T-181

PROBLEMAS DE MATEMÁTICA RECREATIVA POR ARTE DE MAGIA

Pedro Alegría Ezquerra
pedro.alegria@ehu.es
Universidad del País Vasco, UPV/EHU
José Muñoz Santonja
josemunozsantonja@gmail.com
IES Macarena, Sevilla

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
Modalidad: T
Nivel educativo: 5
Palabras clave: matemática, magia, didáctica, recreativa

Resumo
Muchos y muy variados problemas de matemática recreativa y juegos matemáticos se encuentran una y otra vez en libros de muy diversos autores, tanto antiguos como modernos. Son muy conocidas las obras de Bachet, Ozanam, Gergonne, Lucas y Rouse-Ball, pero la historia nos ayuda a descubrir otros tratados que han permanecido ocultos o no han sido ampliamente difundidos, como los de Chuquet, Pacioli, Leurechon, Guyot y otros.
Quizá muchos de estos libros antiguos de matemática recreativa se escribieran con intención de proponer ejercicios diversos a los estudiantes, algo que fuera atractivo y no repetitivo y aburrido. Por eso no es extraño encontrar entre estas recreaciones algunos juegos de magia matemática planteados como problemas. De hecho, muchos trucos clásicos de magia se pueden encontrar allí.
En este taller se plantean problemas matemáticos elementales a partir de dichos juegos. Con ello se pretende llamar la atención sobre dichos libros y la vigencia de algunos de sus contenidos pero también extraer y seleccionar juegos de magia que allí aparecen, desarrollando sus propiedades matemáticas y tratando de generalizarlos, cuando sea posible. Una mirada a los clásicos también nos permite observar los distintos modos de afrontar la educación matemática a lo largo de la historia.

Introducción

La magia es una actividad tremendamente atractiva para personas de todo nivel cultural y educativo. Tras asistir a un espectáculo de magia, los espectadores suelen quedar asombrados, ilusionados, sorprendidos y, en la mayoría de los casos, con ganas de más y, sobre todo, con deseos de aprender cómo se ha realizado ese truco.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Aunque a simple vista no lo parezca, muchos trucos de magia tienen un fundamento matemático detrás que asegura que, si no hay equivocaciones, el truco salga sin problemas. Es decir, a diferencia de otros trucos que consisten en despistar al espectador o escamotearle información, los trucos de magia matemática funcionan siempre y, por ello, pueden ser a veces realizados por los espectadores con la guía precisa del mago.

Si unimos los dos conceptos anteriores: trucos que promueven el deseo de aprender cómo se realizan y trucos cuyo fundamento es la matemática, no cuesta mucho intuir que la magia matemática puede ser un buen recurso para utilizarlo en nuestras clases de matemáticas para, primero captar la atención del alumno y, posteriormente, trabajar los conceptos matemáticos que existen detrás del truco.

Por ello, no es extraño que en los libros de texto no universitarios de matemáticas, especialmente de Primaria y ESO, se encuentren actividades presentadas como trucos de magia. Pero esto no es algo reciente.

En muchos libros antiguos de matemáticas recreativas de personas tan famosas como Leonardo Pisano (Fibonacci), Luca Pacioli o Gerolamo Cardano, podemos encontrar los mismos trucos de magia matemática que se han ido repitiendo siglo tras siglo en los libros correspondientes a esa materia.

El trabajo que presentamos en esta comunicación consiste en rastrear en la bibliografía antigua, para intentar encontrar cuáles fueron los primeros textos donde se citaron determinados trucos matemáticos. Pero también queremos plantear las posibilidades de ampliar esos trucos y, especialmente, estudiar las posibilidades de utilizarlos en clase de matemáticas para que sirvan como motivación para un estudio didáctico posterior.

En estas páginas vamos a presentar algunos trucos aislados del amplio abanico disponible para llevar al aula. Estos y otros juegos serán desarrollados a lo largo del taller, según el siguiente esquema:

I. Realización del truco en su versión original.
II. Estudio del fundamento matemático en el que se basa el truco.
III. Planteamiento de posibles generalizaciones basadas en el mismo principio.
IV. Discusión de los aspectos didácticos sugeridos por el truco.

1- Los tres objetos

ISBN 978-84-945722-3-4

Este truco aparece por primera vez en (Pisano, 1202), y a partir de ahí suele aparecer de forma sistemática en la mayoría de libros de matemática recreativa de distintas épocas, pero también en publicaciones de magia como en el ya clásico (Gardner, 1956).

