

COMPRENSIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN MUESTRAL MEDIANTE CONFIGURACIONES DIDÁCTICAS Y SU IMPLICACIÓN EN LA INFERENCIA ESTADÍSTICA

UNDERSTANDING OF SAMPLING DISTRIBUTION THROUGH DIDACTIC CONFIGURATIONS AND ITS IMPLICATION IN STATISTICAL INFERENCE

Hugo Alvarado, Maritza Galindo, Lidia Retamal
Departamento de Matemática y Física Aplicadas.
Universidad Católica de la Santísima Concepción.
alvaradomartinez@ucsc.cl, mgalindoillanes@gmail.com, lretamal@ucsc.cl

RESUMEN: En este trabajo presentamos un estudio sobre la comprensión de las distribuciones muestrales y su vinculación con la estimación de parámetros por intervalos de confianza. La enseñanza de conceptos estadísticos, dirigida a estudiantes universitarios, está basada en la implementación de configuraciones didácticas. Se aplicaron dos problemas abiertos y un cuestionario de intervalos de confianza de Olivo, Batanero y Díaz (2008) a un grupo de 113 estudiantes. Los resultados indican mejoras en la comprensión de la estimación de parámetros, la relación con coeficientes de confianza y la elección de la distribución muestral adecuada para la construcción de intervalos de confianza. Además, se confirman las dificultades de procedimientos algebraicos en las distribuciones muestrales.

PALABRAS CLAVE: distribuciones muestrales, configuración epistémica, intervalos de confianza, estudiantes universitarios.

ABSTRACT: We present a study on the understanding of sampling distributions and their connection with parameter estimation by confidence intervals. The teaching of statistical concepts, aimed at university students, is based on the implementation of settings configurations. Was applied two open problems and a questionnaire on confidence intervals Olivo, Batanero and Diaz (2008) to a group of 113 students. The results indicate improvements in the understanding of the estimated parameters, the coefficients relating to trust and choosing the appropriate sampling distribution to construct confidence intervals. In addition, the findings algebraic procedural difficulties of sampling distributions.

KEY WORDS: Sampling distributions, epistemic setting, confidence intervals, university students.

Fecha de recepción: diciembre 2011 • Aceptado: diciembre 2012

Alvarado, H., Galindo, M. y Retamal, L. (2013). Comprensión de la distribución muestral mediante configuraciones didácticas y su implicación en la inferencia estadística, *Enseñanza de las Ciencias*, 31(2), pp. 75-91

INTRODUCCIÓN

La investigación en educación estadística es escasa en el contexto universitario, sobre todo en la problemática de los conocimientos de los estudiantes y las estadísticas que se enseñan. En un sentido más amplio, Campanario (2003) señala que las concepciones del docente sobre la ciencia, la enseñanza, el aprendizaje y las motivaciones de los alumnos, influyen en sus estrategias de enseñanza y en su actuación en el aula. Otro elemento que es necesario considerar son las discontinuidades matemáticas y didácticas entre la educación secundaria y el primer ciclo universitario (Fonseca, 2003), que ponen en evidencia la atomización y rigidez del bagaje matemático de los alumnos cuando llegan a la universidad. Surgen componentes de interés, como la actitud del profesor frente a la enseñanza, los medios de evaluación, los planes de estudios en términos de competencias y resultados de aprendizajes, el perfil del académico universitario de ciencias básicas y la investigación sobre si en el aula se favorece la comprensión de los conceptos estadísticos. Nos centraremos en el análisis de este último elemento.

Respecto a las escuelas de ingeniería, existe un gran interés por estructurar sus carreras orientándolas al desarrollo de competencias (Letelier, López, Carrasco y Pérez, 2005) y definiendo estándares para el currículum de pregrado, siendo uno de ellos los resultados de aprendizaje. La estadística puede ser considerada, en el currículo de ingeniería, una etapa de transición entre los conocimientos de matemáticas y los de las ciencias de la ingeniería. La distribución muestral es considerada la piedra angular de la inferencia estadística (Garfield, delMas y Chance, 2004) y tiene como prerrequisitos esenciales para su comprensión apropiarse de la idea de distribución y variabilidad (Pfannkuh y Wild, 2004) y familiarización con distribuciones comunes como la binomial y la normal (Ramírez, 2008). Es un tópico de la estadística el ser considerada como difícil por los estudiantes, ya que conjuga muchos conceptos asociados, diversos tipos de lenguaje y representaciones, propiedades, procedimientos y argumentos (Alvarado y Batanero, 2008). Específicamente, las distribuciones muestrales se consideran importantes en el trabajo del ingeniero, al proporcionar herramientas metodológicas para analizar la variabilidad, determinar relaciones entre variables, diseñar de forma óptima los experimentos y mejorar las predicciones y la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre.

Este trabajo se interesa por analizar la comprensión teórica y práctica de las distribuciones muestrales y su alcance en la estimación de parámetros por intervalos de confianza en estudiantes universitarios, al finalizar una experiencia de enseñanza basada en la simulación y de forma algebraica. Se han propuesto dos problemas abiertos a los estudiantes sobre distribuciones muestrales, que incluyen las diferentes entidades primarias que los conforman de acuerdo con el marco teórico, replicando el cuestionario de Olivo, Batanero y Díaz (2008) acerca de los intervalos de confianza. Se analizan las respuestas al cuestionario y los problemas, considerando las investigaciones relacionadas con el tema.

En nuestra investigación hemos intentado completar los estudios sobre el teorema central del límite (Alvarado y Batanero, 2007), y su relación con las actividades de simulación computacional y algebraica de las distribuciones muestrales (delMas, Garfield y Chance, 2004; Inzunza, 2006; Retamal, Alvarado y Rebolledo, 2007).

FUNDAMENTO DEL ESTUDIO

En esta sección se describen algunas investigaciones previas relacionadas con las distribuciones muestrales y los intervalos de confianza, el contexto de la estadística en la ingeniería y la descripción de los elementos específicos del marco teórico (Godino, Batanero y Font, 2009) considerado en el proceso de estudio de la distribución muestral.

Investigaciones previas

En la educación estadística se sugiere el uso de la informática para abordar el aprendizaje de la distribución muestral; por ejemplo, la utilización de *applets* disponibles en ambiente web (Inzunza, 2007; Garfield y Ben-Zvi, 2008). Chance, Ben-Zvi, Garfield y Medina (2007) resaltan el apoyo que pueden proporcionar los recursos informáticos en actividades de automatización de cálculos y gráficos, exploración de datos, visualización de conceptos abstractos, simulación de fenómenos aleatorios, investigación de problemas reales.

Batanero, Tauber y Sánchez (2001) describen una experiencia de enseñanza de la distribución normal dentro de un curso de análisis de datos basado en el uso de ordenadores y dirigido a estudiantes universitarios. Los resultados indicaron que aprendieron a utilizar el software y adquirieron muchos de los elementos de significado considerados en la enseñanza. No obstante, se observaron dificultades en la discriminación entre los datos empíricos y los modelos matemáticos, en interpretar ciertos gráficos y resúmenes estadísticos, así como escasa capacidad de análisis y síntesis.

delMas, Garfield, y Chance (2004), tras una enseñanza basada en la simulación, destacan la falta de comprensión del efecto del tamaño de la muestra sobre la variabilidad de la distribución muestral y confusión entre la media de la población (parámetro) y la media muestral. Los autores sugieren que la tecnología por sí sola no es suficiente para la comprensión, sino que las actividades y la enseñanza de tipo constructivista tienen un rol importante.

