, lo que lo llevará a recurrir tanto a materias de matemáticas como de física. Apoyado en la variación de parámetros de las parábolas, puede que cuestione si lo que ellos visualizan es o no una parábola. El otro aspecto está relacionado con los cálculos variacionales, ya que al ir analizando la diferencia entre algunas columnas, los alumnos pueden observar que en unas se da una diferencia constante, por lo que comienzan a asociar el movimiento con aspectos físicos tales como velocidad y aceleración (situación de variación).

ANÁLISIS, DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El diseño planteado, cuyo objetivo es entender el fenómeno, pone en juego elementos de la matemática y de la física en un proceso de modelación. De esta manera, surge en primer lugar el “uso de la gráfica” como un elemento que permite identificar las variables que intervienen en la situación (columnas de valores), en particular el tiempo, y también establecer la relación entre esas variables con el significado que los alumnos les asocian. De esta manera, podemos evidenciar que los primeros argumentos que aparecen son de tipo gráfico, teniendo este el estatus que se le reconoce en la socioepistemología (Morales, 2009; Cordero *et al.*, 2010).

Los argumentos gráficos que surgen están asociados a velocidad, aceleración, rapidez, etc., como producto de una confrontación de “lo matemático” con “lo físico”, entendiendo por “lo matemático” aquello que queda del DME –que las tablas se grafican– y por “lo físico”, el conocimiento cotidiano de la cinemática (Briceño, 2010).

En esta situación el uso de las gráficas tiene dos sentidos, ambos reconocidos en la socioepistemología: uno de ellos es que la gráfica es utilizada como argumento para explicar el fenómeno, y el otro es la funcionalidad de la gráfica (en términos de resignificación), ya que la parábola está considerada como un patrón de comportamiento (comportamiento tendencial de las funciones CTF, Cordero, 2003) en el cual la variación de parámetros permitirá identificar el modelo subyacente a determinar en el proceso de modelación.

En los datos e información obtenidos, que presentamos a continuación, observamos cuatro aspectos relevantes que ponen en evidencia nuestra problemática: argumentación gráfica, rol del tiempo, funcionalidad de las gráficas y análisis variacional.

Argumentación gráfica

Los estudiantes, cuando abordan el experimento, lo visualizan y obtienen datos. Esto pone en juego elementos que están en el DME, tales como la graficación de pares de columnas, ya que estos datos corresponden a una función y la gráfica de los datos les sugerirá qué tipo de función está representada.

Estas se confrontan con el vídeo y se produce una tensión sobre la selección de la gráfica apropiada al modelo.

Al momento de indicar cuál es la gráfica que representaría el lanzamiento del proyectil, los estudiantes tienen que escoger entre el comportamiento tendencial parabólico y la recta; en este proceso de elección es necesario entender cada gráfica.

En la figura 1 podemos evidenciar esta confrontación. Este tipo de evidencia se pudo observar en ambas unidades de análisis

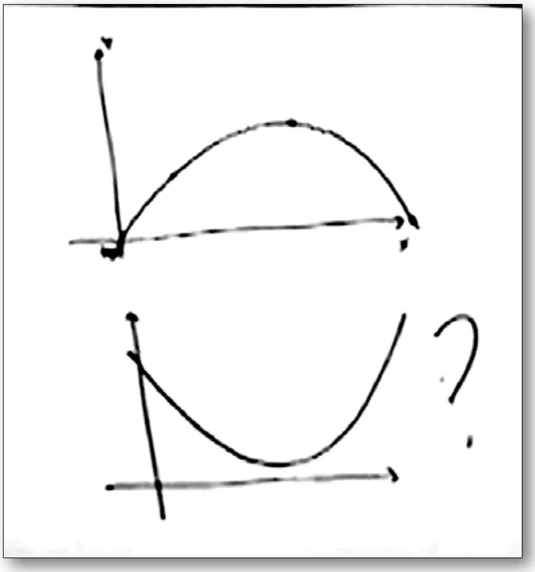


Fig. 1. Gráfica trayectoria versus gráfica obtenida de las columnas 2 y 3.