El truco consiste en lo siguiente:

1) El mago coloca sobre la mesa 24 monedas del mismo valor y tres objetos diferentes –digamos que son un anillo, un billete y una cartera–.
2) Entrega una moneda al primer espectador, dos monedas al segundo y tres monedas al tercero.
3) Con el mago de espaldas, cada espectador escoge uno de los tres objetos y lo oculta. A continuación, quien ha escogido el anillo, toma tantas monedas como tenía inicialmente; quien ha escogido el billete, toma el doble de monedas de las que tenía inicialmente y quien ha escogido la cartera toma cuatro veces el número de monedas que tenía inicialmente.
4) El mago se vuelve de cara y, después de un rápido vistazo al número de monedas que quedan sobre la mesa, adivina qué objeto ha escogido cada espectador.

El problema que se plantea es: *¿De qué manera puede saber el mago qué objeto ha escogido cada espectador?*

Haciendo un estudio del problema, vemos que solo hay seis posibles elecciones de objetos entre los tres espectadores, que son precisamente las permutaciones de tres elementos. La siguiente tabla resume los distintos resultados (donde numeramos con 1, 2 y 3 a los espectadores, según el número de monedas que tienen inicialmente, y representamos por A el anillo, por B el billete y por C la cartera):

1	2	3	Monedas utilizadas	Monedas sobrantes
A	B	C	1x2+2x3+3x5=23	1
B	A	C	1x3+2x2+3x5=22	2
A	C	B	1x2+2x5+3x3=21	3
B	C	A	1x3+2x5+3x2=19	5
C	A	B	1x5+2x2+3x3=18	6
C	B	A	1x5+2x3+3x2=17	7

ISBN 978-84-945722-3-4

Así, por ejemplo, si en la mesa quedan 5 monedas, el espectador que recibió una moneda tiene el billete, el que recibió dos monedas tiene la cartera y el que recibió tres monedas tiene el anillo.

El estudio anterior puede hacerse tanto en Primaria como en secundaria, sustituyendo las monedas por fichas de cualquier juego de tablero.

A lo largo de la historia se han utilizado reglas mnemotécnicas para, sin más que observar el número de objetos resultantes, adivinar qué sujeto tenía cada uno de los objetos. También ha variado la forma de presentación. El objetivo ha sido siempre conseguir que el número final de monedas permita distinguir de forma unívoca quién posee cada objeto.

La versión original que aparece en (Pisano, 1202) pide multiplicar por 2 el número de monedas que tiene quien ha elegido A, por 9 el número de monedas que tiene quien ha elegido B y por 10 el número de monedas que tiene quien ha elegido C y sumar las tres cantidades. Luego, el mago debe realizar mentalmente las siguientes operaciones:

- Restar de 60 la suma obtenida.
- Dividir por 8 el resultado anterior.

El cociente indica el espectador que tiene el objeto A y el resto indica el espectador que tiene el objeto B. Basta realizar una tabla similar a la anterior para llegar a los resultados que permiten adivinar exactamente quién tiene cada objeto.

En (Pacioli, 1509) se propone un problema equivalente planteado de forma inversa: el mago entrega 12, 24 y 36 monedas a tres espectadores. Cada uno de ellos elige uno de los tres objetos, digamos A, B y C. El espectador que tiene el objeto A debe descartar la mitad de sus monedas, el que tiene el objeto B debe descartar dos tercios de sus monedas y el que tiene el objeto C debe descartar tres cuartos de sus monedas. El número total de monedas restantes permite al mago saber qué objeto tiene cada espectador.

De nuevo proponemos como actividad hacer el estudio de las seis posibilidades y ver qué números de objetos se recogen en cada caso.

Como pasa con las matemáticas en general, el interés es estudiar una generalización. En este caso, en (Bachet, 1612) se demuestra que no es posible una versión como la anterior para cuatro objetos, aunque se describe una variante del juego que sí es válida y se propone una regla mnemotécnica que permite distinguir los 24 posibles resultados. Más aún, en (Rouse

Ball, 1892) se presenta una generalización de este truco utilizando n objetos y n espectadores, utilizando una ingeniosa aplicación del sistema de numeración en base n.

2- El juego del novenario

Nicolas Chuquet (1445-1488) es considerado como el mejor matemático francés del siglo XV. Sin contar el libro de Fibonacci, parece que uno de los primeros libros en los que aparecen juegos de matemática recreativa que pueden considerarse como magia matemática es el titulado *Triparty en la science des nombres*, escrito en 1484 por Chuquet, aunque no fue oficialmente publicado hasta 1881, y a pesar de ello, el manuscrito tuvo una gran influencia en textos posteriores. El libro compendia todos los conocimientos matemáticos de esa época –resolución de las ecuaciones de segundo grado, progresiones aritméticas y geométricas – e, incluso, constituye el germen de la teoría de logaritmos desarrollada 100 años después por John Napier.