Inzunza (2006) analiza el significado de las distribuciones muestrales en un ambiente de simulación computacional mediante el software Fathom. Destaca que los estudiantes cometen errores frecuentes en el uso de representaciones numéricas, tienen un manejo superficial de los conceptos y de las propiedades de las distribuciones muestrales y presentan pocos elementos argumentativos.

Retamal, Alvarado y Rebolledo (2007) llevan a cabo una enseñanza contextualizada de las distribuciones muestrales con el uso del programa @risk en estudiantes de ingeniería. Para su comprensión, sugieren desarrollar el lenguaje gráfico en la simulación, seguido de la representación algebraica según la naturaleza de las variables aleatorias.

Ramírez (2008) analiza las formas de razonamiento que muestran estudiantes de maestría en el estudio de la distribución normal basado en un enfoque frecuencial y con un desarrollo empírico de la distribución con la simulación mediante el software Fathom. Concluye que este recurso le permitió erradicar o modificar las conceptualizaciones erróneas que tenían los estudiantes sobre la distribución normal, aunque destaca que se debe poner atención en el lenguaje y la simbología matemática utilizados por los estudiantes, como el uso de datos reales para el estudio de la distribución normal.

Los trabajos anteriores confirman la importancia de apropiarse de conceptos previos de la distribución muestral, que según Gardfiel, delMas y Chance (2004), corresponden a análisis de gráficos, medidas de tendencia central y de dispersión, construcción de la distribución normal, cálculo de probabilidades como área bajo la curva, noción de muestreo aleatorio y exploración de la variabilidad. Se han realizado estudios relacionados con las dificultades de comprensión de la aproximación normal por la normal y la presentación del teorema central del límite en una muestra de libros de texto de estadística destinados a la formación de ingenieros (Alvarado y Batanero, 2007, 2008). Estas investigaciones son la base de nuestra propuesta de enseñanza de las distribuciones muestrales.

Olivo y Batanero (2007) describen el significado que tiene un intervalo de confianza como procedimiento y resaltan, para su comprensión, la adquisición de elementos previos como el de la distribución muestral. Enfatizan los siguientes errores de los estudiantes: pensar que para distintas muestras se obtendrá el mismo intervalo y que el coeficiente de confianza no hace cambiar el intervalo. Los autores recomiendan diseñar unidades didácticas basadas en la simulación para incrementar la relevancia del aprendizaje.

En el contexto de estimar un parámetro poblacional, Inzunza (2010) propone una alternativa de ambiente de aprendizaje basada en el uso de dos herramientas de software (Fathom y Excel) para la enseñanza y el aprendizaje de la estimación de parámetros por intervalos de confianza. Los resultados mostraron que un elevado porcentaje de los diecisiete estudiantes de estudios internacionales lograron desarrollar un razonamiento adecuado sobre el tema, de acuerdo con un cuestionario administrado al final de las actividades y con las entrevistas realizadas a dos estudiantes.

Sobre la base de los estudios anteriores, en este trabajo se plantea el siguiente interrogante en el aula de estadística: *¿Los estudiantes utilizan* variados elementos de significado de las distribuciones muestrales y los aplican correctamente en sus respuestas a las tareas de evaluación en un método de inferencia estadística? Para ello, se implementa una enseñanza de la distribución muestral mediante distintas representaciones. Se evalúan dos problemas abiertos sobre el tema y su alcance en la estimación de parámetros por intervalos de confianza a través del cuestionario de Olivo, Batanero y Díaz (2008).

Contexto y perspectiva teórica

Actualmente, distintas universidades están presentando nuevos modelos educativos basados en resultados de aprendizaje y competencias, destacando el rol activo del estudiante, la utilización de recursos informáticos y de plataformas en la docencia, la reflexión sobre la retroalimentación oportuna durante el proceso de la evaluación de los resultados de aprendizaje y la preparación del profesorado en metodologías de enseñanza actualizadas. En este modelo, la tarea no es fácil para los docentes, deben prepararse en temas como el diseño curricular, la didáctica por competencias, la participación activa de los estudiantes y las tutorías personalizadas, entre otros. La base de este modelo son los estándares de «La Iniciativa CDIO» (<<http://www.cdio.org/>>), que busca proveer a los estudiantes de una educación que aborde los fundamentos de la ingeniería, en un contexto de Concebir-Diseñar-Implementar-Operar (CDIO) los sistemas y productos del mundo real. De doce *estándares*, los que se podrían desarrollar en cursos de estadística son los Resultados de aprendizaje, el Aprendizaje activo y la Evaluación del proceso de aprendizaje. La tendencia en las escuelas de ingeniería es tener un currículo cada vez menos técnico y más práctico. Ello ha originado un gran interés por mejorar la enseñanza en este campo; por ejemplo, en las Conferencias Internacionales sobre Enseñanza de la Estadística (ICOTS), se han organizado sesiones especiales sobre la formación estadística de los ingenieros (Martín, 2006; Romeu, 2006). Un curso tradicional de estadística en ingeniería incluye el estudio de las distribuciones muestrales, puente entre las distribuciones de probabilidades y la estimación de parámetros (puntual y por intervalo de confianza). Estos tópicos, además de contribuir a la adquisición de conocimientos conceptuales y procedimentales sobre objetos estadísticos variados, permiten generar competencias estadísticas específicas que pueden alcanzarse, tales como: identificar, modelar y resolver problemas que describan fenómenos aleatorios en la práctica de ingeniería; resolver problemas que requieren herramientas de probabilidad y técnicas de inferencia estadística a partir de datos experimentales; usar técnicas o paquetes computacionales para modelar, analizar y resolver problemas del área de estadística; comunicar con claridad sus resultados provenientes de análisis estadísticos; interpretar críticamente la información estadística; habilidad para realizar experimentos de simulación en el diseño de procesos. Todas estas competencias se deben reforzar para la formación óptima e integral del profesional ingeniero que se espera que egrese, hoy en día, de las facultades y escuelas de ingeniería.

Este trabajo está enfocado desde la perspectiva del conocimiento y la instrucción matemática que proporciona el llamado enfoque ontosemiótico (Godino y Batanero, 1998; Godino, 2002).

En la actividad matemática es necesario introducir seis tipos de entidades primarias: situaciones-problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos. En cada caso, estos objetos estarán

relacionados entre sí formando *configuraciones*, definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre estos (Godino, Batanero y Font, 2009: 8).

Según los autores, se dirá que un «sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas» (Godino, Batanero y Font, 2009: 10). En nuestro caso, la tipología de objetos matemáticos primarios que se debe considerar la componen: *situaciones y problemas* que inducen actividades matemáticas y definen el campo de problemas asociado a la distribución muestral; *procedimientos y operaciones* que se realizan en distintos tipos de prácticas y que pueden llegar a convertirse en objeto de enseñanza; *representaciones* materiales utilizadas en la actividad de resolución de problemas (términos, expresiones, símbolos, tablas, gráficos); *defniciones y propiedades* características de la distribución muestral y sus relaciones con otros conceptos y proposiciones de los intervalos de confianza; *demonstraciones* que empleamos para probar sus propiedades y que llegan a formar parte de su significado. Estas entidades primarias estarán relacionadas con las configuraciones de tipo manipulativo, computacional y algebraico.