La figura 1 nos muestra que esta confrontación provoca la necesidad de entender cada gráfica, de ahí que enfaticemos que la gráfica pasa a ser argumentativa.

Como el trabajo de los alumnos no solo se limita al hecho de producir una gráfica con ciertos datos, sino que además comporta la necesidad de explicar el fenómeno, la gráfica se transforma en un elemento primordial para ellos, ya que no basta con entenderla, sino que deben ser capaces de usarla como argumento. Todo esto ocurre en el proceso de modelación que explica el fenómeno.

El DME –en su visión clásica de lo que es un modelo físico– exige una expresión analítica de este y la representación de esta expresión es considerada solo un "dibujo"; por lo tanto, no se reconoce el proceso de argumentación gráfica. Sin embargo, en esta investigación vemos que los argumentos gráficos insertos en expresiones tales como *creciente*, *decreciente*, *variación uniforme*, etc., permiten al estudiante ir configurando el tipo de relación entre las variables (esencialmente, el comportamiento variacional).

El rol del tiempo

La necesidad que surge de clarificar el rol del tiempo se debe a que dos de las gráficas tienen al tiempo como coordenada independiente y los datos hacen referencia a un objeto en movimiento. Los estudiantes necesitan entender las gráficas y llevarlas a un nivel funcional.

La evidencia muestra que los estudiantes logran la identificación del tiempo esencialmente cuando experimentan tomando nuevamente datos; esto les permite identificar los clics con el tiempo y, en consecuencia, identificar la columna 1 con este. En el primer caso (ver figura 2.a) simplemente consideran el clic como una unidad y, en el segundo (ver figura 2.b), explicitan que el clic es la cantidad de fotos por segundo.

click
~~tiempo~~

Columna 1	Columna 2	Columna 3
3	215,513	369,7725
4	234,904	349,066
5	254,295	331,6425
6	273,686	317,502
7	293,077	306,6445
8	312,468	299,07
9	331,859	294,7785
10	351,25	293,77
11	370,641	296,0445
12	390,032	301,602
13	409,423	310,4425
14	428,814	322,566
15	448,205	337,9725
16	467,596	356,662
17	486,987	378,6345
18	506,378	403,89

Fig. 2a. Designan el clic.

click TIEMPO X . Y

Columna 1	Columna 2	Columna 3
3	215,513	369,7725
4	234,904	349,066
5	254,295	331,6425
6	273,686	317,502
7	293,077	306,6445
8	312,468	299,07
9	331,859	294,7785
10	351,25	293,77
11	370,641	296,0445
12	390,032	301,602
13	409,423	310,4425
14	428,814	322,566
15	448,205	337,9725
16	467,596	356,662
17	486,987	378,6345
18	506,378	403,89

50 Fotos x 5

Fig. 2b. Designan el clic y ubican el tiempo.

La gráfica se resignifica en cuanto a su uso funcional, ya que el estudiante puede realizar conexiones con la cinemática mediante el significado de cada columna y cuando clarifica el rol del tiempo en cada gráfica. En todo este desarrollo el tiempo es la variable conectora en el proceso de modelación.

De esta forma, los estudiantes son capaces de graficar la distancia frente al tiempo, darle una interpretación en términos de velocidad o aceleración constante, interpretar la gráfica de distancia-tiempo formada por una recta como la gráfica que muestra velocidad constante. También son capaces de interpretar la gráfica distancia-tiempo de una parábola como la gráfica que muestra la aceleración constante (o una velocidad que varía uniformemente).

