Núm. 31.1 (2012): 171-187
ISSN: 0212-4521

EVALUACIÓN DEL CONOCIMIENTO PEDAGÓGICO DEL CONTENIDO PARA ENSEÑAR MATEMÁTICAS ELEMENTALES*

ASSESMENT OF PEDAGOGICAL CONTENT KNOWLEDGE FOR TEACHING ELEMENTARY MATHEMATICS

Leonor Varas
mlvaras@dim.uchile.cl

Nancy Lacourly
nlacourl@dim.uchile.cl

Universidad de Chile, Centro de Investigación Avanzada en Educación y Centro de Modelamiento Matemático, Santiago, Chile

Alejandro López
Universidad Andres Bello, Facultad de Ciencias Exactas, Departamento de Matemáticas, República 275, Santiago, Chile
alopez@unab.cl

Valentina Giaconi
Universidad de Chile, Departamento de Ingeniería Matemática
vgiaconi@dim.uchile.cl

RESUMEN: Se presenta un estudio que permitió desarrollar un instrumento para evaluar una componente del conocimiento pedagógico del contenido para enseñar matemáticas: el conocimiento del profesor acerca de cómo aprenden matemáticas los alumnos. Esta componente ha sido descrita teóricamente por otros autores, pero no había podido ser evaluada de manera fiable en pruebas masivas. En los resultados de la aplicación del instrumento a diferentes grupos de personas, se detectan aspectos del conocimiento que el conocimiento disciplinar no explica, aunque este los afecta. Este tipo de conocimiento se encuentra especialmente en profesores de educación primaria con mención en matemáticas tanto en ejercicio como en formación.

PALABRAS CLAVE: conocimiento matemático del profesor, conocimiento matemático para enseñar, conocimiento pedagógico del contenido.

ABSTRACT: We present a study that allowed for the development of an instrument to assess a component of pedagogical content knowledge to teach mathematics: the teacher´s knowledge about how students learn mathematics. This component has been described theoretically by other authors but could not be assessed reliably in mass testing. In the outcome of applying the instrument to different groups of people, we identify certain aspects of knowledge that cannot be explained by the disciplinary knowledge, although is affected by it. This kind of knowledge is detected particularly in primary school teachers with specialization in mathematics, both in service and in training.

KEYWORDS: teacher's mathematical knowledge, mathematical knowledge for teaching, pedagogical content knowledge.

* Parcialmente financiado por el proyecto Fondecyt 1090292, por el proyecto CIAE 03-2008 y por el Fondo Basal CMM-U de Chile.

Fecha de recepción: febrero 2012 • Aceptado: mayo 2012

Varas, M. L., Lacourly, N. López Collazo, A. y Giaconi, V. (2013). Evaluación del conocimiento pedagógico del contenido para enseñar matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 31 (1), pp. 171-187

ANTECEDENTES

En los últimos años, la necesidad de mejorar los resultados educacionales ha cambiado su foco de atención desde las reformas curriculares a la preparación de los profesores. Este acento atraviesa las políticas públicas de muchos países y también la investigación en educación. El caso de la educación matemática es especial debido a su impacto en el futuro laboral de las personas, así como en el desarrollo científico y tecnológico y en la competitividad de los países, lo que se refleja en su presencia en una gran variedad de evaluaciones internacionales. La investigación científica rigurosa se desarrolla a un ritmo que difícilmente permite informar a tiempo a las políticas públicas, cuyas urgencias se originan muchas veces en información parcial que impacta a la opinión pública. Un ejemplo de ello se encuentra en la forma como se difundieron los resultados del estudio comparativo internacional TEDS-M destinado a estudiar de manera amplia y comprensiva la preparación de los profesores para enseñar matemáticas. El único aspecto de esta investigación que se comentó públicamente fue el resultado de los test aplicados a los candidatos a profesor. Tales resultados son muy malos para Chile, lo que reforzó de manera importante una política de evaluación de profesores en ejercicio y de nuevas evaluaciones a los candidatos a profesor a modo de habilitación profesional. Para tal propósito se han preparado estándares que describen con gran detalle el conocimiento matemático que el futuro profesor debe dominar, así como indicadores que permitan observar su capacidad de enseñar estos contenidos.

Resulta evidente la importancia del dominio del profesor sobre los contenidos que enseña. Nadie puede enseñar lo que no sabe bien. Sin embargo, no es evidente cómo caracterizar este dominio atendiendo a las necesidades específicas de su enseñanza. Desde que en 1985 L. Shulman (1986) introdujera el concepto de *conocimiento pedagógico del contenido* (CPC), se ha acumulado un ingente trabajo teórico y muchas evidencias empíricas acerca de la existencia de una forma de conocimiento disciplinar, específica y propia de la tarea de enseñar, que influiría en los logros de aprendizaje de los alumnos. Existe abundante bibliografía en relación con este tema y crece el acuerdo respecto de la especificidad del conocimiento disciplinar que se pone en juego en la tarea de enseñar, así como de que enseñar matemáticas elementales es una tarea matemática demandante.

En el campo de la educación matemática, diversos autores han contribuido a precisar el contenido específico de este conocimiento (Ball, 1990; Ma, 1999; Ball, Hill, Bass, 2005; Krauss, 2007; Krauss, Brunner, Kunter, Baumert, Blum, Neubrand Jordan, 2008; Ball, Thames, Phelps, 2008).

Liping Ma (1999) mostró problemas típicos de la enseñanza de las matemáticas elementales y los distintos dominios que profesores chinos y norteamericanos exhibían al respecto, las respuestas y explicaciones que daban a sus alumnos y la comprensión que mostraban acerca de las matemáticas involucradas. Su investigación tuvo una gran acogida en la comunidad de matemáticos y educadores matemáticos, donde se afianzó su conclusión de que enseñar matemáticas elementales requería una comprensión profunda de esas matemáticas, es decir, de un conocimiento esencialmente matemático. Ron Aharoni (2007), matemático profesional, en un libro donde relata su experiencia enseñando matemáticas en la escuela elemental, señala que lo que más aprendió no fue metodología, como se podría haber esperado, sino matemáticas. Su metáfora es clara. Dice que su visión de esas matemáticas elementales parecía la que se tiene de una tela, que de lejos se ve suave y uniforme pero que de cerca se aprecian los hilos y su trama. Recomienda a quien desee enseñarla que se familiarice con cada uno de los finos hilos de ideas que componen esas matemáticas y estudie el orden en que se organizan en la trama.

Un equipo de investigadores de la Universidad de Michigan, agrupados en torno al proyecto Learning Mathematics for Teaching (LMT), desarrolló un detallado trabajo de identificación y caracterización de diversas componentes del conocimiento del profesor requeridas para enseñar matemáticas, poniendo el énfasis en un conocimiento disciplinar específico de la tarea de enseñar, que es un conocimiento de los contenidos distinto del conocimiento pedagógico del contenido. Hacia finales de 2008 el modelo que organizaba estas distinciones era el de la figura 1, que se ha convertido en un importante referente actual.