En este trabajo, el objeto distribuciones muestrales surge al determinar la distribución muestral del promedio de la muestra según la naturaleza de las variables aleatorias y su relación con la inferencia estadística. Además, se implementan las configuraciones didácticas que acrecienta el lenguaje, sobre todo en la variedad de representaciones gráficas, y se evalúan preferentemente actividades de procedimiento analítico y conceptos directamente relacionados con los intervalos de confianza.

METODOLOGÍA DE TRABAJO

Contexto educativo

El tiempo dedicado a la enseñanza de las distribuciones muestrales (para los casos de la distribución de estimadores obtenidos de poblaciones normales y no normales) y los intervalos de confianza fue de 23 sesiones de 60 minutos en el aula y 2 en el laboratorio de computación, apoyadas con cañón multimedia, notebook, pizarrón, la planilla Excel y los applets elaborados de la distribución binomial y de Poisson, disponible en la plataforma Moodle del curso. La implementación se desarrolló en la asignatura de Estadística con participación en las evaluaciones de 77 estudiantes de Ingeniería Civil de la Facultad de Ingeniería y 36 de Ingeniería Comercial de la Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas. Las actividades planificadas se resuelven colectivamente en la clase y los ejercicios fuera del aula. La recogida de información de actividades específicas se realizó en los meses de abril y junio del año 2010. Para la implementación de las distribuciones muestrales se ha considerado el análisis de contenido en una muestra de 16 libros de estadística dirigidos a la enseñanza en ingeniería (Alvarado y Batanero, 2008), mediante un acercamiento global a los conceptos y las propiedades relacionadas en que se seleccionaron los problemas más adecuados para este nivel educativo.

La trayectoria didáctica del proceso de estudio ha tenido en cuenta: la selección de los conceptos más importantes; proponer a los estudiantes el estudio de la confiabilidad de un sistema mediante la aproximación en distribución; utilizar en la enseñanza los diversos recursos didácticos a través de las configuraciones epistémicas en los campos de problemas aplicados a la ciencia e ingeniería. En la tabla 1 se presentan las conexiones de los elementos de significados de las distribuciones muestrales en poblaciones desconocidas mediante las tres configuraciones epistémicas.

Tabla 1.
Configuraciones epistémicas: manipulativa, computacional y algebraica

<i>Elemento de significado</i>	<i>Configuración manipulativa</i>	<i>Configuración computacional</i>	<i>Configuración algebraica</i>
Problemas	<ul style="list-style-type: none"> – Estudio empírico de distribuciones de la suma de variables aleatorias 	<ul style="list-style-type: none"> – Obtención experimental de distribuciones muestrales asintóticas – Investigar el comportamiento de las distribuciones muestrales cuando cambian los parámetros 	<ul style="list-style-type: none"> – Obtener modelos matemáticos para la distribución de estadísticos
Lenguaje	<ul style="list-style-type: none"> – Expresiones verbales – Gráficas de barra, cajas, etc. 	<ul style="list-style-type: none"> – Representaciones dinámicas – Términos e iconos del programa 	<ul style="list-style-type: none"> – Representación simbólica – Expresiones matemáticas específicas
Procedimiento	<ul style="list-style-type: none"> – Experimentación con dispositivos manipulables – Obtención de distribuciones muestrales empíricas – Cálculo frecuencial de probabilidades 	<ul style="list-style-type: none"> – Simulación, variación de parámetros, experimentación 	<ul style="list-style-type: none"> – Cálculo de probabilidades – Transformaciones algebraicas
Conceptos	<ul style="list-style-type: none"> – Experimento estadístico, muestreo, muestras – Variable estadística, distribución de frecuencias, distribución muestral 	<ul style="list-style-type: none"> – Aproximación, distribución muestral asintótica – Función densidad 	<ul style="list-style-type: none"> – Variables y convergencia – Modelo y parámetros
Propiedades	<ul style="list-style-type: none"> – Media y varianza muestral – Estimador insesgado, distribución aproximada 	<ul style="list-style-type: none"> – Aproximación normal de distribuciones clásicas – Efecto de los parámetros sobre la aproximación 	<ul style="list-style-type: none"> – Tamaño muestral y efecto en la convergencia – Buen estimador y corrección de continuidad
Argumentos	<ul style="list-style-type: none"> – Comprobación de ejemplos – Generalizar conclusiones de la experiencia 	<ul style="list-style-type: none"> – Visuales, generalización y comprobación de ejemplos 	<ul style="list-style-type: none"> – Demostración deductiva

Desarrollo de la enseñanza

El proceso de estudio se organizó mediante una secuencia de sesiones agrupadas en dos lecciones:

L1. Distribución de estimadores obtenidos de poblaciones normales. Se proponen a los estudiantes actividades y ejercicios de aplicación algebraica en una y dos muestras aleatorias extraídas de poblaciones normales, de los teoremas de la distribución de la media muestral y de la varianza muestral, así como el cálculo de las probabilidades correspondientes. Además, se obtienen los estadísticos *t*-student y de Fisher para el caso de dos muestras, con uso de las tablas estadísticas.

L2. Distribución de estimadores obtenidos de poblaciones no normales. Se realizaron actividades y ejercicios que permitieron al estudiante asimilar condiciones para la aproximación de la forma algebraica, utilización adecuada de la corrección por continuidad. Se plantearon actividades para que los estudiantes aplicaran algebraicamente el teorema central del límite a las distribuciones de variables aleatorias discretas y continuas, y estudiar la convergencia gráfica de las distribuciones de probabilidades mediante Excel y Applet. Por último, se propone elaborar y aplicar los intervalos de confianza en sus variados casos en una y dos muestras aleatorias y donde la población es normal o desconocida.

A continuación, se ilustran tres actividades basadas en las configuraciones didácticas diferenciadas que fueron desarrolladas tanto por los estudiantes de Ingeniería Civil como de Ingeniería Comercial.

Actividad 1: Los datos del Departamento de Agricultura indican que el consumo semestral de manzanas de una mujer elegida aleatoriamente se distribuye según una normal de media 19,9 libras y una desviación estándar de 3,2 libras, mientras que el consumo semestral de manzanas de un hombre elegido aleatoriamente sigue una distribución normal con media 20,7 libras y desviación estándar de 3,4 libras.

- Admitamos que se elige aleatoriamente a una mujer. ¿Qué proporción de las mujeres tendrán un consumo de manzanas entre 19,4 y 20,3 libras? ¿Qué puede comentar de este resultado?
- Supongamos que se eligen aleatoriamente dos muestras de 30 mujeres y 35 hombres. ¿Cuál es la probabilidad de que el consumo medio de manzanas de la mujer sea mayor que el consumo medio de los hombres? ¿Qué puede comentar de este resultado?
- El Departamento de Agricultura quisiera, para el caso de los hombres, que el consumo medio de la muestra se desviara a lo más en 1,3 libras del verdadero consumo medio, con una probabilidad de 0,94. ¿Cuántos hombres se necesitan incluir en la muestra para tener tal grado de exactitud?
- Si se toma una muestra de 20 mujeres, calcular el porcentaje de mujeres cuya desviación estándar muestral sea a lo más de 3,83 libras.