Funcionalidad de las gráficas

Las gráficas que resultan son dos parábolas y una recta. El hecho de que las gráficas aparezcan de esta manera pone en conflicto a los estudiantes, ya que este diseño (investigación) pone en juego "conocimientos" que los entrevistados tienen, ya sean matemáticos –como los de recta, parábola, función, etc.– o físicos –como los de distancia, velocidad, aceleración–. Estos conocimientos participan en la situación no como una aplicación, sino de un modo funcional, ya que provocan un cuestionamiento en los estudiantes acerca de los aspectos físicos y matemáticos involucrados, tensionando sus concepciones previas al momento de construir nuevas explicaciones o darles nuevos significados. Es decir, los estudiantes integran sus conocimientos y los transforman en el proceso de modelación (Cordero, 2003).

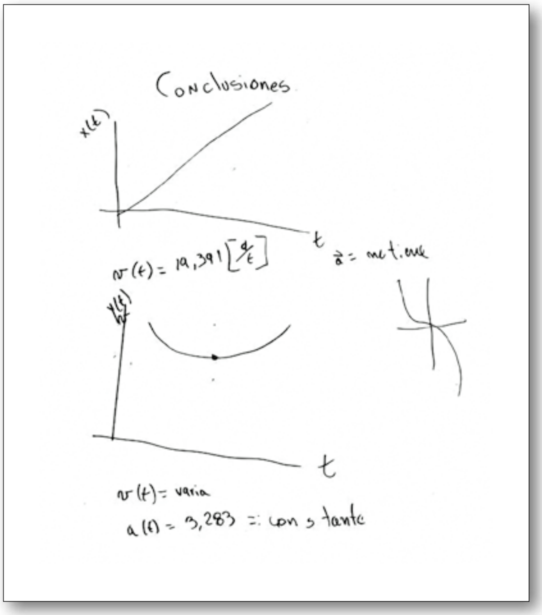


Fig. 3a. Expresiones de cinemática.

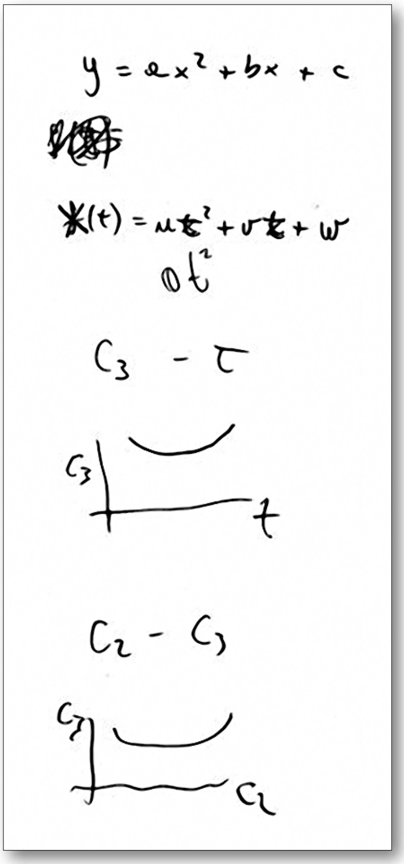


Fig. 3b. Expresiones analíticas.

En las figuras anteriores (3a y 3b) se ve que las gráficas están asociadas tanto a la expresión cuadrática o lineal como a las expresiones de velocidad y aceleración. Esto sugiere que estamos frente a un proceso de modelación en el cual se está generando conocimiento.

Análisis variacional

Los estudiantes realizan un análisis variacional de las tablas entregadas. Este análisis se lleva a cabo con el objeto de resolver la tensión que existe entre los significados de las gráficas y el movimiento del objeto. Respecto a este último, se observa que los estudiantes responden primeramente al DME, ya que las gráficas son representación de funciones y como estas parecen parábolas, deberían tener la expresión analítica correspondiente (figura 3b), de manera que el problema radicaría en encontrar los parámetros *a*, *b* y *c* en un caso y *u*, *v* y *w* en el otro (figura 3b).

El cálculo variacional se aprecia en la figura 4a y en la figura 4b; este cálculo va asociado con velocidad y aceleración (figura 4a); lo mismo ocurre en la figura 3a.