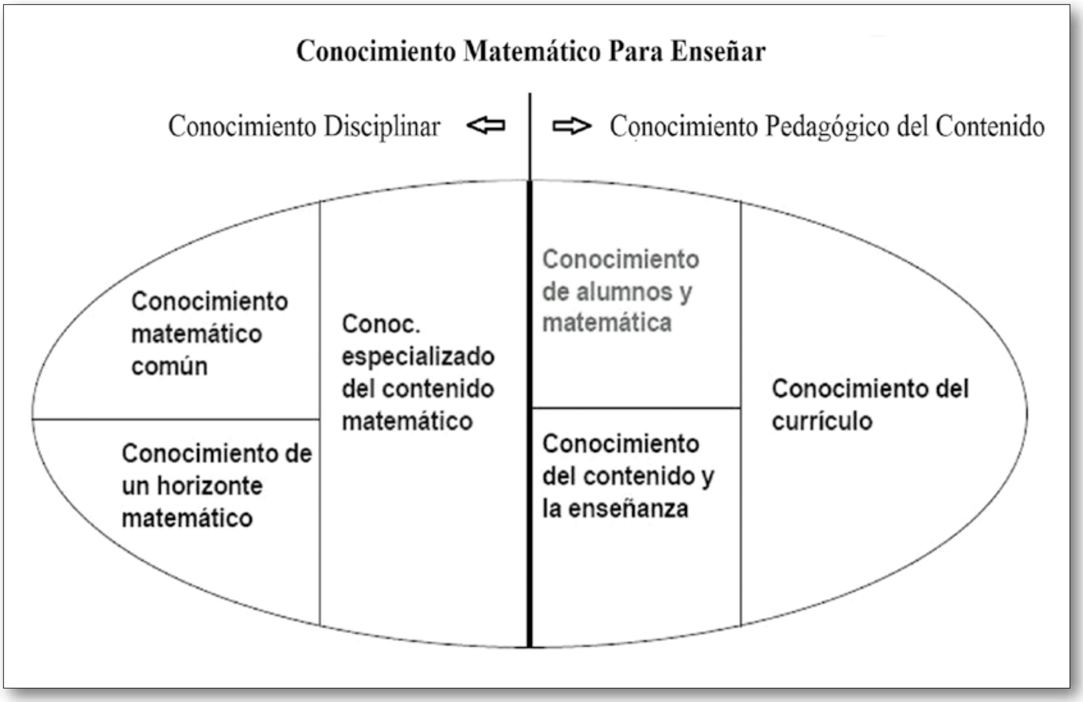

Figura 1. Modelo originado en el proyecto LMT (Aprendiendo Matemáticas para Enseñar) de la Universidad de Michigan (Ball, Thames, Phelps, 2008; Hill, Ball Schilling, 2008).

La primera casilla, arriba y a la izquierda, se refiere al dominio de los contenidos matemáticos que se deben enseñar. En cambio, en la casilla de abajo aparecen contenidos adicionales a aquellos que un profesor requiere para comprender la estructura en la que se inserta la parte que enseña y que, por lo tanto, aclara su sentido. Ambas casillas, sin embargo, se refieren a un conocimiento que no se diferencia del que podrían tener otros usuarios de las matemáticas respecto a los mismos contenidos. La segunda franja contiene un conocimiento del contenido especializado en las necesidades de la enseñanza, como es por ejemplo el disponer de variedad de representaciones de las ideas matemáticas que se han de enseñar, de definiciones precisas y correctas, de explicaciones matemáticas acerca de por qué los algoritmos usuales funcionan, de comprender procedimientos inusuales. En el sector del conocimiento pedagógico del contenido se encuentran tres secciones. La primera sección, que es aquella de la que nos ocupamos en este artículo, se refiere al *conocimiento de alumnos y matemáticas* (CAM). A esta categoría pertenece el conocimiento acerca de cómo los alumnos aprenden determinados contenidos que se enseñan, sus confusiones, los errores más frecuentes, qué representaciones les resultan más naturales, cómo proceden frente a tareas comunes. Una detallada descripción de este conocimiento y los elaborados procesos implementados para su evaluación masiva se describen en Hill, Ball y Schilling (2008), a pesar de que no se logró desarrollar un instrumento de una fiabilidad aceptable. Estos autores distinguen otras dos componentes del CPC: el conocimiento acerca de la enseñanza de los contenidos escolares y el conocimiento del material curricular.

Parte importante del esfuerzo relacionado con el estudio de este conocimiento matemático para enseñar se ha destinado al desarrollo de instrumentos para su medición fiable (Hill, Ball y Schilling, 2004; Hill y Ball, 2004; Krauss, Baumert y Blum, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008; Varas, Felmer, Gálvez, Lewin, Martínez, Navarro, Ortiz y Schwarze, 2008; Varas y Lacourly, 2010) y a establecer su incidencia en los logros de aprendizaje de los alumnos (Hill, Rowan y Ball 2005; Baumert, Kunter, Blum, Brunner, Voss, Jordan, Klusmann, Krauss, Neubrand y Tsai, 2010), así como su relación con la calidad de la instrucción (Hill, Blunk, Charalambous, Lewis, Phelps, Sleep y Ball, 2008).

El informe Foundation for Success (informe final del National Mathematics Advisory Panel, EE. UU., 2008) establece la importancia del conocimiento matemático de los profesores como factor en los logros de aprendizaje de sus alumnos y recomienda que los profesores conozcan en detalle las matemáticas que deben enseñar y sus conexiones con niveles superiores e inferiores del currículo. Sin embargo, critica la falta de evidencia científica que vincule directamente la presencia de ciertos conocimientos matemáticos comunes y específicos de la tarea de enseñar con los logros de aprendizaje de los alumnos, pues la mayoría de las investigaciones miden otras variables (número de cursos, grados académicos, calificaciones en exámenes de certificación) o son cualitativas:

> Finalmente, con la excepción de un estudio que midió directamente el conocimiento matemático utilizado al enseñar, ningún estudio identificado por el Panel probó la dinámica que examinaría cómo el conocimiento matemático de profesores de escuela elemental y media afecta la calidad de la instrucción, las oportunidades de los alumnos de aprender y la ganancia de aprendizaje a lo largo del tiempo (p. 37).

El único estudio al que se refiere el Panel es el trabajo de Hill, Rowan y Ball (2005), donde se describen los hallazgos del proyecto Learning Mathematics for Teaching (LMT), en el que se establecieron pruebas para medir el conocimiento matemático para enseñar de 334 profesores de 1.^{er} grado y 365 profesores de 3.^{er} grado con 1.190 y 1.773 alumnos, respectivamente, durante dos años con dos evaluaciones por año de ganancia de aprendizajes de ambas cohortes (prueba Terra Nova).

Con posterioridad al informe del Panel se publicó el trabajo de Baumert et al. (2010) acerca de los resultados del proyecto COACTIV en Alemania, que evaluó la ganancia de aprendizaje de 4.353 alumnos a lo largo de un año (final de 9.º a final de 10.º), medidos con dos pruebas PISA, y tres tipos de conocimientos de sus 181 profesores en 194 cursos: conocimiento matemático común, conocimiento pedagógico del contenido matemático y conocimiento pedagógico general.

Ambos trabajos muestran que el mayor impacto sobre los logros de aprendizaje de los estudiantes corresponde a un tipo de conocimiento matemático específico de la tarea de enseñar que poseen sus profesores.

Los test elaborados por el proyecto LMT (2005) incluyeron ítems que tendían a evaluar tres de las componentes del *conocimiento matemático para enseñar* (CME) distinguidas por el modelo de la figura 1: conocimiento matemático común, conocimiento especializado del contenido matemático y conocimiento de alumnos y matemáticas. A pesar de su convincente descripción teórica y del cuidadoso diseño de sus ítems, esta última categoría no pudo ser evaluada de manera fiable. En un estudio exploratorio (Hill, Blunk, Charalambous, Lewis, Phelps, Sleep y Ball, 2008) que vinculó la calidad de la instrucción matemática con el CME de los profesores, estos mismos ítems se utilizaron en entrevistas en profundidad que ayudaron a comprender esta compleja relación. En esta investigación, sin embargo, el estudio se realizó a solo diez profesores a quienes se había observado a lo largo de varias series de lecciones y calificado su instrucción.