El objetivo de esta actividad de configuración algebraica es identificar la distribución de probabilidad normal correspondiente a la variable aleatoria consumo de manzanas según género, con sus respectivos parámetros, y determinar que la proporción de mujeres que tendrá un consumo de manzanas entre 19,4 y 20,3 libras es del 12%, lo que es muy poco probable que ocurra. Además, se debe identificar en *b)* que la distribución de la media aritmética de una muestra aleatoria de población normal tiene distribución normal, y establecer que la distribución de la diferencia de medias muestrales, en poblaciones normales con varianzas conocidas, sigue una distribución normal. Se espera que se argumente que la probabilidad de que el consumo medio de manzanas de la mujer sea mayor que el consumo medio de los hombres es 16,35%, lo que indica una baja probabilidad de ocurrencia. En el apartado *c)* se pretende que el estudiante determine el error de estimación en poblaciones normales y, mediante un procedimiento algebraico, indique que se requieren 25 hombres para tener tal grado de exactitud. En *d)* se pide obtener la distribución de la varianza muestral en poblaciones normales, identificar que la suma de cuadrados de variables aleatorias independientes normales estándar tiene una distribución chi-cuadrado. El estudiante debe realizar el cálculo algebraico de variables aleatorias normales con las tablas y/o calculadora, obteniendo una solución con probabilidad de un 90%.

Actividad 2. Alonso comenzó su empresa comercial hace veinte años. La empresa se enfrenta a algunas decisiones importantes con respecto al cuidado de la salud de sus empleados. Antes de tomar una resolución, se decide formar un comité de seis representantes de los trabajadores para que analice cuidadosamente el tema y haga una recomendación con respecto a qué plan se adapta mejor a las necesidades del empleado. Considera que los puntos de vista de los trabajadores más jóvenes con respecto al cuidado de la salud pueden diferir de los correspondientes empleados de mayor edad. Los tiempos de servicio (redondeados al año más cercano) de los cuarenta trabajadores que actualmente están en la nómina de dicha empresa son como se indica a continuación:

8	1	0	2	7	0	4	5	3	14
2	4	18	2	1	2	0	2	16	4
2	8	9	1	1	2	5	10	11	3
1	4	1	2	2	3	3	19	7	3

- ¿Qué puede esperar respecto al número promedio de años en la empresa de los integrantes de este?
- ¿Cómo debería seleccionar el comité? Lleve a cabo el experimento de escoger al azar un grupo de seis empleados (en papel, con la tabla de números aleatorios y con uso de Excel). ¿Qué promedio obtuvo? ¿Cómo se compara este resultado con la media de la población?
- Compare su resultado con el de sus compañeros del grupo.
- Seleccione otra muestra o comité de tamaño 6. Comente y compare el error de muestreo con el obtenido en *b)*.

- e) De esta población de $N = 40$ trabajadores pueden seleccionarse muchas muestras de tamaño $n = 6$, ¿cuántas son posibles?

Nota: A continuación, se va a estudiar la simulación de extracción de m muestras de tamaño n ; en la cual se formarán matrices (m,n) de orden $m \times n$ (número de réplicas \times número de muestras)

- f) Realice el experimento de seleccionar al azar 30 muestras de tamaño 6 $(m,n) = (30,6)$ y calcule la media de cada una.
- g) ¿Cómo se compara la forma de la distribución de años de experiencia de todos los empleados con la de las medias muestrales?
- h) Qué sucede, en cuanto a la forma gráfica y el cálculo de la media, conforme se van tomando muestras mayores, por ejemplo para $n = 25$ en lugar de $n = 6$?
- i) ¿Existe diferencia entre el intervalo de las medias muestrales y el intervalo de los valores poblacionales?
- j) ¿Qué se puede concluir de este experimento? Comente las características importantes.
- k) Calcule los errores estándar de la media de la muestra de tamaño $n = 6$ y 25 al seleccionar al azar réplicas de $m = 30$ muestras.

Recuerde que si la desviación estándar de la población es σ , el error estándar de la media (o desviación estándar de la distribución de muestreo de la media muestral) se define por $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$ donde n representa el número de observaciones en cada muestra.

- l) Simular la extracción de las siguientes m muestras de tamaño n : $(m,n) = (30,1), (30,70), (60,6)$. Utilizando la planilla Excel, calcular el valor medio de cada muestra, el error estándar de la media y, mediante la representación gráfica, compare las distribuciones de las medias muestrales.

La actividad 2 conjuga las configuraciones manipulativas y computacionales, y tiene por objetivo evaluar si el estudiante es capaz de seleccionar muestras de tamaño 6, luego obtener la media aritmética con el fin de compararla con la media de la población, y descubrir el concepto de error de muestreo $e = |\bar{X} - \mu|$. Del apartado f) al l) el estudiante estudia la simulación de extracción de m muestras de tamaño n , en la cual se formarán matrices (m,n) de orden $m \times n$ (número de réplicas \times número de muestras). Se espera que se observen las diferencias en la forma de la población y la distribución de las medias muestrales, y se determine que a mayor n menor es el sesgo. Otro objetivo es ilustrar el teorema central del límite en j), donde el estudiante descubre que, conforme aumenta el tamaño de la muestra, la distribución de la media muestral se aproxima a la distribución de probabilidad normal. En k) los estudiantes calculan los errores variando el tamaño de las muestras, de modo que según sea el número de las muestras y de las réplicas observen gráficamente que la forma se aproxima a una distribución normal l).

Actividad 3. Producto de los altos índices de delincuencia en la ciudad, el alcalde está pensando en aplicar la «tolerancia cero» para reducir dichos índices. Como una forma de estimar la opinión de la ciudadanía, realiza una encuesta aplicada a dos muestras aleatorias independientes de 150 hombres y 190 mujeres para conocer su opinión sobre la promulgación de la medida, encontrando que 56 hombres y 61 mujeres están a favor de la implementación de la «tolerancia cero».

- a) Determine un intervalo de confianza del 98% para la proporción de hombres que están a favor de la medida.
- b) Determine un intervalo de confianza del 98% para la proporción de mujeres que están a favor.
- c) Al comparar los intervalos, ¿podemos observar que hombres y mujeres no difieren en su opinión?

La actividad 3 tiene por objetivo estimar por intervalo de confianza la media (proporción) para muestras grandes. Los estudiantes tienen que calcular de manera correcta el percentil de la normal estándar y aplicar el teorema central del límite. Para ello, deben identificar las distribuciones de probabilidad aproximada de las personas a favor de la medida contra la delincuencia según el género y concluir con un 98% de confianza que los hombres y las mujeres no difieren en su opinión.