El capítulo del libro titulado *Jeux et esbatements qui par la science des nombres se font* contiene entretenimientos matemáticos que pueden presentarse como juegos de adivinación. Vamos a ver uno de ellos.

El mago pide a un espectador que realice las siguientes operaciones:

1) Piensa un número.
2) Multiplícalo por tres y divide el resultado por dos.
3) Vuelve a multiplicar por tres el resultado obtenido.
4) Al resultado final réstale nueve mientras puedas (es decir, mientras no salga un número negativo).
5) Por último, si es posible, resta al resultado final cualquier número entre 1 y 8.

La cuestión que se plantea en este momento es: *¿Qué datos necesita el mago para adivinar el número pensado?*

Vamos a ver el estudio que se podría realizar en clase como aplicación lúdica del álgebra elemental. Tenemos dos posibles resultados según sea el número pensado par o impar.

- Si el número pensado es par, digamos 2x, las primeras operaciones llevan al resultado 9x. El número de veces al que se puede restar nueve de este número corresponde al cociente de su división por nueve, es decir el propio x. Al multiplicarlo por dos, se obtiene el número pensado.

ISBN 978-84-945722-3-4

- Si el número pensado es impar, digamos 2x+1, las primeras operaciones llevan al resultado (18x+9)/2=9x+9/2. El número de veces al que se puede restar nueve de este número vuelve a ser el propio x. Como el resto es 4.5, es posible realizar la resta final, de modo que, para recuperar el número pensado, basta multiplicar x por 2 y sumar uno.

Resumiendo los dos casos, para que el mago adivine el número debe saber cuántas veces ha restado 9 del número resultante de las operaciones. Debe multiplicar ese número por 2 y sumar uno si ha podido restar algo al final.

Este truco, sin embargo, no es original de Chuquet pues es también conocido en la tradición oriental ya que aparece descrito por Ahmad al-Antaki (~987) en sus *Comentarios sobre la aritmética de Nicómaco* y todavía un siglo antes por Abu Yusuf al-Kindi.

3- La matriz de cartas

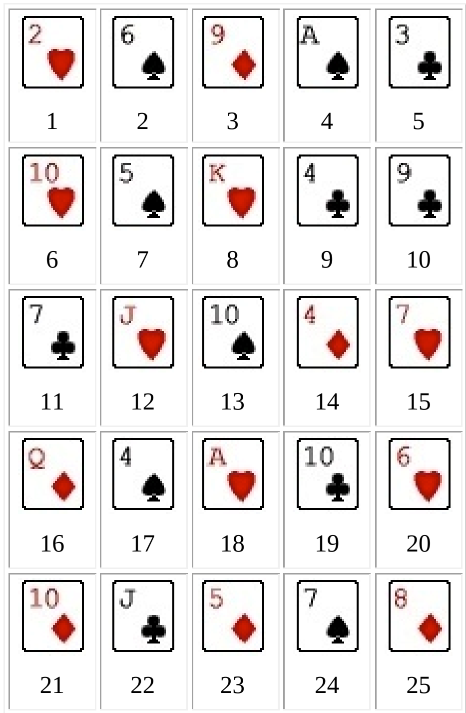
Una referencia básica de este juego es la de Angelo John Lewis, de nombre artístico profesor Hoffmann, de quien se afirma que fue el primero de la historia moderna en recopilar la magia de forma enciclopédica, a través de la trilogía *Modern Magic*, *More Magic* y *Later Magic* publicados entre 1876 y 1903, y su posterior secuela *Latest magic*, publicado en 1918.

En el capítulo III de (Hoffmann, 1876) aparece el juego que vamos a describir, bajo el título "Another mode of discovering a card thought of".

1) El mago reparte sobre la mesa 25 cartas, caras arriba, formando un cuadrado con cinco filas y cinco columnas.
2) Invita a una persona que piense una de las cartas y le indique solamente en qué fila se encuentra.
3) El mago recoge ahora todas las cartas del modo siguiente: coloca la última carta de la última fila sobre la última carta de la cuarta fila; coloca estas dos cartas sobre la última carta de la tercera fila, y así sucesivamente; al terminar de recoger la última columna, coloca las cinco cartas sobre la última carta de la quinta fila, el grupo de cartas sobre la última carta de la cuarta fila, siempre de la misma forma, hasta recoger todas las cartas.