No cabe duda acerca de las limitaciones que tienen las pruebas de lápiz y papel para evaluar a profesores. Pero tienen también evidentes beneficios de coste, factibilidad de aplicación y rapidez en la entrega de información, por lo que su uso está lejos de desaparecer o incluso aminorarse. Considerando además los efectos de sus resultados, resulta importante que estas cubran la mayor cantidad de factores relevantes al problema que se quiere diagnosticar y que su medición sea confiable. En tal sentido, la posibilidad de evaluar aspectos del conocimiento pedagógico del contenido, como el CAM, a través de pruebas estandarizadas de selección múltiple sigue siendo un desafío importante.

En este artículo se describen los resultados de un estudio que buscó responder a las siguientes preguntas:

- ¿Es posible evaluar fiablemente un tipo de conocimiento pedagógico del contenido que se distinga claramente del conocimiento disciplinar para enseñar matemáticas?
- ¿Las personas con mayor formación matemática desarrollan también mayor conocimiento pedagógico del contenido?
- ¿El mayor desarrollo del conocimiento pedagógico del contenido depende de una mayor experiencia práctica enseñando en aula los contenidos involucrados en el instrumento de evaluación?
- ¿Cómo se caracterizan los profesores con mayor conocimiento pedagógico del contenido en cuanto a su experiencia y formación?

MARCO TEÓRICO

El interés por el conocimiento del profesor acerca de la disciplina que enseña proviene de la investigación que se aboca a la «función de producción educacional», y que examina la contribución a los logros de aprendizaje de esta disciplina, de diversas variables asociadas a los alumnos, a los recursos escolares y a los profesores. La evidencia presentada en una abundante literatura muestra que el conocimiento del profesor juega un rol crucial en los resultados de aprendizaje de sus alumnos (Coleman, 1966; Hanushek, 1972; Mullens, Murnane y Willett, 1996; Rowan, Chiang y Miller, 1997; Hill, Rowan y Ball, 2005; Baumert, Kunter, Blum, Brunner, Voss, Jordan, Klusmann, Krauss, Neubrand, Tsai, 2010). Sin embargo, durante muchos años, este conocimiento se evaluó de un modo indirecto, a través del número de cursos de matemáticas o de metodología o de didáctica matemática que hubiera cursado un profesor (Begle, 1979; Goldhaber y Brewer, 2001; Monk, 1994), en lugar de evaluarlo de manera directa mediante pruebas de conocimiento. La descripción que hiciera Shulman (1986) de un *conocimiento pedagógico del contenido* (CPC), difícilmente impartido en cursos universitarios como los contabilizados hasta entonces, así como algunos resultados paradójicos, como los de Begle –quién concluyó que los mayores estudios de matemáticas avanzadas producen efectos positivos sobre los logros de aprendizaje solo en un 10% de los casos y efectos negativos en un 8% de los casos–, llevaron a desarrollar estudios más descriptivos del conocimiento matemático que se ponía en juego en la tarea de enseñar (Ball, 1990; Even, 1993; Ma, 1999) y a explorar sus características.

Hill, Ball y Schilling (2004) implementaron pruebas con una muestra importante de ítems para ser aplicados a una muestra también grande de profesores, cuyos resultados se presentan en el artículo de Hill, Rowan, Ball (2005). La cantidad de datos recogidos les permitió comprobar que el conocimiento del profesor para enseñar matemáticas elementales es multidimensional y, mediante análisis factoriales, pudieron separar, en parte, los ítems en función del contenido y del tipo de conocimiento. Comprobaron que por cada desviación estándar de mayor conocimiento del profesor se explicaba 1/10 desviación estándar de ganancia de aprendizaje de sus alumnos a lo largo de un año.

El citado estudio alemán COACTIV introdujo una duda acerca de la composición de aquel conocimiento matemático que se requiere para enseñar matemáticas exitosamente. Más aún, se cuestiona la posibilidad de distinguir el CPC como un conocimiento independiente del conocimiento matemático mismo. Los resultados muestran (Krauss, Brunner, Kunter, Baumert, Blum, Neubrand y Jordan, 2007) que, al comparar dos grupos de profesores con distinta preparación matemática, estos dos tipos de conocimiento solo se separan estadísticamente en el grupo de los profesores con menor formación matemática (N=113), que exhibe un desempeño notablemente inferior en ambos. Por el contrario, en el grupo de los profesores con mayor formación matemática, que pueden ser considerados como «expertos» en matemáticas (N=85), ambos conocimientos forman un único cuerpo de conocimiento conectado, cuyas componentes son indistinguibles. Con esto prueban que la conectividad cognitiva depende del nivel de experticia matemática. Para averiguar que el conocimiento matemático es tan específico de la profesión de enseñar matemáticas en escuela secundaria como el conocimiento pedagógico de la matemática (CPC), que se evalúa en el proyecto COACTIV, aplican sus pruebas también a otras poblaciones que comparten o la preparación matemática o la experiencia de enseñar con la muestra inicial. El conocimiento disciplinar se ordena según la preparación académica recibida, pero el CPC presenta sorpresas y el grupo de estudiantes de matemáticas que exhibe el mayor conocimiento disciplinar se ubica en cuanto al CPC entre los dos grupos de profesores mencionados antes (Krauss, 2007). La caracterización del CPC utilizada en este estudio no corresponde exactamente con la utilizada por el proyecto LMT y descrita en la figura 1 e incorpora varios elementos que en esa figura se denominan *conocimiento especializado del contenido matemático.*

Hill, Ball y Schilling (2008), además de pruebas, realizaron entrevistas cognitivas a profesores para comprobar el supuesto de que los profesores usan el CAM para contestar los ítems. El análisis factorial de las pruebas y las entrevistas les permitieron concluir que tal conocimiento es distinto del conocimiento del contenido o del conocimiento pedagógico general. Sin embargo, no pudieron mostrar cuándo y cómo tal conocimiento se relaciona con la mejora del aprendizaje matemático de los alumnos.

EL ESTUDIO

La primera dificultad para evaluar el conocimiento del profesor acerca de cómo sus alumnos aprenden matemáticas reside en la generación de buenas preguntas. En el caso del conocimiento matemático, aun cuando este sea muy específico de la tarea de enseñar, es relativamente sencillo crear preguntas cuyas respuestas correctas sean indiscutibles. Pero en el caso que nos ocupa puede haber variaciones de un grupo de alumnos a otro, aspectos culturales y muchos factores que pueden hacer depender la respuesta correcta del contexto de quienes responden.

Confección de preguntas

La principal base de sustentación para el diseño de ítems es la provista por Hill, Ball y Schilling (2008). Estos autores realizan una profunda revisión de antecedentes de investigación y entregan una clara y detallada definición del *conocimiento de alumnos y matemáticas* y de sus manifestaciones más comunes. A ellos debemos el nombre, la descripción, su relación con otros conocimientos disciplinares y pedagógicos del contenido, y el principal esfuerzo conocido para evaluarlo. Reconocen su duda acerca de la validez del supuesto de que las regularidades en el aprendizaje de las matemáticas y en los errores que cometen los alumnos sean independientes de los métodos de enseñanza y del material curricular usado, por lo que reconocen que para la construcción de ítems debieron considerar al alumno prototípico de ese nivel educacional en los Estados Unidos de Norteamérica. Un criterio muy importante que buscamos replicar, en la medida de lo posible, fue el de construir preguntas cuya respuesta no pudiera ser deducida por alguien que no tuviera experiencia enseñando en ese nivel educacional, gracias a sus conocimientos matemáticos. A partir de estas definiciones y criterios, además de otras fuentes bibliográficas que contienen advertencias acerca de errores frecuentes y formas de entender y aprender que son usuales –libros de matemáticas para la preparación de maestros como Beckmann (2011), Parker y Baldrige (2003), Lee Peng Yee y Lee Ngan Hoe (2009)– y de la propia experiencia del equipo de investigación, se adaptaron y se redactaron preguntas para cubrir de manera uniforme los contenidos de aritmética y de geometría de la enseñanza básica (grados 1 a 8 en el currículo chileno).