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

La innovación en la enseñanza de la distribución muestral fue complementar las actividades clásicas de procedimiento analítico con situaciones empíricas de selección de muestras mediante dispositivos manipulativos y computacionales. Para evaluar el efecto de implementar las configuraciones didácticas en las dos lecciones de la distribución muestral, en primer lugar, se propusieron a los estudiantes dos problemas abiertos para el caso de la distribución de estimadores obtenidos tanto de poblaciones normales (problema 1) como de poblaciones no normales (problema 2). El objetivo fue determinar el grado de apropiación de las entidades primarias para el tema de la distribución muestral en la configuración de tipo algebraica, y que a su vez contribuyan como conocimientos previos a la comprensión de los intervalos de confianza. La distribución muestral puede considerarse como el puente entre las distribuciones de probabilidad y los intervalos de confianza.

Resultados de los problemas abiertos

A continuación, se analizan las respuestas de los estudiantes a los dos problemas, describiendo su contenido y el procedimiento de su solución. Del grupo de 113 estudiantes, respondieron a los dos problemas 77 estudiantes de Ingeniería Civil y 31 de Ingeniería Comercial.

Problema 1. Una compañía puede comprar materia prima a diferentes proveedores y está interesada en el contenido de impurezas del producto. Los niveles de impurezas, en %, contenidos en sendas remesas del producto siguen una distribución normal con media 4,2 y desviación estándar 0,6.

- a) Determine la probabilidad de que el promedio del nivel de impureza de una revisión de los registros de 50 proveedores sea menor de 4,3.
- b) Calcular la probabilidad de que el promedio de una muestra de tamaño 36 esté dentro de 0,02 del verdadero nivel de impureza.

En este problema se espera que los estudiantes logren obtener la distribución de la media muestral en poblaciones normales. En el apartado a) los estudiantes deben identificar la distribución de probabilidad normal determinando los parámetros de los niveles de impureza de un producto de cierto proveedor. A partir de una muestra de 50 proveedores se obtiene la distribución de muestreo del promedio del nivel de impureza de la muestra aleatoria. Así, el estudiante debe realizar el cálculo algebraico de variables aleatorias normales con calculadora y/o tablas estadísticas, obteniendo una probabilidad de 0,88. En el apartado b) el estudiante determina de forma algebraica el error de estimación en poblaciones normales, aplicando que la varianza de la distribución de la media corresponde a la varianza poblacional sobre el tamaño de la muestra. Así, obtiene una probabilidad de 0,1586 de que el promedio de una muestra de tamaño 36 esté dentro de 0,02 del verdadero nivel de impureza.

Tabla 2.
Frecuencia de elementos de significado del problema 1 ($n = 108$)

Apartado	Pasos correctos en la solución	Ing. civil		Ing. comercial	
		$n = 77$	%	$n = 31$	%
a	Enunciado sobre la media aritmética en poblaciones normales	69	89,6	30	96,7
	El valor esperado de la distribución de la media aritmética es la media de la población	71	92,2	31	100,0
	La varianza de la distribución de la media aritmética es la varianza de la población sobre el tamaño de la muestra aleatoria	71	92,2	27	87,1
	Cálculo algebraico de variables aleatorias normales con calculadora y/o tablas estadísticas	71	92,2	28	90,3
	Llegar al resultado correcto	58	75,3	19	61,3
b	Notaciones y símbolos	36	46,8	6	19,4
	La varianza de la distribución de la media aritmética es la varianza de la población sobre el tamaño de la muestra aleatoria	32	41,6	5	16,1
	Cálculo algebraico de variables aleatorias normales con calculadora y/o tablas estadísticas	28	36,4	3	9,7
	Llegar al resultado correcto	21	27,3	1	3,2

En la tabla 2 observamos que, después de definir la media aritmética de la población, el 89,6% de los 77 estudiantes de Ingeniería Civil justifican que la media aritmética de una muestra aleatoria de población normal tiene distribución normal, el 92,2% identifican el valor esperado de la distribución de la media aritmética como la media de la población, la varianza como la varianza de la población sobre el tamaño de la muestra. Luego, los estudiantes realizan el cálculo del promedio del nivel de impureza de la revisión de los registros de 50 proveedores sea menor de 4,3, a través de la estandarización, llegando al resultado correcto el 75,3% de los estudiantes. Se observa que los errores se producen en su mayoría porque no utilizan bien la tabla de la distribución normal. En el apartado *b*), observamos que el 46,8% de los estudiantes logran identificar la situación problema como la determinación del error de estimación en poblaciones normales y el 41,6% recuerdan que la varianza de la distribución de la media corresponde a la varianza poblacional sobre el tamaño de la muestra. Por lo que el 36,4% realizan el cálculo correcto para obtener la probabilidad de que el promedio de una muestra de tamaño 36 esté dentro de 0,02 del verdadero nivel de impureza, llegando a este resultado solo el 27,3% de los estudiantes.

Respecto a los 31 estudiantes de Ingeniería Comercial, los resultados son mejores en la justificación de que la media aritmética de una muestra aleatoria de población normal tiene distribución normal, así como en la identificación del valor esperado de la distribución de la media aritmética como la media de la población (diferencia de 7,1 y 7,8% respectivamente). En cambio, en las aplicaciones de la varianza, cálculo algebraico y llegar a la solución correcta, se obtuvieron mejores resultados en los estudiantes de Ingeniería Civil, con una diferencia entre 1,9 y 27,4%.

Problema 2. Una empresa de servicios financieros tiene 40 sucursales de similar tamaño a lo largo del país. Cada sucursal tiene ventas anuales que constituyen una variable aleatoria de media 30 UF (miles), con una desviación estándar de 5 UF (miles).

- a) ¿Qué distribución aproximada tienen las ventas totales anuales de la empresa? Justifique.
- b) Calcule aproximadamente la probabilidad de que las ventas anuales de la empresa superen las 1250 UF (miles).

El problema 2 considera, para una muestra de 40 sucursales, que la distribución asociada a las ventas totales tiene una distribución normal aproximada basándose en el teorema central del límite. Los estudiantes deben identificar que la media de la distribución de una combinación lineal de variables

aleatorias es la suma de las medias por sus respectivas constantes numéricas y que la varianza corresponde a la suma de las varianzas por sus constantes numéricas al cuadrado. En el apartado *b)* el estudiante realiza el cálculo algebraico y la transformación de n variables aleatorias basándose el teorema central del límite con apoyo de calculadora y tabla de la distribución normal. Así, se concluye que existe una probabilidad aproximada del 5,7% de que las ventas anuales de la empresa superen los \$1.250.000 UF.

Se observa en la tabla 3 que el 87% de los estudiantes de Ingeniería Civil asocian las ventas totales con la distribución normal, de los cuales un 54,5% justifican que la aproximación mejora conforme crece el número de variables aleatorias y que se desconoce la distribución de la población, por lo que se usa el teorema central del límite. El 74% utilizan expresiones verbales y el 76,6% el lenguaje simbólico. Los resultados son mejores que los obtenidos por Alvarado (2007). Además, el 49,4% logran identificar los parámetros considerando que la media de la distribución de una combinación lineal de variables aleatorias es la suma de las medias por sus respectivas constantes numéricas y el 36,4% observan que la varianza corresponde a la suma de las varianzas por sus constantes numéricas al cuadrado. En el apartado *b)*, el 54,5% de los estudiantes realizan la estandarización de la suma de n variables aleatorias, y el 40,3% desarrollan el cálculo de probabilidad referido al teorema central del límite con calculadora. Además, solo el 31,2% de los estudiantes logran obtener la respuesta correcta mediante el uso de la tabla de la distribución normal y el 50,6% responden en palabras aun cuando el cálculo de probabilidad no sea el correcto.