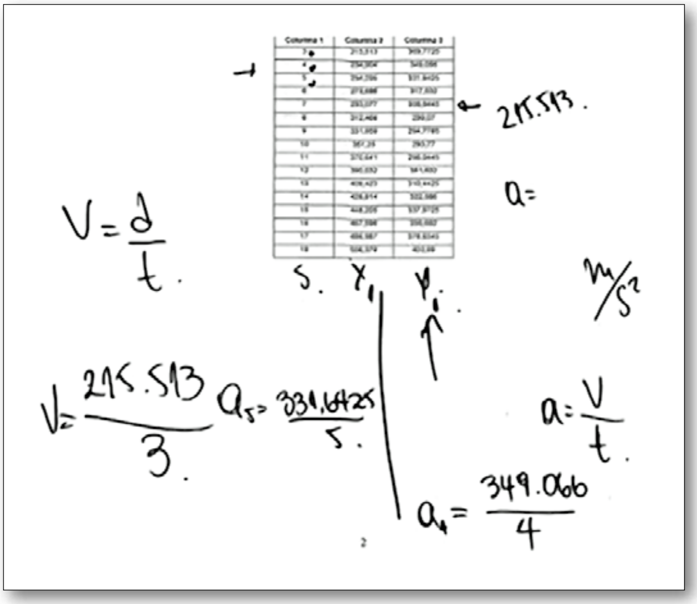
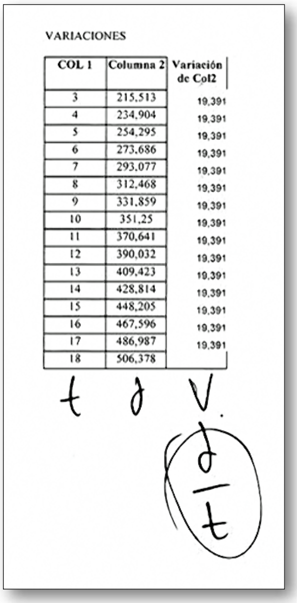


Fig. 4a. Análisis de la tabla.


VARIACIONES

COL 1	Columna 2	Variación de Col2
3	215,513	19,391
4	234,904	19,391
5	254,295	19,391
6	273,686	19,391
7	293,077	19,391
8	312,468	19,391
9	331,859	19,391
10	351,25	19,391
11	370,641	19,391
12	390,032	19,391
13	409,423	19,391
14	428,814	19,391
15	448,205	19,391
16	467,596	19,391
17	486,987	19,391
18	506,378	

Fig. 4b. Análisis de la tabla de variaciones.

En un primer momento, los estudiantes, al observar los datos tomados en el experimento, identifican una situación de cambio. Este cambio es analizado en términos de "aumento" o "disminución" de valores para finalmente determinar (calculando diferencias entre los valores de las columnas) si este cambio es constante (variación de primer orden) o variación de la variación (variación de segundo orden), estableciendo una conexión con el significado físico de velocidad o aceleración, respectivamente. Por lo tanto, lo variacional matemático (Cantoral y Farfán, 2000) queda asociado a una gráfica y algún aspecto físico; tal es así que los estudiantes, en esta situación, logran relacionar por una parte el movimiento de velocidad constante con la recta, y por otra, el movimiento con aceleración constante con la parábola. La unidad de análisis, en el aula, arroja los mismos tipos de evidencia obtenidos en la del grupo de entrevistas. En cada grupo se dieron todos los aspectos descritos anteriormente.

CONCLUSIONES GENERALES

Este trabajo evidencia que existe una distancia entre el discurso matemático escolar y el proceso de modelación que abordamos en esta investigación. En el primero, el conocimiento matemático es utilitario y, en el segundo, ese conocimiento se construye y por lo tanto el centro no es "la fórmula", sino el proceso en el cual las cuestiones matemáticas y las de la física adquieren un rol funcional.