La segunda dificultad a la que nos enfrentamos se originó en el rechazo del supuesto de que los errores de los alumnos son independientes de los métodos de enseñanza y del material curricular. Es decir, se aceptó que la realidad, cuyo conocimiento se evaluaría en el profesor, puede ser muy distinta dependiendo de cómo enseñe cada profesor. Por ejemplo, si se pide reconocer un error cometido con frecuencia por los alumnos, un profesor podría no identificarlo como tal, no por desconocimiento, sino porque en la forma como él enseña ese contenido tal error no aparece. Este es el caso, por ejemplo, de los profesores chinos entrevistados por L. Ma (1999), cuando se les pide una estrategia para corregir el error de no desplazar los productos parciales en una multiplicación de números de tres dígitos. Ellos responden diciendo que nunca necesitan tales estrategias pues cuando llegan a enseñar esas multiplicaciones han practicado antes multiplicando por 10, por 100, por 1000 y desplazando los dígitos del número original, y los niños no cometen el error planteado por la entrevistadora.

Las dimensiones que resultaron de estas consideraciones son:

a) errores frecuentes, por ejemplo, identificar errores, generar distractores adecuados a preguntas de selección múltiple, reconocer causas de esos errores;
b) saber qué convence a un niño o cómo argumentar al nivel de los niños para convencerlos de la veracidad o falsedad de una afirmación matemática,
c) conciencia acerca de limitaciones (o errores) que puedan ser inducidas por representaciones o modelos usuales así como ejemplos y definiciones.

Algunos ejemplos que ilustran estas categorías, en el mismo orden de arriba, son los siguientes.

11. Los estudiantes, en la clase del profesor Pérez, han estado trabajando en ordenar decimales. Andrés, Clara y María presentan la lista 1,1; 12; 48; 102; 31,3; 0,676 y dicen que están ordenados de menor a mayor. ¿Qué error están cometiendo los estudiantes? (Marque SOLO UNA respuesta)
a) Están olvidando el valor posicional asociado a la cifra posicional.
b) Están olvidando la coma decimal.
c) Están adivinando.
d) Se están olvidando de los números entre 0 y 1.
e) Están cometiendo todos los errores mencionados.
f) No estoy seguro(a).

18. La Profesora Valenzuela pondrá el siguiente problema a sus alumnos:
Un dibujo de 12 cm de alto por 10 cm de ancho se quiere reducir guardando las proporciones, para que su alto sea de 6 cm. ¿Cuál debe ser ahora su ancho?
Indique si está usted de acuerdo, o no lo está, con las afirmaciones siguientes.

	Sí	*No*	*No estoy seguro(a)*
d) Para convencer acerca de la respuesta correcta a los alumnos que cometieron errores, ella debería pedirles que dibujen rectángulos con esas medidas.	1	2	3

16. Las consecuencias que podría tener para los escolares una presentación de las fracciones basada en el modelo de repartir una pizza son:

	Sí	*No*	*No estoy seguro(a)*
Dificultades para sumar fracciones de igual denominador.	1	2	3
No comprender que las partes deben ser todas exactamente iguales, por las dificultades al dibujar divisiones idénticas de un círculo.	1	2	3

Muchas preguntas interesantes no pudieron ser formuladas como ítems de selección múltiple de manera satisfactoria. En todos aquellos casos en los que no hubo claro acuerdo acerca de una formulación precisa con una única respuesta correcta posible, se confeccionaron preguntas abiertas que se testearon bajo la forma de una prueba piloto que se aplicó a un conjunto de treinta personas, entre profesores en ejercicio y estudiantes de pedagogía básica en su último año de formación. Del análisis de estas respuestas surgieron preguntas de alternativas múltiples que se clasificaron, al igual que el primer conjunto de ítems acordados, en seis categorías: aritmética y geometría de tres niveles de enseñanza básica: grados 1, 2, 3 y 4; grados 5 y 6; grados 7 y 8. La clasificación en estos niveles y la necesidad de cubrirlos de un modo equilibrado se origina en la hipótesis de que el CAM del profesor será mayor si se refiere a contenidos que el profesor esté enseñando en el año en el que responde al test, lo que no pudo ser probado con la evidencia recogida.

Muchas buenas preguntas enfocadas a medir CAM fueron descartadas debido a que el contexto matemático podía ser el factor que discriminara. Si el profesor no sabe o no recuerda las matemáticas involucradas en la pregunta, difícilmente podrá hacer una inferencia sobre su relación con los alumnos. De la batería de preguntas confeccionadas originalmente, solo se mantuvieron las preguntas para las que se consideró razonable suponer que el contexto matemático no era parte de la dificultad y, por lo tanto, la respuesta dependía principalmente de la capacidad del profesor de colocarse en la posición del alumno y no de su conocimiento disciplinar. Particularmente desafiantes para los profesores resultaron ser las preguntas relacionadas con las fracciones y las preguntas relacionadas con propiedades geométricas. Redactar preguntas con baja carga disciplinar y que aun así fueran capaces de detectar un conocimiento propio del profesor resultó ser una tarea delicada. Una consecuencia de la eliminación de preguntas fue que se perdió la distribución equitativa por cada categoría.

Validación de ítems

Los 63 ítems así obtenidos se combinaron en dos formas, A y B, que compartieron 22 ítems. Se usaron dos formas para poder testear mayor número de ítems.

Una muestra de 239 personas, que respondieron a una de estas dos formas, estuvo conformada por 83 profesores en ejercicio y 156 estudiantes de último año de pedagogía básica de universidades de las ciudades de Santiago y de Concepción.

La construcción de la muestra contempla la realidad del sistema educativo chileno. En Chile existen tres tipos de instituciones de educación básica: escuelas municipales (gratuitas), escuelas particulares subvencionadas y escuelas privadas. Se buscó que la muestra de profesores se distribuyera de modo que cubriese estas tres modalidades. Este mismo criterio se usó para reflejar de manera proporcional la variedad de niveles de logro en las pruebas del Sistema de Medición de la Calidad de la Educación (SIMCE) alcanzado por las escuelas. La prueba SIMCE es una prueba censal administrada por el Ministerio de Educación que se aplica en 4.º grado todos los años y en 8.º y 10.º en años alternados. La prueba evalúa matemáticas y lenguaje. Para nuestro estudio se tuvieron en cuenta los promedios por escuela de las puntuaciones SIMCE en matemáticas para 4.º.

Los establecimientos no fueron sorteados, sino elegidos por su disposición a colaborar y por el número de profesores que aceptaron participar.

Todas las pruebas se aplicaron en el segundo semestre de 2009, entre agosto y septiembre, en eventos únicos por establecimiento, bajo la dirección de al menos uno de los miembros del equipo que confeccionó las preguntas.

Para poder apreciar la dificultad de las pruebas construidas, se aplicaron simultáneamente a la misma población las pruebas MSP_04_formA y MSP_04_formB del proyecto LMT de la Universidad de Michigan, que se han constituido en un estándar internacional de evaluación del conocimiento matemático especializado en la tarea de enseñar. La clasificación de los ítems en las distintas componentes de este conocimiento puede ser controvertida y podría ocurrir que las nuevas pruebas CAM midieran lo mismo que las pruebas LMT. Esta inquietud se despejó a través de un análisis de Componentes principales al conjunto de respuestas a las nuevas pruebas CAM y las pruebas del proyecto LMT. La confiabilidad de las cuatro pruebas se estableció con el alfa de Cronbach (todos mayores a 0,7) y el análisis de Rasch permitió estudiar el aporte de cada ítem en cuanto a la discriminación en determinado rango.