La información anterior muestra mejores resultados que los obtenidos por los estudiantes de Ingeniería Comercial. No hubo diferencia de lenguaje en el uso de expresiones verbales. Sin embargo, los estudiantes de Ingeniería Civil superaron con una diferencia de entre el 6,1 y el 33,2% en respuestas correctas en las distintas propiedades. De igual forma, estos resultados son mejores a los obtenidos por Alvarado (2007). No obstante, respecto a las argumentaciones podemos decir que los estudiantes aplicaron pocos elementos de significados; por lo general, sus respuestas no estaban bien fundamentadas, situación encontrada también en las investigaciones de Inzunza (2006).

Tabla 3.
Frecuencia de elementos de significado del problema 2 ($n = 108$)

Apartado	Pasos correctos en la solución	Ing. civil		Ing. comercial	
		$n = 77$	%	$n = 31$	%
a	La media aritmética de una muestra aleatoria de tamaño suficientemente grande sigue una distribución aproximadamente normal	67	87	23	74,2
	Expresiones verbales	57	74	23	74,2
	Notaciones y símbolos	59	76,6	18	58,1
	La aproximación mejora conforme crece el número de variables aleatorias en distribuciones desconocidas	42	54,5	14	45,2
	La media de la distribución de una combinación lineal de variables aleatorias es la suma de las medias por sus respectivas constantes numéricas	38	49,4	9	29
	La varianza de la distribución de una combinación lineal de variables aleatorias independientes es la suma de las varianzas por sus constantes numéricas al cuadrado	28	36,4	1	3,2
	b	Cálculo algebraico y transformación de n variables aleatorias	42	54,5	15
Cálculo de probabilidades referidas al teorema central del límite con calculadora, tablas de distribución o programa computacional		31	40,3	7	22,6
Llegan al resultado correcto		24	31,2	5	16
Responden en palabras la probabilidad		39	50,6	9	29

Resultados del cuestionario

El Cuestionario de OBD (Olivo, Batanero y Díaz, 2008) sobre intervalos de confianza fue aplicado inicialmente a una muestra de 252 estudiantes de tercer semestre de los estudios de ingeniería en el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, después de dos semanas de haber estudiado los intervalos de confianza. Estos estudiantes, considerados de buen nivel, siguieron un curso tradicional de probabilidad y estadística. Por lo tanto, conocían los conceptos previos relacionados con las distribuciones de probabilidad y las distribuciones muestrales.

A objeto de implementar las configuraciones didácticas en las distribuciones muestrales y determinar su alcance en la estimación de parámetros, se aplicó, en la asignatura de Estadística, a finales del primer semestre académico de 2010, el cuestionario de intervalos de confianza de OBD a 113 estudiantes universitarios de ingeniería. La muestra corresponde a estudiantes de las especialidades de Ingeniería Civil y de Ingeniería Comercial (77 y 36 respectivamente) de la Universidad Católica de la Santísima Concepción. Los estudiantes han tenido un curso previo de probabilidades y se caracterizan por tener un rendimiento académico aceptable. A efectos de comparación, se han considerado los primeros once ítems del cuestionario.

En la tabla 4 se observa que obtuvimos mejores resultados de los estudiantes a las respuestas correctas en los ítems del cuestionario, excepto en el ítem 8. Hubo seis ítems que superaron el 5% de diferencia con los alcanzados por Olivo, Batanero y Díaz (2008), destacando como los más altos porcentajes la estimación de la media con varianza conocida y desconocida (ítems 6 y 5) y la comparación de medias con varianza conocida (ítem 7).

Tabla 4.
Frecuencia de respuestas del cuestionario de intervalo de confianza ($n = 113$)

Ítem	Frecuencia				% correcto	Contenido del ítem	% comparado con OBD (m = 252)
	A	B	C	D			
1	21	13	71	2	62,8	Definición	7,2
2	35	68	6		60,2	Variación con tamaño de muestra	5,0
3	0	24	82	4	72,6	Relación con coeficientes de confianza	7,5
4	12	52	44		38,9	Variación en diferentes muestras	2,4
5	0	110	0	3	97,3	Estimar media σ conocida, población normal	18,3
6	2	109	1	1	96,5	Estimar media σ desconocida, muestra grande	23,5
7	5	102	3	0	90,3	Comparar medias, varianzas conocidas	15,7
8	28	68	4	5	24,8	Comparar medias, varianza desconocida, muestra grande	- 4,6
9	13	11	62	9	54,9	Comparar varianzas, población normal	2,1
10	28	67	0	17	59,3	Elegir distribución muestral	6,5
11	4	37	53	4	46,9	Determinar valor crítico	0,1

En el ítem 1 observamos que el 62,8% de los estudiantes no confunden la definición de intervalo de confianza; podemos destacar que los resultados han mejorado, pues en el OBD se obtiene que el 55,6% de los estudiantes contestan este ítem de manera correcta. Un 60,2% de los estudiantes comprenden la variación del ancho del intervalo al disminuir el tamaño de la muestra (ítem 2), lo que puede ser considerado como bueno si lo comparamos con el 55,2% del OBD. El 72,6% de los estudiantes comprenden cómo varía el ancho del intervalo al reducirse el nivel de confianza (en comparación con un 65,1% obtenido en el OBD). El 38,9% de los estudiantes comprenden que el intervalo de confianza representa el porcentaje de intervalos de muestras, tomadas todas bajo las mismas condiciones,

dentro de las cuales estará contenido el verdadero valor del parámetro (ítem 4), situación similar a la encontrada por Olivo, Batanero y Díaz (2008), con un 36,5%. En el ítem 5 se observa una mejora de un 18,3% de respuestas correctas de OBD, pues el 97,3% de los estudiantes obtienen el intervalo, considerando el valor crítico de la distribución normal estándar en la fórmula del intervalo de confianza para la media poblacional con σ conocida. De igual forma, el ítem 6 presenta mejores resultados: el 96,5% de los estudiantes llegan a obtener el intervalo de confianza adecuado para la media poblacional en el caso de σ desconocida y de una muestra grande. En el ítem 7, un 90,3% de los estudiantes obtienen de manera correcta el intervalo de confianza para la diferencia de medias en dos poblaciones, conociendo las varianzas σ_1^2 y σ_2^2 y siendo las muestras independientes (en comparación con un 74,6% de OBD). Olivo, Batanero y Díaz (2008) obtuvieron un 29,4% de respuestas correctas en el ítem 8; en nuestro caso solo el 24,8% de los estudiantes logran obtener el intervalo de confianza para la diferencia de medias poblacionales. En el ítem 9 los resultados son similares a los de OBD, obteniendo un 54,9% (a diferencia de un 52,8%) de estudiantes que consiguen obtener un intervalo de confianza para la comparación de dos varianzas poblacionales considerando una población normal. En el ítem 10 se observa una mejora, pues el 59,3% de los estudiantes escogen correctamente la distribución t de Student en la construcción de intervalos de confianza para la varianza en muestras pequeñas, en comparación con un 52,8% del OBD. En el ítem 11 se confirma el resultado obtenido por Olivo, Batanero y Díaz (2008), debido a que el 46,9% de los estudiantes determinaron el valor crítico correctamente, al considerar que la distribución requerida era la distribución t de Student.