El tránsito de una matemática utilitaria a una matemática funcional –con significados, procedimientos, procesos-objetos y argumentos– resulta de suma importancia en la enseñanza de las matemáticas para la formación de ingenieros y científicos. Un rediseño del discurso matemático escolar permitiría comprender distintos modelos y transitar entre ellos (nuevo proyecto al que actualmente los investigadores se han abocado).

Para lograr lo anterior se necesita reconocer la graficación como argumento (Cordero, Mena, Montalto, 2010) en una situación específica y el proceso de modelación en su conjunto, y no solo como la validación de expresiones analíticas sin significado. Es importante poder visualizar aspectos tales como la variación (gatillada por la predicción), que ayudan al entendimiento del modelo construido y que dan respuesta al fenómeno estudiado.

La investigación muestra un camino factible para construir conocimiento en un proceso de modelación, que incluya la argumentación gráfica, que a su vez puede ser facilitada por el uso apropiado de la tecnología[5].

Para ello se puede intentar rediseñar el discurso matemático escolar considerando el binomio graficación-modelación como una categoría (*cf.* Suárez, 2008; Morales, 2009), o bien usar la tecnología como fuente de ejemplos que ayudarían a relacionar modelos vía graficación-modelación como en el Proyecto Galileo.

REFERENCIAS BILIOGRÁFICAS

ARRIETA, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. (Tesis doctoral no publicada). México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

BASSANEZI, R. (2002). *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática. Uma nova estratégia.* Sao Paulo: Contexto.

BLOMHOJ, M. (2004). Mathematical modelling- A theory for practice. En Clarke, B.; Clarke, D. Emanuelsson, G.; Johnansson, B.; Lambdin, D.; Lester, F.; Walby, A. y Walby, K. (eds.). *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics.* Suecia: National Center for Mathematics Education, pp. 145-159.

BLUM, W. y PETER L. (2002). Galbraith, Hans-Wolfgang Henn and Mogens Niss. The 14th ICMI Study. *Applications and modelling in mathematics education. Discussion documents*. Educational studies in Mathematics, 51(1-2), pp. 149-171.

BRICEÑO, E. (2010). *Lo que norma una integración tecnológica en un escenario de difusión. De las trayectorias hacia el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. Memoria predoctoral no publicada. México: Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

BUENDÍA, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales. (Un estudio socioepistemológico)*. Tesis doctoral no publicada. México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

5. Existe software (incluso calculadoras) que permite –vía la variación de parámetros y comportamientos tendenciales (Cordero, 2006)– resignificar distintas gráficas, distintos modelos y dar sentido a conceptos matemáticos.

BUENDÍA, G. y CORDERO, F. (2005). Prediction and the periodical aspecto as generators of knowledge in a social practice Framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics*, 58(3), pp. 299-333.

CANTORAL, R. y FARFÁN, R. (2000). Pensamiento y leguaje variacional en la introducción al análisis. En R. Cantoral (ed.). *El futuro del cálculo infinitesimal*. México: Grupo Editorial Iberoamericana, pp. 69-91.

CANTORAL, R. (2001). *Matemática Educativa: Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Iberoamericano.

CORDERO, F. (2003). Lo social en el conocimiento matemático: los argumentos y la construcción de significados. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 16, pp. 73-78.

CORDERO, F. (2006*a*). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte Iberoamericano.* Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A.C., pp. 265-286.

CORDERO, F. (2006*b*). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della matemática. *La Matemática e la sua Didattica*, 20(1), pp. 59-79.

CORDERO, F. y FLORES, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(1), pp. 7-38.

CORDERO, F.; MENA, J. y MONTALTO (2010). Il ruolo Della giustificazione funzionale in una situazione di risignificazione dell'asintoto. *Línsegnemento Della matematica e Delle scienze integrate*, 33 B(4), pp. 457-488.

CORDERO, F.; CEN, C. y SUÁREZ, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: Una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(2), pp. 187-214.