Por ejemplo, si imaginamos que las cartas están dispuestas según el siguiente esquema,

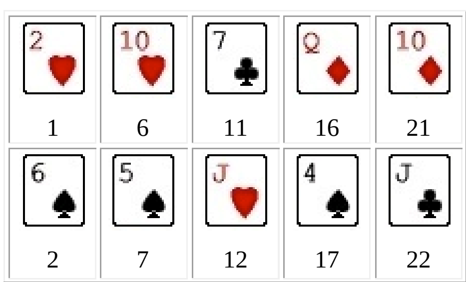
VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



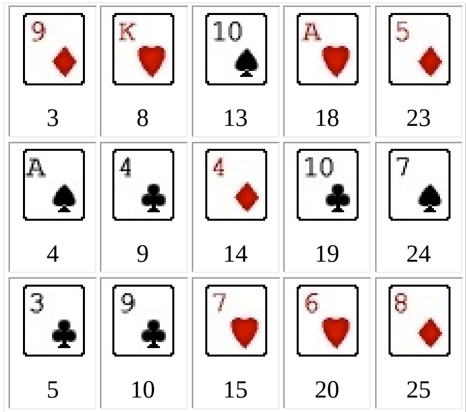
el orden de recogida es 25-20-15-10-5-24-19-14-9-4-23-...-2-21-16-11-6-1.

4) A continuación, el mago vuelve a repartir todas las cartas en cinco filas de cinco cartas cada una, en el orden "habitual": las cinco primeras cartas formarán la primera fila, las cinco siguientes se colocarán bajo las anteriores, y así sucesivamente.

Según el esquema anterior, las cartas quedarán colocadas en el orden siguiente:



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



5) El mago pregunta de nuevo al espectador en qué fila se encuentra ahora su carta. Inmediatamente adivina la carta elegida por el espectador.

La forma en la que el mago descubre cuál es la carta del espectador se basa en un principio de localización tan obvio como el siguiente: *"si un conjunto de n² cartas se distribuye en un cuadrado de n filas y n columnas, cualquier carta está determinada de forma única por la fila y la columna en las que se encuentra."*

La forma de aplicar este principio en el juego se ve claramente en el proceso de recoger y repartir las cartas sobre la mesa, consiguiendo que todas las cartas hayan intercambiado la fila con la columna. Así pues, si una carta estaba en la fila A y columna B, ahora está en la fila B y columna A. Por ejemplo, si la carta estaba primero en la fila 4 y luego en la fila 2, se trata del cuatro de picas, pues es la cuarta carta de la segunda fila.

En matemáticas se dice que la nueva matriz es la traspuesta de la matriz inicial. Y este truco puede utilizarse en clase para ejemplarizar lo que es la matriz traspuesta o también en la ESO para trabajar con coordenadas. Cuando se comienza con los ejes de coordenadas siempre se plantea el problema de que los alumnos confunden la abscisa con la ordenada y el punto (3, 2) lo dibujan en los ejes como el punto (2, 3). Estudiando la distribución de este truco se puede ver claramente la diferencia entre uno y otro, ya que al cambiar los órdenes cambia la ubicación de la carta.

Una simple consecuencia de este principio es que el juego puede realizarse con 9, 16, 25, 36 o, en general, con cualquier número cuadrado de cartas. Sin embargo, no hay ninguna limitación matemática que impida realizar el juego con n x m cartas, siendo n y m distintos.

ISBN 978-84-945722-3-4

Bastará que, en el primer reparto, se formen n filas y m columnas y, en el segundo reparto, se formen m filas y n columnas. En la práctica, esta distribución asimétrica no es natural y hace sospechoso el proceso, por lo que es más fácil que descubran el truco.

Si utilizamos un número cuadrado, es posible realizar el juego a varios espectadores simultáneamente. Un juego clásico que conjuga estas dos particularidades corresponde al problema 64 del libro *Plusieurs cartes estans proposées à plusieurs personnes, deviner quelle carte chaque personne aura pensé* publicado en 1624 por Jean Leurechon.

Referencias bibliográficas

Bachet, C. (1612). *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres*. Lyon.

Chuquet, N. (1484). *Triparty en la science des nombres.* Lyon.

Gardner, M. (1956). *Mathematics, magic and mystery.* Dover, New York.

Hoffmann, P. (1876). *Modern magic*. London.

Leurechon, J. (1624). *Récréation mathématique, composée de plusieurs problèmes plaisants et facétieux en faict d'arithmetique, geometrie, mechanique, optique et autres parties de ces belles sciences*. Pont-à-Mousson.

Pacioli, L. (1509). *De viribus quantitatis.* Bologna.

Pisano, L. (1202). *Liber abaci.*

Rouse Ball, W.W. (1892). *Mathematical recreations and essays.* London.

ISBN 978-84-945722-3-4