En cuanto a los errores de comprensión de las propiedades de intervalos de confianza, ítems 2, 4 y 8, podemos destacar lo siguiente: el 30,9% de los estudiantes tienen dificultades en la variación del ancho del intervalo al disminuir el tamaño de la muestra (ítem 2a), obteniendo un 2,4% menos que OBD. También hubo un 46,02% de los estudiantes que no dieron importancia a la variación en diferentes muestras de los intervalos de confianza (ítem 4b), y un 10,61% confunden el verdadero valor del parámetro con el de estadístico de la media muestral (ítem 4a). En OBD se obtuvo un 34,1 y un 28,9% respectivamente. Otra de las dificultades de comprensión de propiedades se presentó en el ítem 8, donde un 60,2% de los estudiantes desarrollaron el cálculo de la estimación correcta de la diferencia de medias poblacionales con una interpretación incorrecta (ítem 8b). En OBD se obtuvo un 32,1%.

En relación con los errores de comprensión de procedimientos, señalamos que un 32,7% de los estudiantes suponen una distribución normal que se aplica en condiciones de muestras grandes (ítem 11b), obteniendo un 8,6% menos que el OBD.

CONCLUSIONES

Los resultados del estudio, sobre la base de nuestra visión teórica, muestran la complejidad de la comprensión del objeto «distribución muestral», caracterizada por los aciertos, dificultades y errores de comprensión de las entidades primarias, presentes en los problemas abiertos sobre la distribución de estimadores en dos tipos de poblaciones.

Podemos señalar que una proporción importante de los estudiantes comprenden la distribución de la media muestral en poblaciones normales con sus respectivos parámetros (problema 1). El procedimiento algebraico de estandarización no presentó mayores dificultades en los estudiantes. Destacamos la apropiación de las propiedades de la media y varianza de la distribución de la media muestral en poblaciones normales. No obstante, hubo dificultades para determinar los errores de estimación en poblaciones normales.

Consideramos una contribución los resultados obtenidos de la distribución de la media muestral para el caso de la población normal. No hemos encontrado estudios acerca de su comprensión para representaciones algebraicas en este nivel educativo. Si bien Batanero, Tauber y Sánchez (2001) han

descrito los errores de estandarización de una variable aleatoria con distribución normal, nuestro trabajo extiende este conflicto para el caso de la estandarización de estimadores.

Respecto a la comprensión del teorema central del límite para el caso de la suma de variables aleatorias (problema 2), hubo dificultades, principalmente con estudiantes de Ingeniería Comercial, en la aplicación de propiedades de la media y varianza del estimador, y en establecer las argumentaciones; con lo que se confirman las investigaciones de Inzunza (2006) y Alvarado (2007). Sin embargo, nuestros resultados con estudiantes de Ingeniería Civil fueron mejores; en los aspectos del uso de lenguaje verbal y simbólico, en la justificación del teorema para muestras grandes y la estandarización del estimador.

En este trabajo hemos planteado los intervalos de confianza como un campo de problemas dentro de las distribuciones muestrales mediante la selección adecuada de la distribución muestral en la estimación de parámetros.

En relación con los resultados del cuestionario, queremos poner el acento en el progreso de los estudiantes, en la elección adecuada de la distribución muestral para la construcción de intervalos de confianza de la varianza en muestras pequeñas, y la estimación de la media en muestras grandes con conocida y desconocida. Además, destacamos la comprensión de las definiciones, la variación con tamaño de muestra y la relación con coeficientes de confianza. De esta manera, se accede a una interpretación adecuada de la estimación de parámetros por intervalo de confianza. También, se corroboran las dificultades descritas por Olivo, Batanero y Díaz (2008); expresando que los estudiantes no comprenden que los intervalos de confianza representen el porcentaje de intervalos de muestra, tomadas todas en las mismas condiciones, dentro de los cuales está contenido el verdadero valor del parámetro. De igual forma, se observan errores procedimentales al determinar un valor crítico en forma incorrecta, al hacerlo a partir de la distribución normal estándar en lugar de a partir de la distribución t-student.

En síntesis, consideramos positiva la implementación de las configuraciones didácticas en el estudio de las distribuciones muestrales, atendiendo a la sugerencia de mejorar la enseñanza de los intervalos de confianza por medio de la simulación (Terán, 2006), y realzar la importancia de los intervalos de confianza y la reciente necesidad de su uso en la investigación (Olivo, Batanero y Díaz, 2008). La utilización de la simulación con dispositivos manipulativos y computacionales en nuestro experimento de enseñanza de la distribución muestral ha permitido a los estudiantes la exploración del efecto de los tamaños muestrales y que se obtengan mejores resultados en el cuestionario acerca de la comprensión de los intervalos de confianza. Por lo tanto, se debería tener presente, en las actividades de aprendizaje sobre las distribuciones muestrales, un acercamiento global al tema, considerando más de una forma de comunicar el objeto estadístico e incorporando los recursos tecnológicos a la enseñanza. De igual forma, sería necesario revisar el programa de actividad curricular de estadística en los nuevos planes de estudios de las escuelas de ingeniería, respecto a relacionar más estrechamente la distribución muestral con la estimación de parámetros por intervalo de confianza. Nuestro trabajo confirma los resultados obtenidos en otros trabajos sobre las dificultades de aprendizaje de la distribución muestral (Garfield, delMas y Chance, 2004; Inzunza, 2006) y los intervalos de confianza (Olivo y Batanero, 2007).

Por último, como en cualquier investigación didáctica, este trabajo tiene limitaciones en cuanto al tipo y número de estudiantes, tiempo de enseñanza y número de ítems de evaluación. También, hacemos notar que el estudio de la distribución muestral y sus campos de problemas es amplio, lo que es denotado por la proporción de estudiantes que utilizan correctamente los variados elementos de significado en las distintas situaciones-problemas que se han presentado. Se espera, por tanto, completar este estudio en puntos concretos, tales como repetir el proceso de estudio con estudiantes de otras características académicas, implementar software estadístico y estudiar las consecuencias del cambio y mejorar los instrumentos de evaluación.