GIORDANO, F.; WEIR, M. y FOX, W. (1997). *A first Course in Mathematical Modeling*. Second Edition Brooks/Cole Publishing Company.

GONZÁLEZ, E.; MENESES, H.; GONZÁLEZ, B.; MENA, J.; ROJAS, A. y RAMOS, R. (2011). A Gause type predator-prey model with Allee effect on prey: Multiple stability and uniqueness of limit cycle, Nonlinear Analysis. *Real World and Applications*, 12, pp. 2931-2942.

HESTENES, D. (1987). Toward a Modeling Theory of Physics Instruction, *Am. J. Phys*, 55(5), pp. 440-454.

LARA, G. (2007). *Categorías de uso de gráficas en libros de texto de mecánica de fluidos.* Tesis de maestría no publicada. México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

LAWSON, A. (2003). The nature and development of hypothetico-predictive argumentation with implications for science teaching. *International Journal of Science Education*, 25(11), pp. 1387-1408.

LEAL, S. (1999). *Modelação matemática uma proposta metodológica para o curso de economia*. Tesis de maestría no publicada. Brasil: Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

MC. DERMOTT, L. C.; ROSENQUIST, M. L. y VAN ZEE, E. H. (1987). Student difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics. *American Association of Physics Teachers*, 55(6), pp. 503-513.

MORALES, A. (2009). *Resignificación de la Serie de Taylor en una situación de modelación del movimiento: de la predicción del movimiento a la analiticidad de las funciones*. Tesis doctoral no publicada. México: Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada.

NEWTON, I. (1786). *The Method of Fluxions and Infinite Series with its Application to the Geometry of Curve-lines*. Londres: Henry Woodfall.

ORESME, N. (1379). *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*. Traducción de P. Souffrin y J. P. Weiss. París: Belles Lettres, 1988.

POPPER, K. (1999). *The Logic of Scientific Discovery*. Padstow, Cornwall: J. International Ltd.

SUÁREZ, L. (2008). *Modelación-Graficación, una categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico*. Tesis de doctorado no publicada. México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

VERA, F. y ROMANQUE C. (2009). Another Way of Tracking Moving Objects Using Short Video Clips. *The Physics Teacher*, 47 (6), pp. 370-373

VERA, F. y RIVERA, R. (2011). A piece of paper falling faster than free fall. *Eur. J. Phys.*, 32, pp. 1245-1249.

APÉNDICE: LA GALERÍA DE GALILEO

La Galería de Galileo es un proyecto del Grupo de Tecnología Educativa del Instituto de Física de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso en Chile, que cuenta con una gran variedad de experimentos simples de física que han sido grabados y puestos a disposición de los usuarios para su libre uso. Los experimentos son de muy corta duración y han sido grabados de manera de permitir la obtención de variables físicas directamente desde las imágenes en la página web en donde se visualiza cada experimento.

El diseño de las actividades realizadas con los alumnos en esta investigación usa la tecnología de seguimiento de objetos en movimiento, que permite el análisis y toma de datos del movimiento usando experimentos pregrabados. Esta tecnología permite medir posición y tiempo para objetos en movimiento, pudiendo incorporar una componente de experimentación para ser realizada por los estudiantes. Esta tecnología facilita la obtención de coordenadas de objetos en movimiento, a partir de secuencias de fotos obtenidas desde un video del experimento y que se muestran dentro de una página web (http:// laplace.ucv.cl/experimentosGalileo/) que contiene el software para obtener coordenadas de posición y tiempo al hacer *clic* sobre el objeto que se quiere estudiar. Al usar un video del experimento, es posible obtener hasta 30 fotos por segundo. A partir de la posición de los objetos en la pantalla, se deducen las posiciones reales de dichos objetos en el laboratorio, pudiéndose obtener así hasta 30 coordenadas de posición en una o dos dimensiones en cada segundo. Esta rapidez en la adquisición de datos y la resolución de cada imagen, permite el análisis de la mayoría de los experimentos típicos de laboratorios de física básica.