Confección y aplicación de la prueba

A partir de esa información se construyó una nueva forma C con una selección de los ítems testeados, procurando establecer los máximos equilibrios posibles de contenido, niveles escolares y dimensiones del CAM que se pretendían evaluar. Esta forma C o prueba CAM definitiva se aplicó en conjunto con una encuesta y con la prueba MSP_04_formA a una población de 296 personas que se distribuyen según la tabla 1.

En la muestra se incluyeron grupos con variada experiencia en el aula, formación de profesor, formación matemática y práctica matemática. El grupo de estudiantes de enseñanza media cursaba el décimo grado escolar, pero participaban en un taller que los reunía con estudiantes de ingeniería sistemáticamente para aprender más matemáticas. Se incorporaron a la muestra, pues no tienen una gran formación matemática pero tienen gusto por las matemáticas, *trabajan matemáticamente* y en una matemática más cercana a los contenidos evaluados. Esto ayudaría a incluir aspectos relacionados con el ámbito de las actitudes y la experiencia sistemática, tanto en la dimensión pedagógica como en la dimensión del contenido matemático.

Las pruebas CAM y LMT fueron aplicadas simultáneamente durante los años 2010 y 2011 en las ciudades de Santiago, Concepción y San Felipe a personas que no hubieran participado en las etapas previas de generación y validación de ítems.

Antes de analizar resultados de la evaluación, se descartaron preguntas de la prueba CAM aplicada sobre la base de las correlaciones ítem-test y de las curvas de Rasch de cada ítem.

Tabla 1
Distribución de la muestra de aplicación de las pruebas definitivas

	Sigla	*N*
Profesores de enseñanza general básica	PB	80
Profesores de enseñanza básica, especialistas	PBE	25
Profesores de matemáticas de enseñanza media	PM	30
Estudiantes de pedagogía en enseñanza básica	EPB	64
Estudiantes de pedagogía en enseñanza básica con especialidad en matemáticas	EPBE	12
Estudiantes de pedagogía en matemáticas de enseñanza media	EPM	60
Estudiantes de ingeniería	EI	16
Estudiantes de enseñanza media	EEM	9
Total		296

RESULTADOS

Los estudios que se realizaron con los datos recogidos corresponden a análisis de fiabilidad, comparación de las dos pruebas mediante la teoría de Rasch y análisis factorial exploratorio y confirmatorio.

Fiabilidad

Una de las cualidades esperadas de una prueba es la fiabilidad. Esta se refiere a la consistencia interna u homogeneidad de la prueba, que fue estimada con el coeficiente alfa de Cronbach y el G6 de Guttman. Ambas pruebas muestran una buena fiabilidad: el coeficiente alfa de Cronbach es de 0,85 para CAM y 0,95 para LMT y el G6 de Guttman es de 0,89 para CAM y 0,97 para LMT. La fiabilidad por subgrupo de ítems (números y geometría para CAM; números, geometría y funciones para LMT) es similar e igualmente buena.

Capacidad de discriminación

Se espera que los ítems utilizados sean capaces de discriminar el conocimiento de las personas a diferentes niveles de dificultad. Para este estudio usamos el modelo Rasch, que entre otras ventajas aporta gráficos que permiten analizar las interacciones entre las personas y los ítems. Los gráficos ítem-personas (figura 2) obtenidos para las pruebas CAM y LMT muestran la distribución de la dificultad de los ítems junto con la distribución de las habilidades de las personas usando un eje común para ambos aspectos. Esto permite decir cuán difíciles fueron ciertos ítems para una habilidad dada. En cada gráfico, a la izquierda, se muestra la distribución de la dificultad usando los identificadores de los ítems de la prueba. A la derecha, la distribución de las habilidades de dos grupos de personas: en negro los profesores de enseñanza básica y estudiantes de pedagogía de enseñanza básica y en gris claro los profesores de matemáticas y los otros estudiantes. Las líneas horizontales representan las medias de las dificultades y habilidades respectivamente.

El subgrupo de enseñanza básica (negro) alcanza altas habilidades en CAM pero no en LMT.

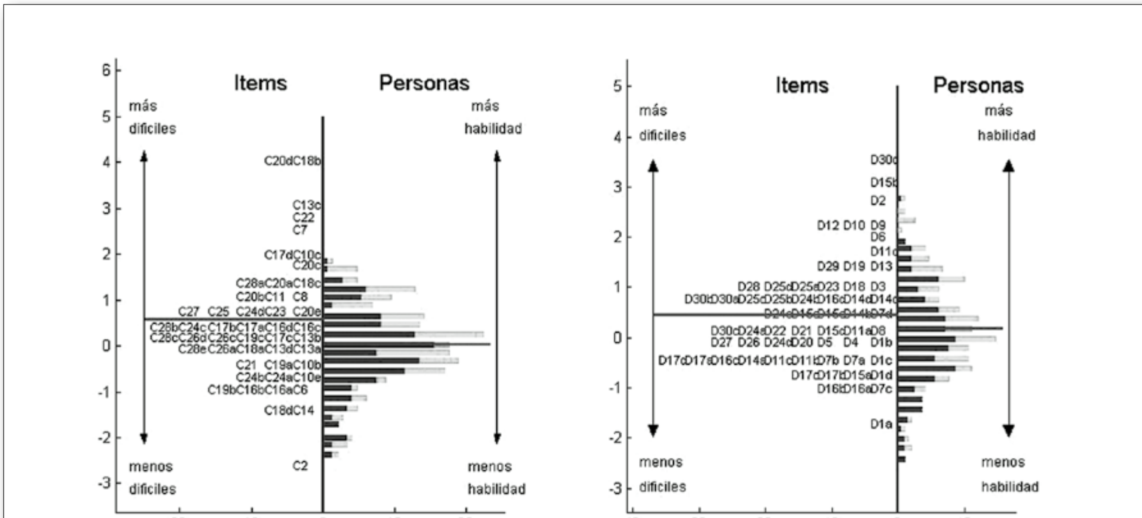

Figura 2. Gráficos ítem-persona de CAM y LMT

Análisis de validez de convergencia

Para evidenciar si cada prueba mide un constructo homogéneo, se realizaron análisis factoriales confirmatorios que permiten verificar la dimensionalidad de una prueba. Se planteó para cada prueba un modelo a un factor. Los coeficientes de todos los ítems en el factor fueron significativos y del mismo signo en ambas pruebas. Para caracterizar la calidad con la que el modelo planteado se ajusta a la realidad reflejada por los datos, se utilizan varios índices, entre los cuales calculamos χ^2/gl y RMSEA (Root Mean Square Error of Approximation), que es una función del anterior. Para un buen modelo, el χ^2 debe ser suficientemente pequeño en relación con *gl* (grados de libertad), para reflejar solamente las fluctuaciones en la muestra. Los valores de los índices obtenidos fueron buenos y similares para ambas pruebas. Para la prueba CAM, χ^2/gl=1,74, RMSEA=0,05 y para la prueba LMT, χ^2/gl=1,64, RMSEA=0,05, que son suficientemente pequeños para aceptar la hipótesis de un constructo homogéneo tanto de CAM como de LMT.

Análisis de validez de discriminación

Para comprobar que las dos pruebas miden dos constructos diferentes usamos análisis factorial exploratorio y confirmatorio sobre el grupo total y sobre subgrupos de interés. En el primer plano factorial de la muestra total (figura 3) podemos observar que la mayoría de los ítems de cada prueba se presentan agrupados. Algunos ítems restantes que no se ubican en el grupo que les corresponde se reubican correctamente con el tercer factor.

Se concluye que las pruebas miden dos constructos diferentes. Este resultado se reafirmó con un análisis confirmatorio en un modelo donde los ítems de CAM definen un factor y LMT otro y ambos factores no se correlacionan. Los índices obtenidos de ajuste del modelo son buenos (χ^2/gl=1,48 y RMSEA=0,040), lo que permite aceptar el modelo propuesto, es decir, que la prueba CAM mide efectivamente otro constructo distinto y no incluido en lo evaluado por la prueba LMT.