AGRADECIMIENTOS

Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico, mediante el Proyecto de Iniciación Fondecyt N° 11080071.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALVARADO, H. (2007). *Significados institucionales y personales del teorema central del límite en la enseñanza de estadística en ingeniería*. Tesis doctoral, Universidad de Granada.
- ALVARADO, H. y BATANERO, C. (2007). «Dificultades de comprensión de la aproximación normal a la distribución binomial», *Números*, 67.
- ALVARADO, H. y BATANERO, C. (2008). «Significado del teorema central del límite en textos universitarios de probabilidad y estadística». *Estud. pedagóg.*, 34(2), pp. 7-28.
- BATANERO, C, TAUBER, L. y SÁNCHEZ, V. (2001). Significado y comprensión de la distribución normal en un curso introductorio de análisis de datos. *Quadrante*, 10(1), pp. 59-91.
- CAMPANARIO, J. M. (2003). Contra algunas concepciones y prejuicios comunes de los profesores universitarios de ciencias sobre la didáctica de las ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*, 21(2), pp. 319-328.
- CHANCE, B., BEN-ZVI, D., GARFIELD, J. y MEDINA, E. (2007). The role of technology in improving student learning of statistics. *Technology Innovations in Statistics Education*, 1(1). Revisado el 7 de marzo de 2011 desde internet: <<http://repositories.cdlib.org/uclastat/cts/tise/vol1/iss1/art2>>.
- DELMAS, R., GARFIELD, J. y CHANCE, B. (2004). «Using assessment to study the development of students' reasoning about sampling distributions», *American Educational Research Association. Annual Meeting*. California.
- FONSECA, C. (2003). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria*. Tesis doctoral. Universidad de Vigo.
- GARFIELD, J. y BEN-ZVI, D. (2008). Creating statistical reasoning environments. En J. B. Garfield y D. Ben-Zvi (eds.). *Developing Students' Statistical Reasoning*. Nueva York: Springer Science+Business Media, pp. 91-114.
- GARFIELD, J., DELMAS, R. y CHANCE, B. (2004). Reasoning about sampling distributions. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (eds.). *The Challenge of developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- GODINO, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2 y 3), pp. 237-284.
- GODINO, J. D. y BATANERO, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En A. Sierpiska y J. Kilpatrick (eds.). *Mathematics education as a research domain: A search for identity*, Dordrecht, Kluwer, pp. 177-195.
- GODINO, J. D., BATANERO, C. y FONT, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Revisado el 11 de agosto de 2011 desde internet: <http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf>.
- INZUNSA, S. (2006). *Significados que estudiantes universitarios atribuyen a las distribuciones muestrales en un ambiente de simulación computacional y estadística dinámica*. Tesis doctoral, Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV).
- INZUNSA, S. (2007). Recursos de internet para apoyo de la investigación y la educación estadística. *Revista Iberoamericana de Educación*, 41(4). Revisado el 18 de abril de 2011 desde internet: <<http://www.rieoei.org/experiencias142.htm>>.

- INZUNSA, S. (2010). Entornos virtuales de aprendizaje: Un enfoque alternativo para la enseñanza y aprendizaje de la inferencia estadística. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 15(45), pp. 423-452.
- LETÉLIER, M., LÓPEZ, L., CARRASCO, R. y PÉREZ, P. (2005). Sistema de competencias sustentables para el desempeño profesional en ingeniería. *Rev. Fac. Ing.* 13(2), pp. 91-96.
- MARTÍN, P. (2006). Achieving success in industrial training. En A. Rossman y B. Chance (eds.). *Proceedings of ICOTS-7*. Salvador (Bahía): International Association for Statistical Education. CDROM.
- OLIVO, E. y BATANERO, C. (2007). Un estudio exploratorio de dificultades de comprensión del intervalo de confianza, *UNION*, n.º 12.
- OLIVO, E., BATANERO, C. y DÍAZ, C. (2008). Dificultades de comprensión del intervalo de confianza en estudiantes universitarios. *Educación Matemática*, 20(3), pp. 5-32.
- PFANNKUCH, M. y WILD, C. (2004). Towards and understanding of statistical thinking. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (eds.). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publisher, pp. 17-46.
- RAMÍREZ, G. (2008). Formas de razonamiento que muestran estudiantes de maestría de matemática educativa sobre la distribución normal mediante problemas de simulación de fathom. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, 3(1), pp. 10-23.
- RETAMAL, L., ALVARADO, H., y REBOLLEDO, R. (2007). Understanding of sample distributions for a course on statistics for engineers. *Ingeniare*, 15, pp. 6-17.
- ROMEY, J. (2006). Teaching engineering statistics to practicing engineers. En A. Rossman y B. Chance (eds.). *Proceedings of ICOTS-7*. Salvador (Bahía): International Association for Statistical Education. CDROM.
- TERÁN, T. (2006). Elements of meaning and its role in the interaction with a computational program. En A. Rossman y B. Chance (eds.). *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*, Salvador (Bahía), Brasil, IASE.

UNDERSTANDING SAMPLING DISTRIBUTION THROUGH DIDACTIC CONFIGURATIONS AND THE IMPLICATIONS FOR STATISTICAL INFERENCE

Hugo Alvarado, Maritza Galindo, Lidia Retamal
Departamento de Matemática y Física Aplicadas.
Universidad Católica de la Santísima Concepción.
alvaradomartinez@ucsc.cl, mgalindoillanes@gmail.com, lretamal@ucsc.cl

This paper presents a study on ‘understanding sampling distributions and their relationship with parameter estimation through confidence intervals’. Two problems of sampling distributions, including different primary entities that comprise them, are proposed. This paper had a theoretical framework based on a confidence intervals questionnaire produced by Olivo, Batanero and Diaz’s (2008). The research was conducted in a statistics course, consisting of 77 civil engineering students and 36 business administration students from the Universidad Católica de la Santísima Concepción.

An innovative teaching method on sampling distribution complemented the regular learning activities on analytical procedure. Empirical sample selection activities using manipulative and computational devices were also used. To evaluate the effectiveness of the didactic configurations used in the two sampling distribution lessons, students were given two open problems on the distribution estimators obtained from normal populations (Problem 1) and from abnormal populations (Problem 2). The research aim was to determine students’ level of understanding of primary entities in relation to sampling distributions in an algebraic representation and to develop students’ initial knowledge of confidence intervals.

Studies show that students have difficulty in understanding the complex concept of “sampling distribution”. The teaching of sampling distribution is characterized by difficulties and misunderstandings in students’ comprehension of primary entities. Difficulties are associated with problems related to the distribution of estimators in two population types.

This study indicates that a significant proportion of students understand the distribution of the sample mean in normal populations with the respective parameters (Problem 1). The algebraic procedure for standardization did not pose any significant difficulties for students. However, students had difficulties in determining the estimation errors in normal populations. The researchers were unable to locate previous studies on this topic –in relation to algebraic representations– at this education level.

There were difficulties, predominately for business administration students, in applying mean properties and estimating the variance, i.e. understanding the central limit theorem for the sum of random variables (Problem 2). Furthermore, business administration students had difficulties in providing justifications. Civil engineering students were more accomplished at using verbal and symbolic language justifying the theorem for large samples and standardizing the estimator.

This paper has analyzed the difficulty for students in understanding confidence intervals within sampling distributions. Students’ ability to appropriately select the sampling distribution in parameter estimation was tested. This study found that the implementation of didactic configurations had a positive effect on students’ ability to learn sample distributions. The use of computational and manipulative devices in the learning experiment –teaching of sampling distributions– enabled students to explore the effect of sample sizes and to achieve better results in the confidence intervals questionnaire. The inclusion of this teaching method is promoted in activities designed to teach sampling distributions and also for a global approach to the topic. It is beneficial for educators to consider multiple teaching methods and to incorporate the use of educational technology. Additionally, it is recommended that teachers examine the new statistics curriculum in the engineering syllabus to better understand sampling distributions with parameter estimation using confidence intervals. This study confirms the results of previous research on learning difficulties associated with sampling distribution (Garfield, delMas and Chance, 2004; Inzunza, 2006) and confidence intervals (Olivo and Batanero, 2007).

Acknowledgements: Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico, by Proyecto de Iniciación Fondecyt N° 11080071