THE ROLE OF TIME IN A MODELING PROCESS THAT USES VIDEOS OF PHYSICS EXPERIMENTS

Astrid Morales[1,3], Jaime Mena[1,3,4], FranciscoVera[2,3,5] y Rodrigo Rivera[2,3,5]
[1] Instituto de Matemática. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
[2] Instituto de Física. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
[3] Proyecto Fondef TE10I012
[4] Proyecto Fondecyt 1110988
[5] Proyecto Fondecyt 1110713

This paper investigates the role of time in a modeling process that seeks to favor the construction of mathematical knowledge by college students. The process gives evidence of the *functionality* of graphing (plotting) to describe a physical phenomenon, by using the *track moving objects* technique. The research uses a *socio-epistemological* perspective to analyze the practices of modeling-and-graphing of Mathematics freshmen faced with the study of projectiles motion, in a Chilean university.

This research arose from a dialogue between physicists and mathematicians working in an educational research project called *Galileo*, that contains a gallery of videotaped physics experiments, available in a free access website. The project aims that students formulate physical models to help them to obtain a better understanding of certain contents of physics. The *track moving objects* technique enables –from recorded images and by using a simple mouse click– to get data (coordinates) and thus to generate graphs that can be used to interpret and analyze the physical phenomenon involved.

From a socio-epistemological perspective, *mathematical modeling* constructs mathematical knowledge (Cordero 2010, Suárez 2008). Thus, our problem focuses on the modeling process, which involves elements that articulate and help to build knowledge: *graphing,* that acquires a status that differs from what is commonly treated in the school's mathematical discourse (DME); *variation*, that allows a connection of a mathematical model (variational parabolic) and a physical model (of kinematics); and *the role of time*, which helps the graphing's *functionality*, understanding the latter as a knowledge organically embodied in a human being, that transforms him/her and transforms his/her reality.

Graphing is an explicit and relevant component of the Galileo Project. In the field of physics, graphing is fundamental for understanding, building or deepening in the discipline; it helps to understand the phenomenon under study and to build a physical model. Graphing is considered a very useful tool which allows putting into play knowledge on a functional level. Stated in general terms, in physics (and in many other areas of knowledge) graphic argumentation is recurrent (see for example Lara, 2007; Cordero and Flores, 2007). Nevertheless, mathematics teachers in general do not promote nor validate the graphic argument, since for them graphing often is just a representation of mathematical objects (Cordero *et al.*, 2010; Suárez, 2008; Morales, 2009).

In our case, the students –as Galileo did in his time– obtain data for the coordinates of position and time from experiments. This allows them to determine variations in the position of an object at a given time interval, and, by clicking on a moving object, also to obtain tables which in turn lead to analytical and kinematic expressions. This brings into play elements in the DME, such as graphing pairs of data given in columns, which correspond to a function, and the subsequent graph suggests what kind of function is represented. This is confronted with the video provided, and this confrontation produces some tension, which in turn raises the graphic argumentation and the functionality of graphing is manifested, through variational analysis of data and knowledge of kinematics, to respond to the DME.

This study provides evidence that there is a distance between the DME and the modeling process addressed in this research. In the DME, the mathematical knowledge is utilitarian (student has to restrict him/herself to apply a knowledge already built, without a real understanding of the reasons that make possible that application) and, in the second, that knowledge is to be constructed, and therefore the focus switches from "the formula" to the process in which issues of mathematics and physics acquire a functional role. In this process, the role of time is crucial; it leads the modeling process and allows the transition from utilitarian to functional mathematics –with meanings, procedures and arguments– which is extremely important in the teaching of mathematics for engineers and scientists. A redesign of DME would allow to understand different models and to transit between them. In order to achieve this, you need to recognize graphing as an argument (Cordero, Mena, Montalto, 2010) in a specific situation, and to recognize also the modeling process as a whole and not only as validation of meaningless analytical expressions.