Este resultado aún no permite concluir que la prueba CAM mida efectivamente el *conocimiento de alumnos y matemáticas*, por lo que se analiza el comportamiento de los grupos y de los ítems a la luz de un análisis factorial.

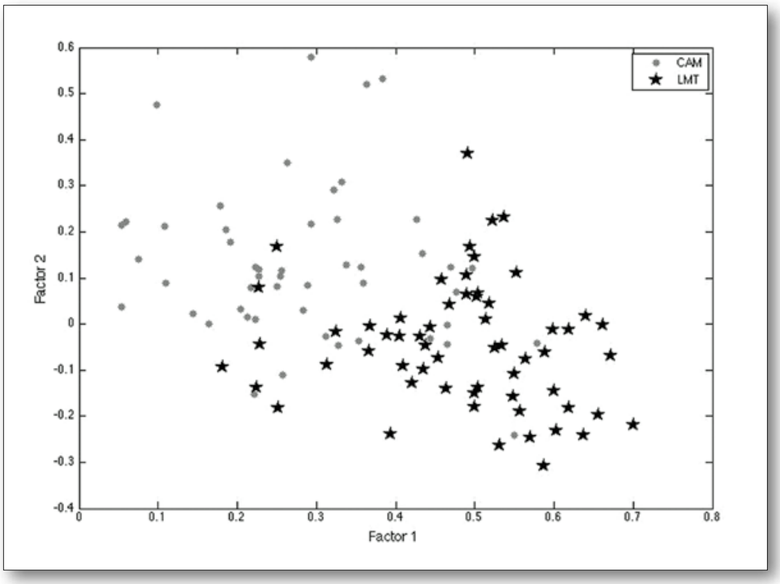

Figura 3: Primer plano factorial de la muestra total.

Análisis factorial

El análisis factorial se realizó para la muestra completa y para el grupo de enseñanza básica compuesto por 115 profesores de EB y 76 estudiantes de pedagogía en EB. En la figura 3 el primer plano factorial del conjunto de ítems de las dos pruebas muestra que ambas pruebas se separan y que ambos factores contribuyen a esta separación.

Para interpretar los factores vemos qué ítems tienen componentes más importantes en cada uno de ellos. Las componentes corresponden a las coordenadas del ítem respectivo en el gráfico de la figura 3.

Está claro que la prueba LMT tiene en su conjunto una mayor componente en el factor 1. El 77% de sus ítems tienen una componente mayor o igual a 0,3 en este factor, mientras que solo el 36% de los ítems de la prueba CAM satisfacen esa restricción. Los ítems de la prueba CAM con mayor componente en el factor 1 (como C10b, C10e, C19b, C26a, C27 y C28e) tienen mayor contenido matemático que los demás ítems de esta prueba y se refieren a razones y proporciones o a geometría. Así, el factor 1 representa el contenido matemático, y la separación de los ítems de ambas pruebas se debe a los criterios de construcción de ambas pruebas en cuanto a las matemáticas, no a la capacidad del nuevo instrumento de detectar el *conocimiento de alumnos y matemáticas*.

Haciendo el mismo análisis para el factor 2 se encuentra, en primer lugar, que este también separa los ítems de ambas pruebas. Pero ahora las preguntas con alta componente de este factor –que están todas en la prueba CAM, ya que en la prueba LMT la mayoría tienen componentes negativas– se refieren todas a tareas muy comunes en la práctica de los profesores. Estas preguntas son C13a, C13b, C13c, C13d, C16a, C18a, C18d, C20a, C20b, C20c, C20d, C24a. Por ejemplo, la pregunta C13 se refiere a secuenciar tareas de multiplicaciones según su nivel de dificultad. Los ítems C16a y C18d fueron mostrados antes para ejemplificar las dimensiones cubiertas en la construcción de ítems. La pregunta C18a se refiere a posibles respuestas erróneas cuando se pide reducir proporcionalmente un rectángulo de lados 12 y 10 cm, de modo que el lado de 12 cm quede de 6 cm. Todas las preguntas C20 se refieren a reconocer la insuficiencia de colecciones de ejemplos de triángulos para que los niños pequeños comprendan qué es y qué no es un triángulo. La pregunta C24a pide reconocer, entre varias alternativas, la causa de un error frecuente: creer que la diagonal de un rectángulo es un eje de simetría. Así, se concluye que es el factor 2 el que discrimina en cuanto al CAM del profesor.

Esta conclusión se refuerza al observar cómo se comparan los resultados de los distintos grupos muestrales en estas preguntas. Estas mismas preguntas son aquellas donde los profesores y estudiantes de enseñanza básica exhiben sus mejores resultados relativos a las otras poblaciones y las únicas donde parte de ellos –aquellos que cursan u obtuvieron una especialidad en matemáticas– superan a los profesores de matemáticas de enseñanza media y en dos de ellas superan a todos los demás grupos.

Rendimiento de los grupos en las pruebas

Los resultados para ambas pruebas, expresados en porcentajes de respuestas correctas, se recogen en la tabla 2, donde se registran los promedios y las desviaciones estándar (entre paréntesis) para cada grupo. La primera observación es desalentadora, pues los promedios en ambas pruebas se ordenan casi perfectamente de acuerdo con la formación matemática. La única diferencia curiosa es la superioridad de los estudiantes de pedagogía en enseñanza básica con especialidad en matemáticas respecto a los estudiantes de pedagogía en matemáticas. El caso de los estudiantes de enseñanza media no sorprende, pues se trata de un pequeño grupo de alumnos de elite que se dedican con entusiasmo a actividades matemáticas y que, además, están más cerca de las matemáticas escolares utilizadas en estas pruebas que los alumnos de ingeniería, con quienes comparten varias características aunque difieren en su formación. El ordenamiento general de los grupos en la prueba LMT era esperable, pero no lo era en la prueba CAM. Sin embargo, los profesores y estudiantes con alta formación matemática (PM, EI, EEM), que tienen un mejor rendimiento que los otros en ambas pruebas, tienen un rendimiento significativamente menor en CAM que en LMT. En cambio, los profesores de enseñanza básica (PB) tienen un mejor resultado en CAM que en LMT (con una diferencia significativa con un p-valor de 4%).

Tabla 2.
Promedios y desviación estándar de los 8 grupos en las pruebas CAM y LMT

	PB	*PBE*	*PM*	*EPB*	*EPBE*	*EPM*	*EI*	*EEM*	*Total*
Frecuenci	80	25	30	64	12	60	16	9	296
CAM	0,40 (0,15)	0,45 (0,13)	0,57 (0,10)	0,36 (0,19)	0,49 (0,13)	0,46 (0,18)	0,66 (0,07)	0,59 (0,08)	0,45 (0,16)
LMT	0,37 (0,18)	0,49 (0,14	0,69 (0,14)	0,34 (0,22)	0,48 (0,17)	0,46 (0,16)	0,84 (0,10)	0,84 (0,27)	0,46 (0,23)
Total	0,38 (0,15)	0,47 (0,12)	0,64 (0,11)	0,35 (0,20)	0,49 (0,12)	0,46 (0,21)	0,76 (0,07)	0,72 (0,11)	0,45 (0,19)

Estos promedios esconden las diferencias entre ítems que tienen comportamientos muy disímiles, como se puede apreciar en todos los gráficos de las figuras 2 y 3. Para ilustrar estas diferencias y las dificultades que se presentan al evaluar el CAM mostraremos dos preguntas de comportamiento opuesto.

Tabla 3.
Promedios de los 8 grupos en dos preguntas de comportamiento extremo

	PB	*PBE*	*PM*	*EPB*	*EPBE*	*EPM*	*EI*	*EEM*	*Total*
C8	0,18	0,12	0,50	0,08	0,25	0,28	0,69	0,78	0,25
C16a	0,68	0,92	0,87	0,63	0,83	0,65	0,88	0,78	0,72

La pregunta C16a ya fue comentada en la sección anterior. La pregunta C8, en cambio, se comporta como una pregunta de la prueba LMT y es interesante comentarla.

8. Un estudiante da la siguiente respuesta para el producto de 29 con 15.

$$\begin{array}{r} \underline{29\text{x}15} \\ 450 \\ \underline{15\;} \\ 465 \end{array}$$

Indique la razón más probable de este error. (Marque SOLO UNA respuesta)

a) Concepto incorrecto de multiplicación, ya que no reconoce que es 29 veces el 15.
b) No sabe las tablas de multiplicar.
c) No conoce el algoritmo estándar de la multiplicación.
d) Utiliza una estrategia interesante y se equivoca en un detalle.
e) No estoy seguro(a).

El objetivo de incluir esta pregunta era evaluar la capacidad del profesor para entender cómo piensa un alumno cuando utiliza su propio método para realizar una multiplicación, pero la situación planteada es completamente inusual en las aulas chilenas. Solo un niño que hubiese sido entrenado en cálculo mental podría proceder de ese modo, y esto se acaba de empezar a promover en Chile.

CONCLUSIONES

Se ha logrado evaluar, de manera fiable, un tipo de conocimiento pedagógico del contenido de innegable valor para la tarea de enseñar matemáticas que se puede distinguir del *conocimiento matemático común* y del *especializado*, que son las categorías del *conocimiento matemático para enseñar* que miden las pruebas LMT aplicadas.

El conocimiento de los alumnos en cuanto aprendices de matemáticas, que llamamos CAM, no se expresa ni se puede evaluar en ausencia de un contexto matemático, por lo que las personas con mayor formación matemática o que gustan de ella y desarrollan actividades matemáticas de un modo sistemático siempre exhibirán buenos resultados en pruebas que lo evalúen. En general, respondiendo a la segunda pregunta de la investigación, a mayor formación o actividad matemática, corresponden mejores resultados en la evaluación del CAM.

Sin embargo, se pueden construir ítems relacionados con aspectos relevantes de la enseñanza de las matemáticas en los que los profesores y también los estudiantes de pedagogía en enseñanza básica muestran un desempeño superior a los grupos más matemáticos. Esta superioridad la alcanzan los profesores y estudiantes de pedagogía básica con especialidad en matemáticas. Los programas que conducen a tales certificados de ningún modo alcanzan a compararse con el nivel matemático de una pedagogía en matemática para enseñanza media, por lo que la superioridad mostrada debe ser destacada.

Estos resultados apoyan la idea de fortalecer la preparación matemática de los profesores de enseñanza básica con énfasis en los contenidos que luego enseñarán en ese nivel escolar y fomentar las prácticas en el aula durante su formación. Esta es la idea que inspira los estándares para la formación de profesores de enseñanza básica elaborados por encargo del Ministerio de Educación chileno. Como parte del mismo programa ministerial se están introduciendo evaluaciones masivas estandarizadas del conocimiento de los profesores, al término de su formación inicial y como examen de habilitación. El estudio aquí presentado muestra que se pueden evaluar conocimientos propios y específicos de la tarea de enseñar matemáticas y detecta algunas características que comparten quienes han adquirido tales conocimientos. Es necesario advertir que es este y no otro el propósito de la investigación y que el test construido no debe ser aplicado con el fin de evaluar a profesores o candidatos a profesores para juzgar su competencia en la tarea de enseñar matemáticas, pues su diseño y construcción obedecen a otros fines.

Las carreras de pedagogía básica en Chile no son selectivas, a diferencia de la pedagogía en matemáticas. Por otra parte, los estudiantes de ingeniería y los de enseñanza media que participaron en el estudio han sido seleccionados de una exclusiva elite en cuanto a sus habilidades académicas. En este contexto se debe valorar la superioridad mostrada por los estudiantes y profesores de enseñanza básica en el conocimiento pedagógico del contenido evaluado.

El estudio presentado aporta antecedentes relativos a la estructura del conocimiento del profesor necesario para enseñar matemáticas, y muestra su relación con factores que podrían incidir en su adquisición y desarrollo. En él se prueba que, garantizando una base de conocimiento disciplinar, tanto la práctica en el aula como la formación específica, orientada al nivel escolar en cuestión, desarrollan efectivamente un conocimiento pedagógico del contenido que no se deduce ni de la formación matemática, ni del gusto y práctica de las matemáticas, ni de la habilidad o talento matemático, ni de la formación didáctica matemática general. Se trata de un conocimiento muy propio de la tarea de enseñar que no ha sido tan valorado como otros conocimientos de mayor prestigio académico. Esperamos que este estudio ayude a que se lo distinga y reconozca.

NOTA

Por razones de confidencialidad comprometidas con el proyecto LMT de la Universidad de Michigan y para preservar el valor de los instrumentos de evaluación construidos, no se publican ni se liberan ítems adicionales a los presentados en el texto. Invitamos a otros investigadores que se interesen en utilizar estas pruebas a contactar con nosotros para facilitar su uso con las precauciones de confidencialidad mencionadas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AHARONI, R. (2007). *Arithmetic for parents: A book for grownups about children's mathematics.* El Cerrito, CA: Sumizdat.

BALL, D.L. (1990). The Mathematical Understandings That Prospective Teachers Bring to Teacher Education. *The Elementary School Journal*, 90(4), pp. 449-466.

BALL, D.L. (2000). Bridging Practices. Intertwining Content and Pedagogy in Teaching and Learning to Teach. *Journal of Teacher Education*, 51(3), pp. 241-247.

BALL, D.L. (2002). Knowing Mathematics for Teaching: Relations between Research and Practice. *Mathematics and Education Reform Newsletter*, 14(3), pp. 1-5.

BALL, D.L., HILL, H.C., BASS H. (2005). Knowing Mathematics for Teaching. Who Knows Mathematics Well Enough To Teach Third Grade, and How Can We Decide? *American Educator*, 29(1), pp. 14-17, 20-22, 43, 46.

BALL, D.L., THAMES, M.H., PHELPS, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes it Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), pp. 389-407.

BAUMERT, J., KUNTER, M., BLUM, W., BRUNNER, M., VOSS, T., JORDAN, A., KLUSMANN, U., KRAUSS, S., NEUBRAND, M., TSAI, Y.M. (2010). Teacher's Mathematical Knowledge, Cognitive Activation in the Classroom, and Student Progress. *American Education Research Journal*, 47(1), pp. 133-180.

BECKMANN, S. (2011). *Mathematics for Elementary Teachers with Activities Manual*, 3rd edition, USA: *Addison-Wesley (Pearson Education)*.

BEGLE, E.G. (1979). *Critical variables in mathematics education: Findings from a survey of the empirical literature.* Washington DC: National Council of Teachers of Mathematics.

COLEMAN, J. (1966). *Equality of educational opportunity: Executive summary.* Washington DC: Department of Health, Education and Welfare.

EVEN, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(2), pp. 94-116.

GOLDHABER, D.D. y BREWER, D.J. (2001). Evaluating the evidence on teacher certification: A rejoinder. *Educational Evaluation y Policy Analysis*, 23, pp. 78-86.

HANUSHEK, E.A. (1972). *Education and race: An analysis of the educational production process*. Lexington, MA: DC Heath y Co.

HILL, H.C., BALL, D.L. (2004). Learning Mathematics for Teaching: Results from California's Mathematics Professional Development Institutes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(5), pp. 330-351.

HILL, H., BALL, D.L., SCHILLING, S. (2004). Developing Measures of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching. *The Elementary School Journal*, 105(1), pp. 11-30.

HILL, H.C., BALL, D.L., SCHILLING S.G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), pp. 372-400.

HILL, H.C., BLUNK, M.L., CHARALAMBOUS, C.Y., LEWIS, J.M., PHELPS, G.C., SLEEP, L., BALL, D.L. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study. *Cognition and Instruction*, 26(4), pp. 430-511.

HILL, H.C., ROWAN, B., BALL, D.L. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), pp. 371-406.

KRAUSS, S. (2007). Wie professionsspezifisch sind das fachdidaktische Wissen und das Fachwissen von Mathematiklehrkräften? *Beiträge zum Mathematikunterricht bei der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*.

KRAUSS S., BAUMERT, J., BLUM, W. (2008). Secondary mathematics teachers' pedagogical content knowledge and content knowledge: validation of the COACTIV constructs. *Journal ZDM*, 40(5), pp. 873-892.

KRAUSS, S., BRUNNER, M., KUNTER, M., BAUMERT, J., BLUM, W., NEUBRAND, M., JORDAN, A. (2008). Pedagogical Content Knowledge of Secondary Mathematics Teachers. *Journal of Educational Psychology*, 100(3), pp. 716-725.

LACOURLY, N., VARAS, M.L. (2009). Teachers Mathematical Reasoning Does Matter, Proof and Proving. *ICMI Study 19 Conference Proceedings*, 2, pp. 47-52.

LEE, P. y LEE, N.H. (2009). *Teaching Primary School Mathematics: A Resource Book,* Singapore: *Singapore Mathematics Education Series.*

MA, Liping (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publisher.

MONK, D.H. (1994). Subject area preparation of secondary mathematics and science teachers and student achievement. *Economics of Education Review*, 13, pp. 125-145.

MULLENS, J.E., MURNANE, R.J. y WILLETT, J.B. (1996). The contribution of training and subject matter knowledge to teaching effectiveness: A multilevel analysis of longitudinal evidence from Belize. *Comparative Education Review*, 40, pp. 139-157.

PARKER, T. y BALDRIDGE, S. (2003). *Elementary Mathematics for Teachers*, USA: Sefton-Ash Publishing.

ROWAN, B., CHIANG, F. y MILLER, R.J. (1997). Using research on employees' performance to study the effects of teachers on students' achievement. *Sociology of Education*, 70, pp. 256-284.

SCHERMELLEH-ENGEL K., MOOSBRUGGER H., MÜLLER H. (2003). *Evaluating the Fit of Structural Equation Models: Tests of Significance and Descriptive Goodness-of-Fit Measures Methods of Psychological Research Online*, vol. 8, n.º 2, pp. 23-74.

SHULMAN, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15, pp. 4-14.

VARAS, M.L., FELMER, P., GÁLVEZ, G., LEWIN, R., MARTÍNEZ, C., NAVARRO, S., ORTIZ, A. y SCHWARZE, G. (2008). Oportunidades de Preparación para Enseñar Matemática de los Futuros Profesores de Educación General Básica. *Calidad en la Educación, Consejo Superior de Educación*, 29, pp. 63-88.

VARAS, M.L. y LACOURLY, N. (2010). Evaluación de diversas componentes del conocimiento matemático necesario para enseñar matemáticas en Enseñanza Básica. *Presentación al Primer Congreso de Investigación Interdisciplinaria en Educación, Santiago de Chile, 30 sep.-1 oct. 2010.*

ASSESSMENT OF PEDAGOGICAL CONTENT KNOWLEDGE FOR TEACHING ELEMENTARY MATHEMATICS

Leonor Varas Nancy Lacourly
mlvaras@dim.uchile.cl nlacourl@dim.uchile.cl
Universidad de Chile, Centro de Investigación Avanzada en Educación
y Centro de Modelamiento Matemático, Santiago, Chile
Alejandro López
Universidad Andrés Bello, Facultad de Ciencias Exactas,
Departamento de Matemáticas, República 220, Santiago, Chile
alopez@unab.cl
Valentina Giaconi
Universidad de Chile, Departamento de Ingeniería Matemática
vgiaconi@dim.uchile.cl

Several authors have described the mathematical knowledge that is needed in the task of teaching. Among these authors, the Learning Mathematics for Teaching (LMT) project of the University of Michigan identified and characterized several components of this knowledge and developed tests to evaluate it. One of the components described theoretically by them refers to the Knowledge of Content and Students (KCS or CAM in Spanish).

Despite its convincing theoretical description and careful design of its items, this category, which is included in what Schulman defined as pedagogical content knowledge, could not be assessed reliably. What LMT reliably evaluated is a specialized subject matter knowledge needed in the teacher's task to teach mathematics, which the authors distinguish from the pedagogical content knowledge.

In this article, we present an instrument that detects and measures CAM reliably.

To develop this test we tried to design questions the answers of which could not be deduced by someone with mathematical skills but without teaching experience at elementary school level. Moreover, in order for the mathematical knowledge not to be a filter in the detection of CAM, we sought to design questions that did not challenge the teachers from the mathematical point of view.

To ensure that the questions had a clear and single correct answer to be distinguished from other possible answers, we generated open-ended questions that were tested in a group of 30 people. This group included elementary school teachers both in service and in their final year of training. From the analysis of the answers we developed new multiple choice questions.

The items thus obtained were tested in a sample composed of 83 practicing teachers and 156 pre-service teachers in their last year of instruction. In order to appreciate the contribution of the new instrument, the LMT test was applied simultaneously to the same population.

We then constructed a test with a selection of the previously tested items, and setting the highest possible balance of content.

This definitive CAM test was applied in conjunction with a survey and the LMT test MSP_04_formA, to a population of 296 people. The sample included groups with varied classroom experience, teacher training, mathematics background and mathematical practice.

The data obtained was processed applying several tests: analysis of reliability, analysis of psychometric properties using Rasch theory, and exploratory and confirmatory factor analysis.

Both tests show good reliability: Cronbach's alpha coefficient is 0.85 for CAM and 0.95 for LMT, and Guttman G6 is 0.89 for CAM and 0.97 for LMT.

To show whether each test measures a homogeneous construct, confirmatory factor analysis were performed, which verified the dimensionality of the test.

To characterize the quality with which the proposed factor model fits the reality reflected by the data, we calculated several indices, including estimate RMSEA = 0.05 for the CAM test and RMSEA = 0.05 for the LMT test. Both are sufficiently small to accept the hypothesis of a homogeneous construct both in CAM and LMT.

To verify that the two tests measure two different constructs we used exploratory and confirmatory factor analysis on the whole group and on subgroups of interest.

The principal components analysis allowed for the detection of two factors explaining the highest percentage of variance. The first factor is the difficulty of the mathematical content. The items with the highest component in factor 2 refer to common tasks in the practice of teaching, such as knowledge of common mistakes, knowledge of how students learn and ability to argue at their level, and knowledge of the limitations and mistakes induced by the representations used to explain mathematical concepts.

This result was confirmed with a confirmatory analysis in a model where CAM items defined one factor and LMT defined the other, and both factors are not correlated. We obtained RMSEA = 0.040 for this model, which can justify the proposed model, i.e. the CAM test effectively measures a construct which is different and not included in the construct evaluated by the LMT test.

We confirm that, in general, more mathematical preparation corresponds to better results in the CAM test as in the LMT test.

However, the CAM test, and in particular some of its items, detect relevant aspects of mathematics teaching, such as the ones described above. In these items, elementary school teachers in training and in service show better performance than secondary school teachers and engineering students. Furthermore, the best results on these items are attained by elementary school teachers, in service and in training, with specialization in mathematics. Programs that lead to such certificates don't reach the mathematical level attained by secondary school math teachers and moreover, they are not as selective. Thus, the aforementioned superiority has to be attributed to a different training or experience, focused on the task of teaching mathematics at this school level.